単純支持された対称積層板の座屈荷重に対する信頼性解析*

小木 曾 望^{*1}, 邵 曉 文^{*2}, 室 津 義 定^{*2}Reliability Analysis of Simply Supported Symmetric Laminated Plate
Subject to Buckling Load

Nozomu KOGISO, Shaowen SHAO and Yoshisada MUROTSU

This study is concerned with the structural reliability analysis of a symmetric laminated plate subject to buckling load. The material constants and the orientation angle of each layer as well as applied loads are treated as independent random variables. Since the buckling load is obtained as a minimum eigenvalue through Galerkin's method, buckling failure can be modeled as a series system consisting of eigen modes. When a design point obtained by FORM corresponds to the unsymmetric laminate, another point which corresponds to the reversed laminated sequence is also considered as the design point. The failure probability bounds of this series system are determined by Ditlevsen's bounds. Compared with the reliability obtained from Monte Carlo simulation, the reliability obtained from FORM is shown to be useful for evaluating the reliability of designs qualitatively. Then, a reliability-maximized design is compared to a buckling-load-maximized design.

Key Words: Structural Reliability, Composite Material, Buckling, Galerkin's Method, Laminated Construction, First-Order Reliability Method, FRP, Optimal Design

1 緒論

複合材料は比強度および比剛性が高いことから、軽量化が要求される航空宇宙分野で広く用いられている。軽量化のためには板厚を薄くしなければならず、圧縮荷重を受ける平板では座屈を考慮した設計が必要になる。そのために、座屈荷重を最大化する最適設計の研究が広く行われている^{1,2)}。

しかし、製造方法や工程により、複合材料の特性にはばらつきが生じやすく、実働下では負荷荷重にも変動があるので、これらのばらつきを考慮した設計が望まれる^{1,2)}。破損応力を基準とする場合に対しては、信頼性解析およびそれに基づく最適設計に関する研究がなされている^{3)~8)}。これらの研究から、繊維軸数が多くなるほど信頼性が高く評価されること、そして、強度が最大となる積層構成が合力方向に繊維を配向させた一方向材に近づくのに対して、信頼性最大設計は準等方性積層に近づくことが明らかにされている。しかし、これらの変動が座屈荷重におよぼす影響に関する信頼性解析はなされていない。

本研究では、単純支持された対称バランスト積層板において、負荷荷重、各層の材料定数および繊維配向角が独立な確率的変動を有する場合の座屈荷重に対する信頼性評価を行う。この際、各層の材料定数および配向角の変動のために、対称バランスト条件は満足されなくなり、積層構成は非対称となる。非対称積層板は、面内と曲げのカップリングの存在するために支配方程式が複雑になり、座屈荷重を求めることが困難になる。これを避けるために、本論文では、等価な曲げ剛性(Reduced Bending Stiffness)⁹⁾による近似を用いる。これにより、対称積層板に対する座屈解析と同じ手法であるガレルキン法¹⁰⁾を用いることができる。

負荷荷重と座屈荷重が一致するときを限界状態として、一次近似信頼性手法(FORM: First Order Reliability Method)¹¹⁾によって信頼性を評価する。座屈解析では、座屈荷重倍数が最小固有値として求められる。各固有モードを破損モードとみなせば、そのなかの一つのモードで破損が生ずることと等価である。そこで、各固有モードを破損モードとみなした直列システムとして座屈破損をモデル化する。なお、信頼性解析で得られる設計点の積層構成が非対称となる場合がある。この場合には、積層構成を上下逆にした積層構成が同

* 原稿受付 1996 年 6 月 17 日。

^{*1} 正員、大阪府立大学大学院 (〒593 堺市学園町 1-1)。^{*2} 正員、大阪府立大学工学部。

一の構造特性を持つことから、それに対応する点もまた設計点と考えることができる。この点を考慮して、直列システムとしての破損確率をDitlevsenの上下限値¹⁴⁾を用いて近似する。

次に、このような方法により得られた信頼性をモンテカルロ法で得られた信頼性と比較することで、本手法の妥当性を明らかにする。さらに、数値計算を通して、確率変数の変動が座屈荷重に与える影響を明らかにする。最後に、信頼性指標が最大となる積層構成を求め、確定条件下での座屈荷重最大化設計と比較し、信頼性解析の重要性を明らかにする。

2 積層板の座屈解析

本論文では、積層構成の平均値は対称バランスト積層と限定しているが、各層の材料定数および配向角に変動が生じることによって実際の積層構成は非対称となる。そのために、非対称積層板に対する座屈解析が必要になる。

2.1 対称積層板への近似法 等価な曲げ剛性を用いる近似解析手法(Reduced Bending Stiffness Method)により、非対称積層板の座屈荷重を求める。面内剛性 A 、カップリング剛性 B および曲げ剛性 D をもつ積層板の構成方程式は次式で表わされる:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $\epsilon^0 = (\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \epsilon_{xy}^0)^T$ は中央面での面内ひずみを、 $\kappa = (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})^T$ は中央面での曲率を表す。また、 $N = (N_x, N_y, N_{xy})^T$ は面内合力を、 $M = (M_x, M_y, M_{xy})^T$ はモーメントを表す。式(1)の第1式に A^{-1} を左からかけると、中央面での面内ひずみ ϵ^0 は次式で表すことができる:

$$\epsilon^0 = A^{-1}N - A^{-1}B\kappa$$

これを式(1)の第2式に代入すると、構成方程式を次式のように書きかえることができる:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ (-B^*)^T & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここで、

$$A^* = A^{-1}, \quad B^* = -A^{-1}B, \quad D^* = D - BA^{-1}B$$

積層平板のひずみエネルギーは次式で定義される:

$$U = \frac{1}{2} \iint (\epsilon^{0T} N + \kappa^T M) dx dy \quad (3)$$

これに式(2)を代入すると、次式が得られる:

$$U = \frac{1}{2} \iint (N^T A^* N + \kappa^T D^* \kappa) dx dy \quad (4)$$

Fig. 1 The plate subject to compression and shear loads.

ひずみエネルギーには、カップリング剛性項 B^* が現れない。つまり、カップリングのない対称積層板と同じ形で表すことができる。そこで、カップリング剛性項を $B^* = 0$ とすると、構成関係式(2)は次式のように書くことができる:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (5)$$

カップリング項 B を有する非対称積層板は曲げ剛性 D を等価な曲げ剛性 D^* で置きかえた対称積層板と見なすことができ、これを用いて座屈解析を行う。

2.2 ガレルキン法による座屈解析 対称積層板に対する座屈方程式において、 D_{ij} を D_{ij}^* に置き換えて解析を行うことにより、煩雑な非対称積層板の解析を精度良く近似することができる⁹⁾。

図1に示す長さ a 、幅 b の積層板(アスペクト比 $R = a/b$)が、面内荷重(N_x, N_y, N_{xy})を受けるときの支配方程式は次式で与えられる¹⁰⁾:

$$\begin{aligned} & D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & + 4D_{26}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ & = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (6)$$

周辺単純支持の境界条件に対して、変位 w を次式で仮定する:

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (7)$$

この変位をガレルキン方程式に代入すると、次式が得られる¹⁰⁾:

$$\begin{aligned} & \pi^4 \left[D_{11}^* m^4 + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) m^2 n^2 R^2 + D_{22}^* n^4 R^4 \right. \\ & \quad \left. - N_x \frac{m^2 a^2}{\pi^2} - N_y \frac{n^2 R^2 a^2}{\pi^2} \right] A_{mn} \\ & \quad - 32\pi^2 mnR \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N M_{ij} \left[(m^2 + i^2) D_{16}^* \right. \end{aligned}$$

$$+ (n^2 + j^2) D_{26}^* R^2 + N_{xy} \frac{a^2}{\pi^2} \Big] A_{ij} = 0$$

$$m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N \quad (8)$$

ここで,

$$M_{ij} = \begin{cases} \frac{ij}{(m^2 - i^2)(n^2 - j^2)} & \begin{pmatrix} m + i = \text{odd} \\ n + j = \text{odd} \end{pmatrix} \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (9)$$

これは、未知係数 A_{mn} に対する $M \times N$ 次の齊次方程式となる。この方程式の係数マトリクスの行列式が0のとき、 A_{mn} が0でない解を持つ。そして、それに対応する (N_x, N_y, N_{xy}) の最小の値が座屈荷重である。

固有値問題としてこの方程式を解くために、荷重項と剛性項に分離する:

$$[K - \lambda K_G] \phi = 0 \quad (10)$$

座屈荷重はその最小固有値 ($\lambda_{\min}$) で与えられ、対応する固有ベクトルが座屈モードを表す。 K 、 K_G はそれぞれ剛性マトリクス、幾何剛性マトリクスであり、次式の形で表される:

$$K_{mn} = \pi^4 [D_{11}^* m^4 + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) m^2 n^2 R^2 + D_{22}^* n^4 R^4]$$

$$K_{mn}^{ij} = -32\pi^2 mn R M_{ij} [(m^2 + i^2) D_{16}^* + (n^2 + j^2) D_{26}^* R^2]$$

$$K_{Gmn} = \pi^2 a^2 (m^2 N_x + n^2 R^2 N_y)$$

$$K_{Gmn}^{ij} = 32a^2 mn R M_{ij} N_{xy}$$

添字 m, n, i, j は式(8)の添字に対応する。また、 ϕ は式(7)の係数 A_{mn} を成分としたベクトルである:

$$\phi = \{A_{11}, \dots, A_{1N}, A_{21}, \dots, A_{mN}, \dots, A_{MN}\}^T \quad (11)$$

座屈方程式(10)は、 $m + n$ が奇数の時と、 $m + n$ が偶数の時の二つの場合に分割することができる。したがって、座屈荷重はこれら二つの方程式での最小固有値の小さい方の値となる。

3 信頼性解析

3.1 モデル化 ガレルキン法で得られた最小固有値 λ は、負荷荷重に対する座屈荷重の比を表す。つまり、荷重が $(\lambda N_x, \lambda N_y, \lambda N_{xy})$ に達したときに座屈が起こる。 $\lambda > 1.0$ であれば、現在の負荷荷重では座屈は起こらない。逆に、座屈破損は最小固有値が $\lambda < 1.0$ となった場合に起こる。また、 $\lambda = 1$ のときが限界状態となる。各固有モードを破損モードとみなすと、ひとつの破損モードが生起するとシステムが破損することになる。つまり座屈破損は、各固有モードを破損

モードとした直列システムとしてモデル化できる。固有モードは固有値解析に用いる行列の大きさ ($M \times N$) だけ存在するが、現実的には、座屈荷重である最小固有値と二番目に低い固有値の二つのモードのみを考えることにする。

ガレルキン法では、固有値問題(10)を $m + n = \text{偶数}$ の場合と奇数の場合の二つに分離でき、それぞれの最小固有値を λ_{even} 、 λ_{odd} とすると、その小さい方の値が座屈荷重に対応し、その反対側の固有値が二番目に低い固有値となる。そこで、それぞれの固有値問題で得られる最小固有値に対して信頼性解析を行い、各モードに対する信頼性指標 β_i を求めた後、直列システムとしての破損確率を求める。

この固有値は確率変数に対して非線形関数となるので、信頼性指標は非線形計画法を用いて次式のように定式化できる。

λ_{even} が座屈荷重に対応する場合:

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } & \beta_1 = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \\ \text{Subject to: } & g(\mathbf{u}) = \lambda_{\text{even}}(\mathbf{u}) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

λ_{odd} が座屈荷重に対応する場合:

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } & \beta_2 = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \\ \text{Subject to: } & g(\mathbf{u}) = \lambda_{\text{odd}}(\mathbf{u}) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

本研究では逐次二次計画法¹²⁾を用いて数値探索を行った。また、探索方向を定めるための感度解析は著者らが定式化した手法を用いた¹³⁾。

最適化問題(12)および(13)を解いて得られた各モードの信頼性指標より、標準正規確率分布関数 $\Phi(\cdot)$ を用いて各モードの破損確率を求める:

$$P(E_i) = \Phi(-\beta_i) = \int_{-\infty}^{-\beta_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du \quad (14)$$

3.2 設計点の積層構成 信頼性解析で得られた設計点の示す積層構成が非対称となる場合がある。それを上下逆にした積層構成は、設計点の積層構成と同一の構造特性を持つが、 U 空間上では設計点とは異なった座標にある。しかし、積層構成の平均値が対称積層である場合には、 U 空間上の原点からこの点までの距離は原点から設計点までの距離と等しくなる。したがって、この点もまた設計点とみなすことができる。

そこで、各モードに二つの設計点が存在することを考慮して、4つの破損モードをもつ直列システムとしての破損確率を求める。

3.3 Ditlevsenの上下限值 4つの破損モードからなる直列システムの破損確率を正確に求めることは困難であるので、Ditlevsenの上下限值¹⁴⁾により、

Table 1 Variation of the material constants and the ply angle.

	E_x (GPa)	E_y (GPa)	E_s (GPa)	ν_x	θ (deg)
mean	181.0	10.3	7.17	0.28	—
c.o.v.*	0.05	0.05	0.05	0.05	s.d.† 5°

*: c.o.v.= coefficient of variation.

†: s.d.= standard deviation.

Table 2 Applied load conditions.

(a) Load case 1, aspect ratios 1.0 and 1.5.

		N_x^* (GPa)	N_y^* (GPa)	N_{xy}^* (GPa)
mean value (GPa)		300.0	0.0	0.0
s.d.*	COV = 0.00	0.0	0.0	0.0
	COV = 0.02	6.0	6.0	6.0
	COV = 0.05	15.0	15.0	15.0

*: s.d.= standard deviation.

(b) Load case 2, aspect ratio = 1.0.

		N_x^* (GPa)	N_y^* (GPa)	N_{xy}^* (GPa)
mean value (GPa)		200.0	100.0	0.0
s.d.	COV = 0.00	0.0	0.0	0.0
	COV = 0.05	10.0	5.0	10.0
	COV = 0.10	20.0	10.0	20.0

(c) Load case 3, aspect ratio = 1.5.

		N_x^* (GPa)	N_y^* (GPa)	N_{xy}^* (GPa)
mean value (GPa)		170.0	85.0	0.0
s.d.	COV = 0.00	0.0	0.0	0.0
	COV = 0.05	8.5	4.25	8.5
	COV = 0.10	17.0	8.5	17.0

破損確率を近似する。破損事象を $E_1, \dots, E_4$ とすると、システムの破損確率 $P(E)$ の上下限値は各モードの破損確率 $P(E_i)$ および事象 i と j の同時破損確率 $P(E_i, E_j)$ を用いて次式で表される:

$$P(E) \geq P(E_1) + \sum_{i=2}^4 \max \left[P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_i, E_j), 0 \right]$$

$$P(E) \leq \sum_{i=1}^4 P(E_i) - \sum_{i=2}^4 \max_{j < i} P(E_i, E_j) \quad (15)$$

ここで、 $P(E_i, E_j)$ は二次元標準正規確率分布関数 $\Phi_2(\cdot)$ を用いて求められる:

$$P(E_i, E_j) = \Phi_2(-\beta_i, -\beta_j; \rho_{ij}) \quad (16)$$

ρ_{ij} は事象 E_i と E_j の相関係数であり、原点から設計点へのベクトルのなす角の余弦で与えられる。

4 数値計算例

アスペクト比1.0および1.5の単純支持された8層アングルプライ積層平板 $([(+ \theta / - \theta)_2]_s)$ に対して信頼性解析を行った。材料はT300/5208とし、各層の材料定数および配向角は正規分布にしたがうと仮定する。その平均値および変動係数を表1に示す。

荷重条件として、i) 単軸圧縮を受ける場合(ケース1)、およびii) 二軸圧縮荷重($N_y/N_x = 0.5$)を受ける場

Fig. 2 Reliability of symmetric and unsymmetric models.

合(ケース2, 3)の3つの荷重ケースを考える。なお、負荷荷重は、次式のように板厚 h および寸法 $(a \times b)$ 、アスペクト比 $R = a/b$ に関して規準化して表す¹⁾。

$$N^* = \frac{12a^2}{\pi^2 h^3 R^2} N$$

規準化した負荷荷重は (N_x, N_y, N_{xy}) の各成分が独立な正規分布にしたがうと仮定する。平均値は、それぞれの荷重ケースでの確定的な最大座屈荷重の8割程度を目安として設定した。荷重の変動として、表2に示すような3種類の変動を考える。

なお、座屈解析において、式(7)の級数の最大値は、収束性を考慮して、 $M = N = 10$ と設定した。この場合、 $m + n$ = 偶数および奇数のどちらの場合も、行列は 50×50 の大きさとなる。

4.1 非対称積層を考慮する必要性 積層構成が非対称になることを考慮する必要があることを示すために、上下対応するプライの確率変数を完全相関とした場合の信頼性指標と比較した。単軸圧縮荷重を受けるアスペクト比1.0の積層板で(ケース1)、荷重の変動がない場合(COV=0.00)のそれぞれの信頼性指標を図2に示す。横軸は配向角、縦軸は信頼性指標を表している。上下完全相関の場合を β_{sym} 、全てのプライを考慮した場合を β_{un} で表している。この図より、上下完全相関、つまり対称積層の場合は信頼性指標が過大評価されることがわかる。

4.2 設計点 $\theta = 45^\circ$ において支配的なモード $m + n$ = 偶数の設計点の座標およびそれに対応する材料定数および配向角を表3に示す。設計点の積層構成は対称積層から隔たった非対称積層構成になっていることがわかる。また、設計点の座標から、外側プライの繊維方向のヤング率 E_x および各層の繊維配向角 θ が信頼性に対して支配的な要因であることがわかる。

荷重の変動がある場合(COV=0.05)の $\theta = 45^\circ$ において支配的なモード $m + n$ = 偶数の設計点の代表的な座標成分を表4に示す。荷重の変動が信頼性に大きな影響をおよぼすことがわかる。また、荷重の変動がない場合と同様に、外側プライの繊維方向のヤング率 E_x および配向角 θ が支配的な要因となる。ここには示していないが、その他の座標成分は $10^{-4} \sim 10^{-2}$ のオーダーとなっている。

Table 3 Coordinate of design point.

(a) Coordinate in U space, $\beta_1 = 4.230$.					
Ply	U_{E_x}	U_{E_y}	U_{E_z}	U_{ν_x}	U_θ
Upper4	-0.444	-8.14E-2	-5.74E-2	-8.31E-3	2.488
Upper3	-0.536	-3.22E-2	-3.61E-2	-4.41E-3	1.162
Upper2	-0.101	-1.56E-2	-4.11E-2	-1.32E-3	0.928
Upper1	-3.01E-2	-1.59E-3	-3.96E-2	-2.57E-4	0.180
Lower1	-3.00E-2	-1.59E-3	-3.96E-2	-2.54E-4	-0.179
Lower2	-0.101	-1.56E-2	-4.11E-2	-1.32E-3	-0.930
Lower3	-0.536	-3.22E-2	-3.61E-2	-4.38E-3	-1.152
Lower4	-0.443	-8.13E-2	-5.77E-2	-8.34E-3	-2.493

(b) Laminate configuration.

Ply	E_x (GPa)	E_y (GPa)	E_s (GPa)	ν_x	θ (deg)
Upper4	176.98	10.26	7.149	0.280	57.44
Upper3	176.15	10.28	7.157	0.280	-50.81
Upper2	180.09	10.29	7.155	0.280	49.64
Upper1	180.73	10.30	7.156	0.280	-45.90
Lower1	180.73	10.30	7.156	0.280	-44.10
Lower2	180.09	10.29	7.155	0.280	40.35
Lower3	176.15	10.28	7.157	0.280	-39.24
Lower4	176.99	10.26	7.149	0.280	32.54

Table 4 Design point in case of $COV=0.05$, $\beta_1 = 2.907$.

Ply	U_{E_x}	U_θ	U_{load}		
Upper4	-0.436	-0.776	U_{N_x}	1.744	
Upper3	-0.409	-0.298	U_{N_y}	1.743	
Upper2	-8.41E-2	-0.280	$U_{N_{xy}}$	0.303	
Upper1	-2.17E-2	-4.91E-2			
Lower1	-2.16E-2	4.97E-2			
Lower2	-8.41E-2	0.279			
Lower3	-0.409	-0.308			
Lower4	-0.436	-0.773			

4.3 直列システム信頼性 単一座屈モードのみを考慮した場合と複数の座屈モードの直列システムとしてモデル化した場合を比較する。単軸圧縮荷重を受けるアスペクト比1.5の積層板で(ケース1), 荷重の変動がない($COV=0.00$) 場合の信頼性指標を図3に示す。破線は各座屈モードの信頼性指標(β_1, β_2)を表し、実線はDitlevsenの上限值(β_U)を表す。信頼性指標の値が最大となる配向角は $\theta = 43^\circ$ で同じであるが、 $39^\circ \leq \theta \leq 53^\circ$ にわたって違いが現れている。確定的な解析では、 $\theta = 42^\circ$ で座屈荷重は最大となり、かつ座屈モードが変化する。この付近で、両座屈モードに対する信頼性指標の値が近くなるために、直列システムとしての信頼性指標の値は座屈モードを考慮しない場合の値よりも小さくなっていく。しかし、片方の座屈モードが支配的になる領域では直列システムと単一のモードの違いはほとんどない。この例では、設計点の積層構成がほぼ対称であるために、破損確率が2つの限界状態関数でほぼ定まる。そのため、上下限値の差はほとんどない。

4.4 モンテカルロ法との比較 本手法で求めた信頼性が妥当であることを示すために、モンテカルロ法で求めた信頼性との比較を行った。単軸圧縮荷重を受けるアスペクト比1.0および1.5の積層板(ケース1)

Fig. 3 Reliability upper bound of the series system (β_U) and reliability of each single failure mode. (a) Load case 1, $COV=0.05$, aspect ratio = 1.0. (b) Load case 1, $COV=0.05$, aspect ratio = 1.5.

Fig. 4 Reliability index in comparison with Monte Carlo simulation.

で、荷重の変動を考慮した場合($COV=0.05$)の結果を図4に示す。モンテカルロ法の計算回数は 1×10^5 回であり、推定変動係数は表5に示すように0.6 ~ 3.7%の範囲にあり、FORM法との比較のためには十分な精度を有している。信頼性指標に対する不偏分散を図4では縦棒で表している。

モンテカルロ法の結果と比較すると、FORM法で得られた結果はいずれも信頼性を過大評価していることがわかる。しかし、配向角に対する信頼性の変化の様子はよく一致している。このことから、破損確率を正確に求めるためにはFORM法による一次近似では

Table 5 Estimated coefficient of variation of the failure probability in Monte Carlo simulation.

(a) Aspect ratio = 1.0.						
Ply angle (deg)	30	35	40	45	50	55
Cov (%)	0.71	1.43	2.56	3.21	2.56	1.36

(b) Aspect ratio = 1.5.						
Ply angle (deg)	35	40	45	47	50	55
Cov (%)	0.60	1.34	3.46	3.70	2.49	0.74

Fig. 5 Contour plot of the buckling load.

十分ではないが、信頼性を最大化する配向角を求めるなど、異なった設計間での信頼性の比較のためには十分である。

FORM法で求めた信頼性とモンテカルロ法で求めた信頼性が大きく異なるのは、限界状態関数の線形化における誤差が原因であり、特に配向角に関する非線形性の影響が大きい。座屈荷重は曲げ剛性によって支配され、外側プライの影響が大きいことが知られている¹⁰⁾。配向角の変動が座屈荷重におよぼす影響を調べるために、最外層の配向角のみを変化させたときの座屈荷重の変化を確定的な解析により調べた。単軸圧縮荷重を受けるアスペクト比1.0の $[(+35^\circ/-35^\circ)_2]_s$ 積層板(ケース1)において、最外層の配向角のみを $\pm 10^\circ$ 変化させたときの座屈荷重の等高線図を図5に示す。縦軸が上側第4層、横軸が下側第4層の配向角であり、傾き 45° の直線上では対称積層、その他の領域は非対称積層となる。この図より、U空間における限界状態関数は原点に対して凹な曲線になることが予測される。したがって、設計点による限界状態関数の一次近似では破損確率を実際の値よりも過小評価することになる。

4.5 確定的座屈荷重最大化設計との比較 荷重ケース1における信頼性指標および確定的な座屈荷重倍数 λ の値を図6に示す。アスペクト比1.0の場合は、 45° で座屈荷重が最大となり、そのときの座屈モードは $m+n=$ 偶数モードである。信頼性が最大となる積層構成も 45° で一致しているが、荷重の変動が大きく

(a) Aspect ratio = 1.0.

(b) Aspect ratio = 1.5.

Fig. 6 Reliability index and the buckling load under the uniaxial compression load (Case 1).

なるにつれて、その付近での信頼性指標の変化は少なくなり、一定になる傾向がある。一方、アスペクト比1.5の場合は、座屈荷重が最大となる配向角と信頼性が最大となる配向角が異なっている。この場合、座屈荷重は2つの座屈荷重曲線が交差する $m+n=$ 偶数モードと $m+n=$ 奇数モードの固有値が一致する 42.2° で最大となっている。しかし、信頼性指標が最大となる積層構成は、荷重の変動が大きくなるにつれて、配向角が大きい方に移行し、COV=0.05での信頼性指標は 48° で最大となる。

また、荷重ケース2, 3における信頼性指標および確定的な座屈荷重倍数を図7に示す。アスペクト比1.0(ケース2)の場合は、荷重ケース1と同様、 $m+n=$ 偶数モードで座屈荷重が最大となり、信頼性指標も 45° で最大となる。一方、アスペクト比1.5(ケース3)の場合は、座屈荷重は $m+n=$ 偶数モードと $m+n=$ 奇数モードの固有値が一致する 63.4° で最大となる。しかし、信頼性指標が最大となる積層構成は、荷重の変動が大きくなるにつれて、配向角が小さい方に移行し、COV=0.10での信頼性指標は 60° で最大となる。

確定的な座屈荷重最大化設計が単一の座屈モードで達成される場合は、その設計で信頼性が最大になるのに対し、確定的な座屈荷重最大化設計として、複数の座屈モードが一致する設計が選ばれる場合は、その設計は信頼性が最大となる設計とは異なっている。これはおもに配向角と荷重の変動によるものである。配向

(a) Load case 2, aspect ratio = 1.0.

(b) Load case 3, aspect ratio = 1.5.

Fig. 7 Reliability index and the buckling load under the biaxial compression load (Cases 2 and 3).

角についてはすでに図 7 (b) に示したように、 $COV=0.00$ 曲線 (荷重の変動なし、配向角に変動あり) の最大点は、確定的な座屈荷重曲線の最大点から勾配が緩やかな方向にずれている。すなわち、配向角の変動によって、信頼性が最大となる積層構成は座屈荷重の最大値からの減少が少ない方向に移行する。

次に、荷重の変動による影響について、荷重比に対する座屈荷重の変化を示す。アスペクト比 1.0 の場合、どちらの荷重ケースでも 45° で座屈荷重、信頼性ともに最大となる。 $\theta = 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$ 積層板における、荷重比 $N_y/N_x = 0.0$ および $N_y/N_x = 0.5$ まわりでの荷重比 N_y/N_x と座屈荷重との関係を図 8 に示す。荷重比に関わらず 45° で座屈荷重が最大となっている。そのため、荷重の変動によらず、信頼性も 45° で最大となる。

一方、2つの座屈モードが一致したときに座屈荷重が最大となるアスペクト比 1.5 の場合は異なった傾向を示す。 $\theta = 40^\circ, 42.2^\circ, 45^\circ, 48^\circ$ 積層板における、荷重比 $N_y/N_x = 0.0$ まわりでの荷重比 N_y/N_x と座屈荷重との関係を図 9 (a) に示す。 $N_y/N_x = 0$ では $\theta = 42.2^\circ$ で座屈荷重が最大となり、荷重比の変化に対しても座屈モードが変化している。座屈モードの変化に伴い、 N_y/N_x が増加すると、 42.2° での座屈荷重が急激に減少するのに対して、 $45^\circ, 48^\circ$ の座屈荷重は緩やかに減少し、やがてこれらの配向角の座屈荷重の方が大きくなる。また、荷重比が減少した領域では 40° の座屈荷重が高くなるけれど、荷重比が増加すると急激に減

(a) Around $N_y/N_x = 0.0$. (b) Around $N_y/N_x = 0.5$.Fig. 8 Variation of the buckling load with respect to the load ratio N_y/N_x , aspect ratio = 1.

少する。そのために、信頼性が最大となる積層構成は座屈荷重最大化設計とは異なり、配向角が大きい方に移行する (図 6 参照)。

また、 $N_y/N_x = 0.5$ まわりでの $\theta = 55^\circ, 60^\circ, 63.4^\circ, 65^\circ$ 積層板の荷重比 N_y/N_x と座屈荷重との関係を図 9 (b) に示す。 $N_y/N_x = 0.5$ では 63.4° で座屈荷重が最大となり、荷重比に対しても座屈モードが変化する。そのため、荷重比が減少すると、座屈モードの変化に伴い、 60° の座屈荷重が大きくなる。逆に、荷重比が増加すると 65° の方が座屈荷重が大きくなるが、荷重比が増加した領域での配向角間の座屈荷重の違いはわずかである。荷重比が減少した領域では、 60° の座屈荷重は 63.4° と比べてはるかに大きくなっている。そのために、信頼性指標が最大となる配向角は座屈荷重最大化設計と異なり、 60° 付近となる (図 7 参照)。

これらの計算結果より、次のことが結論される。

確定的な座屈最大化設計が単独の座屈モードで達成される場合は、配向角の変化に対して座屈荷重の変化が緩やかであり、また、荷重比が変化しても座屈荷重が最大となる配向角は同一である。そのために、確定的な座屈荷重最大化設計と信頼性最大化設計は一致している。

一方、確定的な座屈荷重最大化設計として複数の座屈モードが一致する設計が選ばれる場合は、配向角および荷重比の変化に対して座屈荷重は急激に変化し、座屈荷重が最大となる積層構成も変化する。したがっ

(a) Around $N_y/N_x = 0.0$. (b) Around $N_y/N_x = 0.5$.Fig. 9 Variation of the buckling load with respect to the load ratio N_y/N_x , aspect ratio = 1.5.

て、座屈荷重が最大となる積層構成であっても、信頼性が低くなる。逆に、ある荷重条件では座屈荷重が最大ではない積層構成であっても、荷重比の変化による座屈荷重の変化が緩やかであれば、座屈荷重の変動は小さく、信頼性は高くなる。

5 結論

単純支持された対称積層板で、複数の固有モードからなる直列システムとして座屈破損をモデル化し、各層の材料定数および配向角の変動を考慮した場合の信頼性解析を行い、数値計算を通して以下のことを明らかにした。

- (1) 材料定数および配向角の変動によって積層構成が非対称になることを考慮した解析が必要である。
- (2) 外側プライの繊維方向のヤング率 E_x および配向角 θ 、そして荷重の変動が信頼性に大きく影響する。
- (3) モンテカルロ法と比較すると、FORM法では信頼性を過大評価する。しかし、信頼性最大化設計などに必要な積層構成の違いに対する複合材料の信頼性の相対的評価には十分有用である。
- (4) 確定的な座屈荷重最大化設計が単一の座屈モードで達成される場合、その設計は信頼性最大化設計と一致する。

- (5) 複数の座屈モードが一致する積層構成が座屈荷重最大となる場合、荷重や配向角の変動によって座屈荷重が急激に変化するために、信頼性最大化設計とは一致しない。逆に、座屈荷重が最大でない積層構成であっても、荷重比の変化による座屈荷重の変化が緩やかな積層構成が信頼性最大化設計として選ばれる。

参考文献

- 1) 日本機械学会 編, 構造・材料の最適設計, (1989), 技報堂出版。
- 2) Haftka, R. T., and Gürdal, Z., *Elements of Structural Optimization*, Third revised and expanded edition, (1992), Kluwer Academic Publishers.
- 3) M. Miki, Y. Murotsu, T. Tanaka, and S. Shao, "Reliability of Unidirectional Fibrous Composites", *AIAA Journal*, **28**, (1990), 1980.
- 4) M. Miki, Y. Murotsu, and T. Tanaka, "Optimum Fiber Angle of Unidirectional Composites for Load with Variations", *AIAA Journal*, **30**, (1992), 189.
- 5) S. Shao, M. Miki, and Y. Murotsu, "Optimum Fiber Orientation Angle of Multiaxially Laminated Composites Based on Reliability", *AIAA Journal*, **31**, (1993), 919.
- 6) M. Miki, Y. Murotsu, and N. Murayama, "Application of Lamination Parameters to the Reliability-Based Stiffness Design of Fibrous Laminated Composites", *AIAA Journal*, **31**, (1993), 1938.
- 7) Y. Murotsu, M. Miki, and S. Shao, "Reliability Design of Fiber Reinforced Composites", *Structural Safety*, **15**, (1994), 35.
- 8) 室津, "信頼性から見た複合材料の評価", *材料*, **45-5**, (1996), 588.
- 9) Ashton, J. E., "Approximate Solutions for Unsymmetrically Laminated Plates", *J. Composite Materials*, **3**, (1969), 189.
- 10) Whitney, J. M., *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, (1987), Technomic.
- 11) Thoft-Christensen, P., Baker, M. J., 室津 監訳, 構造信頼性 理論と応用, (1986), シュプリンガー・フェアラーク東京。
- 12) 茨木, 福島, **FORTRAN77 最適化プログラミング**, (1991), 岩波書店。
- 13) 小木曾, 邵, 室津, "単純支持された対称積層板の座屈荷重に対する感度解析", *機論*, **62-595, A** (1996), 246.
- 14) Ditlevsen, O., "Narrow Reliability Bounds for Structural Systems", *J. Struct. Mech.*, **7**, (1979), 453.