構造信頼性に基づく設計最適化のための経済性評価*

中西 真 悟^{*1}, 中 易 秀 敏^{*2}Formulation of Economic Assessment
for Optimum Design Based on Structural Reliability

Shingo NAKANISHI and Hidetoshi NAKAYASU

This study deals with an economic analysis of structural systems on using a reliability-based design method. Although the expected total cost which is composed of the initial cost and the cost of failure for the structural system has been investigated, it is crucial to consider the annual prediction cost with life cycle cost (LCC) during the life duration. It is also important to evaluate the cost not only on structural failure but also on designer's faults. Furthermore, it is necessary that the cost of the reliability test is taken into account in determining the expected total cost because uncertainties of parameters are strongly dependent upon the quality control or material test. In this paper, a new expected total cost concept which includes the cost mentioned above is proposed. In the proposed formulation, an optimization problem for economic evaluation during the life duration with the capital rate of interest and rate of price fluctuations can be solved by applying the present currency and annual prediction concepts. For a comparative evaluation, from the numerical analyses of a truss bridge structure, it is pointed out that not only optimization by present value but also that by annual value is useful for decision making in practical design.

Key Words: Optimum Design, Life Cycle Cost, Structural Reliability, Confidence Level, Present Currency, Annual Prediction Cost

1. 結 言

設計の主要因子として、機能と品質、経済性、安全性、生産性などが挙げられ、これらのバランスを考えた最適設計が望まれている。信頼性に基づく構造システムの最適設計において、経済性を考慮した設計法については、Moses/Kinser⁽¹⁾によって実施された構造重量最小化問題をもとに、Vanmarcke⁽²⁾、Mau/Seixsmith⁽³⁾、室津ら⁽⁴⁾によって、構造部材の単位重量あたりの価格を乗じた構造物の初期建設費用とその破損損失費用による費用最適化問題が提案されている。これらの研究は、Von Neuman/Morgensternのゲーム理論⁽⁵⁾にもとづく定式化を行ない、確率論的設計法を最適化問題として具体化することに貢献した。

その後、Lind⁽⁶⁾により各設計基準との対応が試みられ、実用化への期待が高まった。これをもとにKoyama⁽⁷⁾は、破損損失費用の現価換算の重要性を提案した。この考え方は、構造物のライフサイクルコスト

(以下LCCと称する)の経済性分析を行うときには非常に重要な考え方として定着しつつある。しかしながら、これらの考え方にはLindによる提案式に用いられた安全性指標が、Cornellによる初期の一次近似二次モーメント法⁽⁸⁾に従う限界状態関数を基準としたために、破損確率の普遍的評価との対応の点で改善の余地が残されてきた。また、LCCに重要である運用のための定期保守費用や設計・施工における過失による罰金費用は、これまでの安全性を考慮した構造物の費用最適化のモデルにはあまり取込まれていない点で改良の必要性がある。このことは、近年ではPL法の施行にみられるように、設計・施工上の過失の有無により支払われる損失費用が重要視される傾向にあるためである。このような背景からも確率論的評価の立場から新たな構造最適化のための費用モデリングが要求されていた。

本研究では、まず安全性指標の統計的不確定性と時間依存性を考察する。そして、その特性を経済評価に導入する方法を示す。このとき、構造物の破損損失費用だけでなく、設計・施工上の過失に関する罰金費用も加味した設計最適化の規範を示す。そのため、設計

* 原稿受付 1996 年 4 月 4 日。

^{*1} 正員、大阪工業大学大学院 (〒535 大阪市旭区大宮 5-16-1)。^{*2} 正員、大阪工業大学工学部。

値の信頼水準を用いて過失による損失額の基準を許容差設計の概念により設定することを提案する。また、これを用いて構造物の期待総費用の定式化が破損損失と過失損失の両者の事象の組合せによって、初期建設費用、破損損失費用、信頼性試験費用、定期保守費用、罰金費用の各因子の組合せが変わることを示す。さらに、LCCを評価するときに重要な耐用期間と供用期間を考慮し、この間の資本利率および物価変動率を用いた経済的変動の時間的効果も加味した定式化を検討する。

2. 構造信頼性理論に基づく安全性指標の統計的不確定性および時間依存性

構造システムにおける不確定性を有する設計変量を基本確率変量ベクトル $\mathbf{X}$ として定義し、これらが正規分布 $N(\mathbf{E}(\mathbf{X}), \mathbf{C}_X)$ に従うものと仮定する。ここに、 $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ は $\mathbf{X}$ の平均ベクトルであり、 $\mathbf{C}_X$ はその分散行列である。また、構造システムに関する破損モード $F_j (j=1, 2, \dots, M)$ の力学的・物理的メカニズムを定義する限界状態関数 $g_j(\mathbf{X})$ をまとめて

$$\mathbf{G}_X = \{g_1(\mathbf{X}) \ \dots \ g_M(\mathbf{X})\}^T, \quad \mathbf{X} = \{X_1 \ \dots \ X_n\}^T \quad (1)$$

と定義する。このとき、個々の破損モード F_j は限界状態 $g_j(\mathbf{X})=0$ を境界として破損領域を $D_j = \{g_j(\mathbf{X}) \leq 0\}$ と定義する⁽⁹⁾。 $g_j(\mathbf{X})$ が線形関数であるとき、 $\mathbf{E}(\mathbf{G}_X)$ を $\mathbf{G}_X$ の平均ベクトル、 $\mathbf{C}_{GX}$ を $\mathbf{G}_X$ の分散行列と定義すると、限界状態関数ベクトルもまた $\mathbf{G}_X \sim N(\mathbf{E}(\mathbf{G}_X), \mathbf{C}_{GX})$ となるために、その取扱いが容易となる。

また、この評価は通常設計変量間の相関関係を無相関化し、スケールの標準化を行った標準化変換法を用いて、標準正規確率変量ベクトル $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ に変換することが行われている(以下変換後の空間を $\mathbf{Y}$ 空間と称する)⁽⁹⁾。 $\mathbf{Y}$ 空間では、設計変量が無相関な確率変量として構築されているので、 $g_j(\mathbf{X})$ は $g_j(\mathbf{Y})$ と再表記され、破損モード F_j に対する破損領域を $D_{Yj} = \{g_j(\mathbf{Y}) \leq 0\}$ と再定義することができる。このとき、個々の破損確率は

$$P_{Fj} = \int_{D_{Yj}} \phi_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{D_{Yj}} \exp\left(-\frac{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}{2}\right) d\mathbf{y} \quad (2)$$

と表現できる。ここに、 $\phi_Y(\cdot)$ は多次元標準正規確率密度関数である。この様子をわかり易く示すため、図1には二次元($n=2$)の場合の破損領域、限界状態を示す。

Fig. 1 Upper and lower bounds of safety index on the standardized space

す。

さらに、限界状態関数 $g_j(\mathbf{Y}) (j=1, \dots, M)$ は、線形関数として変換されるため、各要素の限界状態 $g_j(\mathbf{Y})=0$ をHesseの標準形としてまとめて

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} \alpha_1^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_1^*) \\ \vdots \\ \alpha_M^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_M^*) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_M^T \end{bmatrix} \mathbf{Y} - \begin{Bmatrix} \alpha_1^T \mathbf{Y}_1^* \\ \vdots \\ \alpha_M^T \mathbf{Y}_M^* \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3)$$

と表記すると、このときの定数項は、図1に示すように、原点から $g_j(\mathbf{Y})=0$ を満たす点 $\mathbf{Y}_j^*$ までの最短距離となる。式(3)の定数項の各要素 $j(=1, \dots, M)$ は、Hasofer/Lind⁽¹⁰⁾の提案した安全性指標(または信頼性指標) β_j^* に相当する。ここに、 α_j は $g_j(\mathbf{Y})$ の方向余弦ベクトル($\|\alpha_j\|=1$)を意味する。これを考慮すると、 $\mathbf{Y}$ 空間における個々の破損モード F_j の破損確率は

$$P_{Fj} = P\{g_j(\mathbf{Y}) \leq 0\} = \Phi(-\beta_j^*) \quad (4)$$

と容易に算出できるため、有効な指標として注目されている。ここに、 $P\{\cdot\}$ は確率事象・の生起する確率を表わし、 $\Phi(\cdot)$ は累積標準正規分布関数である。

以下、2・1では母数推定のための信頼水準による安全性指標の影響を検討する方法を示し、2・2では安全性指標の時間依存性への拡張について示す。

2・1 信頼水準を考慮した安全性指標の上界・下界

設計変量の確率分布の母数推定や確率特性値の予測は、高い信頼水準を保証することが望ましい。しかしながら、現実には経済的、時間的に全数検査、全事例調査は困難であることから、標本数 m を設定し、信頼水準 γ で確率分布の母数を区間推定して用いざるを得ないのが現状である⁽¹¹⁾。

このとき、分布推定のために行われる実験室や実機

での試験を一般に信頼性試験と呼んでいる。さて、平均ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ の推定量 $\bar{\mathbf{X}}$ を算出し、分散共分散行列 $\mathbf{C}_X$ が既知の場合の区間推定法を援用して、安全性指標の上界および下界を計算する。この場合、信頼水準 γ での信頼領域は

$$m(\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{E}(\mathbf{X}))^T \mathbf{C}_X^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{E}(\mathbf{X})) \leq \chi^2(1-\gamma; n_e) \quad (5)$$

と表現される⁽¹²⁾。ここに、 m は標本数、 n_e は平均値を推定している設計変量数である。また、 $\chi^2(1-\gamma; n_e)$ は自由度 n_e の信頼水準 γ における χ^2 分布の片側確率点を意味する。式(5)は $\mathbf{X}$ 空間における信頼領域を意味する。これに対して $\mathbf{Y}$ 空間で、式(5)を直接表現すると、 $\mathbf{Y}$ の平均値の推定量 $\hat{\mathbf{Y}}$ の不確定性を考慮した原点 $\mathbf{0}$ の信頼領域を意味する。しかしながら、 $\mathbf{Y}$ 空間では安全性指標は原点から破損表面までの最短距離であることに意義がある。そのため、原点 $\mathbf{0}$ を固定し、その不確定性の影響を直接設計点 $\mathbf{Y}_j^*$ ($j=1, \dots, M$) において定義し、 $\mathbf{Y}_j^*$ の信頼領域から β_j^* の信頼区間を設定する⁽¹³⁾。これを用いると、信頼水準 γ によって規定された β_j^* の信頼領域は、図1での破線部で示した区間に相当する。すなわち、上界 β_{Uj}^* と下界 β_{Lj}^* を

$$\beta_{Uj}^* = \beta_j^* + \sqrt{\frac{\chi^2(1-\gamma; n_e)}{m}} \quad (6)$$

$$\beta_{Lj}^* = \beta_j^* - \sqrt{\frac{\chi^2(1-\gamma; n_e)}{m}} \quad (7)$$

として規定することができる。

2.2 安全性指標の時間依存性 安全性指標 β_j^* には、二つの見方がある。一つは、破損モード F_j の破損確率 P_{Fj} の相対的評価のための尺度という見方である。もう一方は、設計において加わる荷重群の不確定因子を勘案して、設計強度算定のため安全余裕を見積る相対係数とする見方である。前者は、信頼性解析の立場からの尺度量、後者は信頼性設計あるいは管理の立場からの意思決定係数の意味を持っている。

ところで、前者の立場に立てば構造システムのLCCの時間変化に伴う効果を解析に加味するには、構造システムの劣化メカニズムを検討して、破損確率の時間変化を解析する必要がある。このためには、厳密には対象システムの動的解析⁽¹⁴⁾を行わねばならない。しかしながら、後者の設計志向の立場からは、経済性分析のためにマクロな観点での時間挙動モデルを組み立てて、経済性効果の評価のために利用することは、設

計管理といったOR分野の数値モデルでよく用いられるアプローチである⁽¹⁵⁾。

こうした考えに基づき、ここでは、構造システムの劣化を安全性指標の時間依存モデルとして表わすことを試みる。この種の検討もいくつか試みられているが⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾、ここでの考え方は、構造システムの劣化の支配因子を

- (1) 材料強度の経年変化(材料の腐蝕効果、摩耗効果など内部組織変化による物性劣化)
- (2) 荷重と抵抗の相対作用(クリープの効果、疲労効果など破損メカニズムの経年変化による劣化メカニズム変更効果)

によるものと考え、負荷荷重が経年変化で増加や減少することはあまりないものとする。こうした考えによれば、安全性指標の低減は上記の(1)を主要因として、(2)の効果は荷重量と強度間の相関が変化するものとすることができる。

ところで、構造システムを構成する要素である材料強度が、時間とともに劣化するメカニズムは、長年の研究で明らかにされてきている⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾。そこで、こうした知見に基づき、初期設定された安全性指標 β_j^* ($j=1, \dots, M$) に対し、期間 t (年) を経て劣化する安全性指標を $\beta_j(t)$ とすると、その耐用期間 N_0 までの挙動は減少しやがて飽和するものと仮定できる。構造システムの安全性指標の減少原因を、要素材料強度の低下が主に支配的であると考えられる場合には、この種の挙動になるものと予想される。その理由は、既に数多くの研究で指摘されているように、材料強度の疲労やクリープなどの劣化メカニズムによる低下は、ある一定の時間になると飽和するか、あるいは対数的に線形に減少することが知られているからである⁽¹⁸⁾。このことを参考に下記のモデルを考える。

いま、耐用期間 N_0 に比して何割かを経過する (t/N_0) と、安全性指標がどの程度低下するかの比率が対数的に線形であるとする。この場合には

$$\ln \beta_j^* - \ln \beta_j(t) = a \left(\frac{t}{N_0} \right) \quad (8)$$

の関係が成立する。式(8)のモデルの物理的意味を解釈するため、図2に示す数値挙動を観察する。図2での傾き a の意味は、 $a=0$ で劣化 ($\beta_j^* / \beta_j(t)=1$) がみられず、 a が正の値をとるに従って、線形的に減衰する物理モデル ($\beta_j^* / \beta_j(t) = \exp(at / N_0)$) であることが理解でき、耐用期間 N_0 で初期の e^a になることがわかる。この関係より $\beta_j(t)$ を導くと

$$\beta_j(t) = \beta_j^* \exp\left(-a \frac{t}{N_0}\right) \quad (9)$$

となる。これより故障率

$$\lambda(t) = \frac{d\Phi(-\beta_j^*(t))}{dt} \quad (10)$$

が導け、この挙動について調べると、図3のようになる。この図では、 a が大きくなるほど故障率は上昇傾向を示し、偶発故障期間から摩耗故障期間へ移行していく故障物理モデルに合致している様子がわかる。

ところで、式(9)の表現のような劣化モデルは既に土木工学の分野では利用されている⁽⁷⁾。このとき、Koyama⁽⁷⁾によれば、 a は減衰係数を意味し、0.5~1.0程度の値が有効とされている。そこで、2・2で定義した安全性指標の上界値 β_{ij}^* を設計に採用する方法を提案するため、式(9)を応用した

$$\beta_{ij}^*(t) = \left(\beta_j^* + \sqrt{\frac{\chi^2(1-\gamma; n)}{m}} \right) \exp\left(-a \frac{t}{N_0}\right) \quad (11)$$

を用いて解析を進めることとする。

Fig. 2 Time dependent safety index model Fig. 3 Relation between $\lambda(t)$ and t/N_0

3. 最適設計問題のための経済性評価

構造物のLCCを評価するときに、これまで初期建設費用 C_i と破損損失費用 C_F を用いるモデルが考えられてきた。ところで、もし構造物が破損しなければ総費用は C_i であり、破損する場合には $C_i + C_F$ を支払うことになる。そこで、この問題の期待総費用 C_T は、構造物の破損確率が P_F と見積もられているとき

$$C_T = -(C_i + C_F)P_F - C_i(1 - P_F) = C_i + C_F P_F \quad (12)$$

として定式化することができる⁽³⁾。これは、経済性を分析する確率論的設計法として非常に重要なモデル

であるとされてきた⁽²⁰⁾⁽²¹⁾。以下3・1では、まず期待総損失費用に関する新たなモデルを提案し、3・2においてこれに関する各費用の時間的価値に対する考え方を検討する。

3・1 期待総費用の定式化 図4に示す静定トラス構造の最小重量設計問題⁽¹⁾⁽³⁾に関して、単位重量あたりの費用 c_1 を用いた

$$\text{minimize } c_1 \sum_{j=1}^M A_j L_j \delta_j + c_2 \sum_{j=1}^M c_{2j} P_{Fj} \quad (13)$$

なる定式化を考える。ここに、 A_j 、 L_j 、 δ_j はそれぞれ構造部材 $j(=1, \dots, M)$ の断面積、支間、材料密度である。これを式(12)に対応して補足すると、 C_i は部材数 M 個の構造部材の重さの和を算出し、さらに c_1 を乗じたものを初期建設費用

$$C_i = c_1 \sum_{j=1}^M A_j L_j \delta_j \quad (14)$$

と考えることができる。また、 P_{Fj} は破損モード F_j の破損確率を意味し、 c_{2j} は各構造部材 j の単位重量単価に関する損失の規模を設定するための損失の重要度を示す係数である。式(14)の断面積 A_j は、式(4)で基準とした安全性指標 β_j^* を保証するために、式(6)を用いた安全性指標の上界により決定され、設計時の安全性確保において信頼水準まで考慮される。このため、初期建設費用 C_i のみだけでなく、信頼性試験費用 C_p と定期保守費用 C_M を導入することが必要となる。

Fig. 4 Statically determinate truss structure

ところで、2・2で示した説明より標本数 m を大きく設定すれば信頼性試験費用は

$$C_p = c_1 c_3 m^h \quad (15)$$

と大きくなるが、これに対して初期建設費用 C_i は小

さくなる関係がある。ここに、 η_1 は標本数 m に関する修正係数であり、 c_3 は信頼性試験の重要度を示す係数とする。

さらに、安全性を維持する運用管理費用として定期保守費用 C_M は、安全性指標 β_j^* 、標本数 m と減衰係数 a の意味合いを考えると

$$C_M = \frac{c_1}{a^{\eta_2} m^{\eta_3}} \sum_{j=1}^M \frac{A_j L_j \delta_j}{\beta_{ij}^{\eta_4}} \quad (16)$$

なる関係式として設定できる。ここに、 η_2 、 η_3 、 η_4 は、それぞれ η_1 と同様に各基数の修正係数である。ここで示した C_M は、故障部を修理したり取替えたりする事後保全としての費用ではなく、予防保全としての管理費用である。すなわち、供用中に必然的に発生する消耗品の補充などのための運用面での維持管理のための費用である。したがって、一般的には定額である。

また、設計上で規定した確率論的根拠による破損の損失費用 C_F とは区別して、設計変量の母数の不確定性に対して導入した信頼水準 $\gamma (=1-P_E)$ を超える過失で補償する罰金費用 C_E を導入する。 C_E は計量管理あるいは品質工学上重視される許容差設計⁽²²⁾の概念を直接安全性指標の上界値の制御に用いた損失関数として見積もることができる。具体的には2.2の分散既知の場合の罰金費用を

$$C_E = c_1 c_4 M \frac{\chi^2(1-\gamma, n)}{m} \quad (17)$$

と定義し、 C_F と分割して損失を検討する。ここに、 c_4 は過失の重要度を示す係数である。

以上を検討し、それぞれの生起する確率を用いた期待総費用を考えると、期待総費用は

$$C_T = \begin{Bmatrix} 1-P_E \\ P_E \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_I + C_P + C_M & C_I + C_P + C_M + C_F \\ C_I + C_P + C_M + C_E & C_I + C_P + C_M + C_E + C_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1-P_F \\ P_F \end{Bmatrix} \\ = C_I + C_P + C_M + C_E P_E + C_F P_F \quad (18)$$

として構築できる。式(18)は、期待総費用を破損事象の生起の有無と、信頼水準による過失の責任の有無に分割し、それぞれの場合に関連する費用因子を定式化することを提案するものである。

3.2 現価換算および年平均期待総費用の算出法

本節では、式(22)に含まれる C_M 、 C_E 、 C_F の時間的価値を考慮する方法を記述する。

3.2.1 定期保守費用の現価換算 定期保守費用 C_M は、毎年保守に必要であるものと仮定する。このとき、資本利率 ξ と物価変動率 κ を用いると、 C_M は各年の物価変動を考慮して支払うことになる。また、これを現価に換算し評価するために、現価係数⁽²³⁾を各期ごとに用いた総定期保守費用は

$$H_M = C_M \sum_{t=1}^N \left(\frac{1+\kappa}{1+\xi} \right)^t \quad (19)$$

として求めることができる⁽²⁴⁾。ここに、 t は供用期間 N までの各期末を意味する。

3.2.2 破損損失費用と罰金費用の現価換算 現価換算を加味すると、期待破損損失費用 H_F は、破損損失費用 C_F 、資本利率 ξ 、物価変動率 κ と式(11)の $\beta_{ij}^*(t)$ から

$$H_F = c_1 \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\sum_{j=1}^M c_{2j} \Phi(-\beta_{ij}^*(t)) \right) \left(\frac{1+\kappa}{1+\xi} \right)^t \right) \quad (20)$$

と定義できる。この定義式は、各期末の破損確率 $\Phi(-\beta_{ij}^*(t))$ と物価変動率 κ の影響を受けた費用の現価換算と、構造破損が一度のみ生起することを考慮し、供用期間 N で割った期待値を求めるものである。

さて、罰金費用 C_E の現価換算を加味した期待罰金費用 H_E も上記に沿って定義できる。すなわち

$$H_E = C_E (1-\gamma) \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\frac{1+\kappa}{1+\xi} \right)^t \right) \quad (21)$$

として与えることができる。式(20)と異なる点は、破損確率 $\Phi(-\beta_{ij}^*(t))$ の時間変化と経済変動を同時に逐次乗じなければならないが、信頼水準 γ が設計時における意思決定因子であるため、罰金費用 C_E を現価換算するとき、経済変動のみに支配されるところが相違点である。

3.2.3 供用期間中の期待総費用とその年等価格換算

3.2.1、3.2.2において現価換算された各費用を用いて、本節では供用期間中の期待総費用の算出とこの費用を供用期間 N に関する年等価格に換算する評価法⁽¹⁹⁾を検討する。すなわち、資本回収係数⁽²³⁾を用いた構造物の最適供用期間決定のためのモデルを構築する。まず、式(18)にもとづく期待総費用 C_T から式(19)

～(21)にもとづく現価換算を実施した期待総費用を

$$H_T = C_I + C_P + H_M + H_F + H_E \quad (22)$$

と見積もる。この式(22)に資本回収係数を乗じると各期末に関する年平均総費用は

$$H_A = H_T \frac{\xi(1+\xi)^N}{(1+\xi)^N - 1} \quad (23)$$

として算出できる。したがって、 H_A の最小値は構造物の破損に関する安全性を考慮した費用最適化のみならず、最適供用期間を検討することができる。

4. 数値解析および考察

4.1 H_T の数値解析 図4に示すトラス構造⁽³⁾をもとに、3章で提案した供用期間中の期待総費用 H_T の数値解析を実施する。このとき、個々の破損モード F_j ($j=1, \dots, 13$)の限界状態関数は

$$G = \begin{Bmatrix} A_1 X_1 \\ A_2 X_2 \\ A_3 X_3 \\ A_4 X_4 \\ A_5 X_5 \\ A_6 X_6 \\ A_7 X_7 \\ A_8 X_8 \\ A_9 X_9 \\ A_{10} X_{10} \\ A_{11} X_{11} \\ A_{12} X_{12} \\ A_{13} X_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \\ \frac{3}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2\sqrt{6}} & \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{6}-2\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2\sqrt{6}} \\ \frac{(-13+5\sqrt{6})\sqrt{3}}{4\sqrt{2}(3-\sqrt{6})} & \frac{(-7+3\sqrt{6})\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(3-\sqrt{6})} & \frac{(-7+3\sqrt{6})\sqrt{3}}{4\sqrt{2}(3-\sqrt{6})} \\ \frac{3}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \frac{(5-2\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})} & \frac{2(5-2\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})} & \frac{(5-2\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})} \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2\sqrt{6}} & \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{6}-2\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2\sqrt{6}} \\ \frac{(-7+3\sqrt{6})\sqrt{3}}{4\sqrt{2}(3-\sqrt{6})} & \frac{(-7+3\sqrt{6})\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(3-\sqrt{6})} & \frac{(-13+5\sqrt{6})\sqrt{3}}{4\sqrt{2}(3-\sqrt{6})} \\ \frac{3}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{14} \\ X_{15} \\ X_{16} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

として定式化できる。ただし、個々の破損モード F_j は部材に係る外力のみを対象とし、各部材の自重は無視する。また、各確率変量は、互いに独立であるものとする。以上を考慮した式(24)から部材断面積 A_j を決定するため、文献(21)～(25)を参考に表1、表2に示すパラメータ値を設定して数値解析を試みる。また、資本利率 ξ と物価変動率 κ については、我が国の経済統計⁽²⁶⁾を参考に、表3に示す組合せを設定した。以上の基本条件のもとで、 H_T の最小費用を

$$\begin{aligned} &\text{minimize } H_T(m, \beta_j^*) \\ &\text{subject to } \beta_j^* - \beta_a - \sqrt{\frac{\chi^2(1-\gamma, n_a)}{m}} \leq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

なる数理計画問題として解く。解の探索は、茂木らのFORTRAN77最適化プログラミングパッケージの逐次二次計画法⁽²⁷⁾の解法アルゴリズムを用い、FORTRANコードを、Microsoft FortranPowerstationによりコンパイルし、Intel Pentium120MHz、16MBRAMを搭載したPC上で実行した。表3に ξ と κ の各組合せに対する最小費用 H_T を示す。なお、設計時における許容安全性指標 β_a は4.0とした。

Table 1 Initial value of structural member

symbol	value	symbol	value
$\bar{X}_j$ ($j=1, \dots, 13$)	1	β_j^* ($j=1, \dots, 13$)	≥ 4.00
σ_{X_j} ($j=1, \dots, 13$)	0.1	γ	0.95
$E(X_j)$ ($j=14, 15, 16$)	1	m	≥ 1
σ_{X_j} ($j=14, 15, 16$)	0.1		

Table 2 Specified value for cost condition

symbol	value	symbol	value
c_1	1.0	η_k ($k=1, \dots, 4$)	1.0
c_{1j} ($j=1, \dots, 13$)	10000	δ_j ($j=1, \dots, 13$)	10
c_3	1.0	$N(=N_0)$	60
c_4	1000	β_a	4.0

Table 3 Minimal value of H_T

$\xi \backslash \kappa$	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
0.00	628 654	750 232	932 515	1212.16	1648.93	2340.10
0.02	546 822	628 654	747 356	923 831	1192.08	1607.05
0.04	491 139	548 136	628 654	744 613	915 617	1173.27
0.06	457 473	492 957	549 409	628 654	741 992	907 837
0.08	438 666	458 929	494 731	550 643	628 654	739 487
0.10	426 910	439 823	460 376	496 461	551 839	628 654

ところで、表1、2の数値を基準とした H_T は、設計に用いられる確率変量の平均値の区間推定法を用いた安全性指標の上界値 β_j^* による影響をも検討している。そこで、表3の結果に関する H_T の挙動を、まず図5では資本利率 $\xi=0.06$ を基準として、物価変動率 κ による経済的影響を、図6では物価変動率 $\kappa=0.02$ を基準として、資本利率 ξ による影響をそれぞれ加味して、これを標本数 m と対応させて図示して比較している。

ここで重要な点は、経済的に余力のある体制で、構造物を維持するときと、そうでない場合ではLCCが大きく異なってくることである。そこで、図7、8では図5、6の経済的条件をそれぞれ加味して、これを安全性指標 β^* と対応させて図示している。

Fig. 5 H_T according to m based on price fluctuation rate

Fig. 6 H_T according to m based on capital rate of interest

Fig. 7 H_T according to β_U based on price fluctuation rate

Fig. 8 H_T according to β_U based on capital rate of interest

4.2 H_A の数値解析 H_T の最小化を検証することは重要であるが、LCCを考える際に耐用期間 N_0 だけでなく、経済的な供用期間 N についても照査する必要がある。すなわち、耐用期間まで構造物を使用・維持することのみを検討するのではなく、再建を検討することが経済的である場合、あるいは初期建設費用を増加することにより、逆に再建を検討せずに経済的に維持できる場合を評価することは、非常に重要な問題である。

そこで、式(23)で定義した年平均総費用 H_A を、4.1の数値解析と同一条件で、 H_T の最小化と比較するため実施する。ここでは、資本利率 ξ と物価変動率 κ が各条件に従う最適設計問題を

$$\begin{aligned} & \text{minimize } H_A(N, m, \beta_U^*) \\ & \text{subject to } \beta_U^* - \beta_a - \sqrt{\frac{\chi^2(1-\gamma, n_e)}{m}} \leq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

と定式化して解く。解の探索アルゴリズムやプログラムコードならびに解析を実施する計算機環境も4.1と同一とする。この結果、供用期間 N に対応した H_T と H_A に関する最適設計の結果を表4、図9のように得た。図9に示す経済効果について H_T と H_A の両者を比較することは興味深い。たとえば、 H_A が推移する傾向から経済的変動を考慮することが重要な問題である。すなわち、耐用期間 N_0 の H_T の最小化の検討のみを実施するだけでは、必ずしもLCCの効果的な経済性評価が得られないため、経済的変動に対して H_A に関

する最適化を実施しなければならないことを、この結果は示している。

さらに、表4から、 H_A は耐用期間 N_0 までを最適化した H_T に一致しない傾向を示していることがわかる。すなわち、最適年平均期待総費用 H_A を達成すると、 H_T の最適化とは異なる標本数 m が得られる。

このことより H_T の最適化は、構造物を維持するという点では、必ずしも有効とはいえないことが分かる。したがって、最適年等価格に換算した期待総費用 H_A の大きさの検討は必要である。また、最適供用期間 N の大きさに関しても注意すべきLCCへの影響が示されるため、再建を含めた供用期間 N を決定することの重要性が指摘できる。

Table 4 β_U^* and m according to minimum H_T and H_A

ξ	κ	H_T	β_U^*	m/N	H_A	β_U^*	m/N
0.06	0.10	907 837 (49 2329)	5 63714	211 573 / 40	43 6327	4 47586	113 959 / 30
		628 654 (37 2458)		108 521 / 45			94 907 / 42
0.06	0.06	492 957 (30 5021)	4 24981	67 423 / 54	30 5021	4 24981	67 523 / 60

Fig. 9 Relation between H_A and N

5. 結 言

本研究では、構造システムの信頼性設計のための費用構造モデルの基礎的研究を行った。その結果、以下の知見および成果が得られた。

- (1) 提案した定式化は最適設計で通常用いられる期待効用の考え方と整理すると、従来から提案されている費用因子と本論文で提案した費用因子のすべてを含めた一般的な形で体系化できることを明確にした。
- (2) 構造システムの耐用期間内の供用中の経済的変動への対策として、物価変動率と資本利率の大きさに応じた期待総費用の年等価格を換算し、構造破損のリスクの考慮あるいは再建の検討を進めるための最適設計問題の定式化を提案した。
- (3) 静定トラス構造体の設計最適化計算の結果、供

用期間の想定と信頼水準による安全性指標の上界値を考慮し初期建設費用を上げることは、供用期間の期待総費用を小さくする効果があることを見出した。

最後に本研究の一部は、平成7年度文部省科学研究費(一般研究C)による経済的援助を受けたことを付記し、謝意を表する。

参 考 文 献

- (1) Moses, F. and Kinser, D. E., *Jour. AIAA*, 5-6 (1967) 1152-1158
- (2) Vanmarcke, E. H., *Computers & Structures*, 3 (1971) 757-770
- (3) Mau, S. T. and Sexsmith, R. G., *Jour. Struct. Div., ASCE*, 98-ST9 (1972) 2043-2058.
- (4) 室津義定, 材料, 31 (1982) 1044-1050.
- (5) 坂和正敏, 経営数理システムの基礎, 森北出版 (1991) 133-180
- (6) Lind, N. C., *Jour. Struct. Div., ASCE*, 102-ST6 (1976) 1177-1195
- (7) Koyama, K., *Proc. JSCE*, 410/I-12 (1989) 187-193
- (8) Cornell, C. A. *ACI Jour.*, 66-12 (1969) 974-985
- (9) 中西真悟・中島秀敏, 機論A, 61-583 (1995) 674-681
- (10) Hasofer, A. M. and Lind, N. C., *Jour. Engng. Mech. Div., ASCE*, 100-EM1 (1972) 111-121.
- (11) 市川昌弘, 機論A, 58-549 (1992) 765-768
- (12) 竹内啓, 数理統計学, 東洋経済 (1963) 335-339
- (13) Nakanishi, S. and Nakayasu, H., *IFIP Transactions*, B-12, (1993) 189-197
- (14) たとえば, Lin, Y. K., (森大吉郎・富田文治共訳), 構造力学の確率論的方法, 培風館, (1972)
- (15) Stevens, S., (大庭謙監訳), オペレーションズ・リサーチの基礎, マグロウヒル好学社, (1974) 40-73
- (16) Rackwitz, R. and Fiessler, B., *Computers & Structures*, 9 (1978) 489-494
- (17) Grgoric, M., *Jour. Engng. Mech. Div., ASCE*, 104-EM4 (1978) 829-844
- (18) 確率強度モデル研究会編, 材料強度の統計的性質, 養賢堂 (1992)
- (19) 市川昌弘, 構造信頼性工学, 海文堂出版 (1988) 33-71
- (20) 星谷勝・石井清, 構造物の構造信頼性法, 鹿島出版会 (1986) 136-160.
- (21) 長尚, 基礎知識としての構造信頼性設計, 山海堂出版 (1993) 143-156.
- (22) 田口玄一, 開発・設計段階の品質工学, 日本規格協会 (1988) 27-52
- (23) 会計ハンドブック, 中央経済社 (1952) 942-956
- (24) 石塚義高, 建築経済学のすすめ, 経済調査会 (1992) 215-284
- (25) 則枝征克, 平成6年度減価償却資産の耐用年数表, (財)納税協会連合会 (1994) 8-29.
- (26) 総務庁統計局編, 日本の統計, 大蔵省印刷局 (1994) 139, 200-201
- (27) 茂木俊秀・福島雅夫, FORTRAN77最適化プログラミング, 岩波書店 (1991) 167-207.