固有値問題の凸包モデルによる区間有限要素法*

中 桐 滋^{*1}, 鈴木 敬 子^{*1}Interval Estimation of Eigenvalue Problem Based on
Finite Element Sensitivity Analysis and Convex Model

Shigeru NAKAGIRI and Keiko SUZUKI

A formulation is presented for interval analysis of eigenvalue problems on the basis of the finite element sensitivity analysis and the representation of uncertainties involved in a structural system by a convex model. The first-order approximation is employed to express the response change due to the uncertainties that are assumed to be confined in a convex hull by means of the sensitivity analysis. The maximum and minimum of responses, by which the interval is bracketed, are searched on the convex boundary by the Lagrange multiplier method. The validity of the present formulation is demonstrated by a numerical example of the axial buckling load of an elastic straight column in the case of uncertain Young's modulus.

Key Words: Finite Element Method, Sensitivity Analysis, Interval, Convex Hull, Eigenvalue Problem

1 緒 言

不確かな構造パラメータの存在がある領域内に局限されている場合を想定する。このとき、構造パラメータに対応して構造応答もある領域内で不確定に変動する。着目する構造応答の代数的な最大値と最小値の間を区間と呼ぶ。不確かな応答を表現する一つの指標として、これまでは標準偏差が用いられている。標準偏差に加えて、区間もまたパラメータの応答変動に及ぼす影響を定量的に評価する指標の一つとして用いることができる。計算の品質保証の一助として、数値の丸めの誤差により計算結果に生じる区間が区間計算法により解析されている⁽¹⁾。有限要素法に区間計算法を採用した研究として、不確かな縦弾性係数により構造の変形に生じる区間⁽²⁾、また所定の区間内に軸受特性が入っているときのローターの動的挙動の区間⁽³⁾の推定があげられる。これらの区間計算による区間推定では、剛性行列の各成分の変動について独立に区間計算が用いられているので、推定結果は保守的に過ぎ、剛性方程式を満たさない応答をも含むことがある。

パラメータ変動に対して着目応答の区間を適正に推定する

ためには、応答の決定方程式を満たす条件の下で応答の最大値および最小値を探索しなければならない。本稿では、パラメータの存在領域が後述の2次凸包であると想定できる場合について、固有値の区間を推定する定式を有限要素法による構造解析と感度解析に基づいて構成し、縦弾性係数が不確かな柱の弾性圧縮座屈荷重の数値計算例によりその妥当性を検証する。本稿では丸めの誤差による区間を取り扱わない。

2 問題の設定

本研究では、 M 個の独立で連続なパラメータ p_m が不確定に変動するが、その上限と下限は既知であるとする。また、パラメータ p_m を代表する値として公称値、たとえばサンプル平均値、中位数、上限など、が特定されているとする。このとき、パラメータの公称値近傍の不確定変動が無次元の不確定変数 ε_m により一般性を失うことなく式 (1) で表わされるとする。パラメータ公称値に対して不確定変数は $\varepsilon_m = 0$ とする。以後、上付きの棒記号は公称値を示す。

$$p_m = \bar{p}_m(1 + \varepsilon_m), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

また、不確定変数はその境界を含めて1個の凸包内のみに存在するものとし、凸包内での不確定変数の確率分布は不問と

* 原稿受付 1996年7月22日。

*1 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

する。凸包とは、その境界上の任意の2点を結ぶ線分上の点全てがその領域内にある閉領域である。

着目する構造応答は不確かなパラメータに依存するが、有界かつ連続で上記のパラメータに関して微分可能であるとする。このとき、設定された凸包に対応する着目応答の区間をなるべく狭く、すなわち着目応答の最大値と最小値がその決定方程式を満たしているように推定するのが本研究の問題である。数値計算例においては、不確かなパラメータには縦弾性係数を取り、着目応答には柱の圧縮座屈荷重を取る。

3 座屈固有値問題とその感度解析

有限要素法において真直な柱の圧縮弾性座屈の固有値問題は $[K]$ を剛性行列、 $[H]$ を幾何学的剛性行列として式(2)により表わされる⁽⁴⁾。

$$([K] - \lambda[H])\{\phi\} = \{0\} \quad (2)$$

ここで、1要素の剛性行列は1節点での軸方向変位、たわみ w 、たわみ角 θ の3成分に対応して棒要素と梁要素の剛性行列を重ねた6行6列の行列である。一方、1要素の幾何学的剛性行列の非零部分 $[h]$ は4行4列で、要素長を l 、単位圧縮荷重を P (圧縮を正にとる) として式(3)で与えられる。このとき、式(2)の固有値 λ は λP が座屈荷重となる無次元の負荷倍数である。

$$[h] = \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 6/5 & l/10 & -6/5 & l/10 \\ & 2l^2/15 & -l/10 & -l^2/30 \\ & & 6/5 & -l/10 \\ sym. & & & 2l^2/15 \end{bmatrix} \quad (3)$$

柱の幾何学的境界条件の処理後も $[H]$ は特異であるので $\rho = 1/\lambda$ の置換を行い、式(2)を式(4)に書き換える。

$$([H] - \rho[K])\{\phi\} = \{0\} \quad (4)$$

以後、 ρ を固有値逆数と呼ぶ。固有値逆数についての感度解析を基に座屈固有値の縦弾性係数に関する変動を推定する。式(1)により表わされる縦弾性係数変動の影響を受けるのは $[K]$ のみであり、 $[K]$ の公称値近傍の変動を ε_m に関して式(5)と一次近似する。

$$[K] = [\bar{K}] + \sum_{m=1}^M [K_m^I] \varepsilon_m \quad (5)$$

ただし、変動しても $[K]$ は常に非特異であるとする。 $[H]$ は縦弾性係数変動の影響を受けない。固有値逆数 ρ の公称値近傍の変動も ε_m に関して式(6)と一次近似する。添字 m と肩符 I は m 番目の不確定変数に関する一次変動率を示す。

$$\rho = \bar{\rho} + \sum_{m=1}^M \rho_m^I \varepsilon_m = \bar{\rho} + \{\varepsilon\}^T \{S\} \quad (6)$$

$\{\varepsilon\}$ は不確定変数 ε_m を成分、 $\{S\}$ は ρ の一次変動率 ρ_m^I を成分とするベクトルである。肩符 T は行列の転置を示す。固有ベクトル $\{\phi\}$ の変動にも式(7)の一次近似を用い、それ等を式(4)に代入して、 ε_m について摂動法を適用すると、 ρ および $\{\phi\}$ の公称値と一次変動率の決定方程式が式(8)および(9)と得られる。

$$\{\phi\} = \{\bar{\phi}\} + \sum_{m=1}^M \{\phi_m^I\} \varepsilon_m \quad (7)$$

$$([H] - \bar{\rho}[\bar{K}])\{\bar{\phi}\} = \{0\} \quad (8)$$

$$([H] - \bar{\rho}[\bar{K}])\{\phi_m\} = (\rho_m^I[\bar{K}] + \bar{\rho}[K_m^I])\{\bar{\phi}\} \quad (9)$$

ρ の一次変動率は $[K_m^I]$ と $\{\bar{\phi}\}$ より式(10)で定められる⁽⁵⁾。

$$\rho_m^I = -\bar{\rho}\{\bar{\phi}\}^T[K_m^I]\{\bar{\phi}\}/\{\bar{\phi}\}^T[\bar{K}]\{\bar{\phi}\} \quad (10)$$

このように定められた一次変動率を用いると式(6)の固有値逆数一次近似は変形された固有値問題、式(4)、を一次近似の枠内で満たす。式(6)の一次近似式は ε_m の凸関数である。

4 不確かさの凸包モデルによる表現

M 個の不確定変数の存在領域を表わす M 次元空間の凸包には種々の形がある。側方条件のように不確定変数 ε_m の存在領域が J 個の線形不等式で表わされている場合には、凸包境界は J 個の超平面であり、凸包は多面プリズムとなる。一方、不確定変数のユークリッドノルムを制限するように存在領域を設定するときには凸包境界は1個の超球面であり、凸包は超球となる。本研究では、パラメータ公称値にはパラメータのサンプル平均値をとり、不確定変数の存在領域を設定する凸包は式(11)に示す ε_m に関する二次不等式で表わし、以後これを二次凸包と呼ぶ。

$$c^2\{\varepsilon\}^T[\Omega]\{\varepsilon\} - 1 \leq 0 \quad (11)$$

ここで、 c は凸包の拡がり定める定数、 $[\Omega]$ は凸包の形を定める行列であり、対称とする。式(11)の二次不等式で表された領域が凸包であるためには、 $[\Omega]$ は正定値でなければならない⁽⁶⁾。このとき、式(11)の凸包は一般的には超楕円で、その図心はパラメータのサンプル平均値に対応する ε_m 空間の座標原点である。

5 凸包モデルによる区間推定の定式

凸包内に在る変数の単調な凸関数は凸包境界上で最大、最小となる⁽⁷⁾。固有値逆数とその公称値の近傍で不確定変数の凸関数であるか否かは一般的には不明である。しかし、式(6)の一次近似は凸関数であるので、不確定変数の変動が凸包内に留まるとき、固有値逆数一次近似の最大と最小の探索を凸

包境界上に限ることができる。凸包境界上での探索は、凸包境界を表示する式が等式制約条件となるので、探索を以下のようにラグランジュ乗数法により行う⁽⁶⁾。ラグランジュ乗数を μ とし式 (12) の汎関数 Π を構成する。

$$\Pi = \{\varepsilon\}^T \{S\} + \mu(c^2 \{\varepsilon\}^T [\Omega] \{\varepsilon\} - 1) \quad (12)$$

未知数 $\{\varepsilon\}$ と μ に関する汎関数 Π の停留条件から未知数の決定方程式が非線形連立方程式 (13) および (14) として得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\varepsilon\}^T = \{S\} + 2\mu c^2 [\Omega] \{\varepsilon\} = \{0\} \quad (13)$$

$$\partial \Pi / \partial \mu = c^2 \{\varepsilon\}^T [\Omega] \{\varepsilon\} - 1 = 0 \quad (14)$$

この非線形方程式を解くため、式 (15) として補助ベクトル $\{q\}$ を定める。

$$\{q\} = [\Omega]^{-1} \{S\} \quad (15)$$

この演算は想定凸包について $[\Omega]$ は正定値であるので常に可能である。式 (13) に基づいて Π を停留させる不確定変数 $\{\varepsilon^*\}$ が未知数 μ を含む形の式 (16) と求められる。

$$\{\varepsilon^*\} = -\{q\} / 2\mu c^2 \quad (16)$$

式 (16) の結果を不確定変数の等式制約条件式 (14) に代入すると μ の値が式 (17) として定められる。

$$\mu = \pm \sqrt{\{q\}^T [\Omega] \{q\}} / 2c \quad (17)$$

この μ を式 (16) に代入すると $\{\varepsilon^*\}$ が式 (18) と定められる。

$$\{\varepsilon^*\} = \mp \{q\} / c \sqrt{\{q\}^T [\Omega] \{q\}} \quad (18)$$

このように得られた $\{\varepsilon^*\}$ は、一次近似の枠内で固有値逆数の最大および最小を式 (12) の汎関数 Π の停留条件で推定するとき、最大または最小を与える不確定変数である。以後、この不確定変数 $\{\varepsilon^*\}$ を最大値点または最小値点と呼び、星印により示す。区間を表す応答の最大、最小値は最大、最小値点により構造パラメータを変更した後に構造再解析で算出する。式 (17) の複号のいずれかが着目応答の最大または最小に対応するかは事例による。式 (11) の二次凸包の場合には、式 (15) は最大値点または最小値点のモードが着目応答の一次変動率ベクトル $\{S\}$ のモードに支配されることを、また式 (18) は $\{\varepsilon^*\}$ が定数 c に反比例することを意味している。

本定式では、応答変動の一次近似を表わす超平面とパラメータの存在限界を表わす超楕円の接点として最大、最小値点を求め、それ等に対応するパラメータ公称値を固有値問題に代入して固有値の最大、最小値を算出する。したがって、本定式により推定された固有値の区間は一次近似の枠内で固有値問題を満たしており、その意味で最も狭い区間推定となる。

6 座屈荷重の数値シミュレーション

本章では、区間推定の前段として縦弾性係数の変動に対する座屈固有値の変動の様相を数値シミュレーションにより調べる。

Fig.1 Elastic, straight column under compressive loading

図1は数値計算で取扱う両端単純支持で無偏心圧縮荷重を受ける真直ぐな一様断面の弾性長柱を示す。材料の縦弾性係数の平均値を 210 GPa 、柱の全長を 1 m 、断面は円形でその直径を 0.03 m とする。着目応答は1次座屈荷重とする。平均値の縦弾性係数に対する着目応答の解析解は 82.41 kN である。有限要素分割には全て等長の要素を用いる。分割数は、座屈荷重の有限要素解が解析解 82.41 kN と一致する16要素を基本とする。

いま、他の諸量は確定的であるとして、縦弾性係数のみが柱の軸方向に沿って空間的に不確かであるとする。ただし、1要素内では縦弾性係数は一様であると仮定して、1要素に1個の不確定変数を割り付ける。要素分割は16個であるが、柱の左半8個の不確定変数は互いに相等しく、また右半8個の不確定変数も互いに相等しい状況を仮想する。この状況について、独立な不確定変数を2個として1次座屈荷重のシミュレーションを有限要素解析で行う。本例では、凸包は半径が 0.14142 の円であるとして、式 (11) の正定値対称行列 $[\Omega]$ を単位行列、定数を $c^2 = 50$ とする。

Fig.2 236 samples of two uncertainty variables inside a convex hull

図2は、凸包内での一様分布を目標として発生させた乱数から定めた236個の不確定変数サンプルを白四角で示す。これ等は破線でその境界を示す上記の凸包内に在り、 ε_1 と ε_2 のサンプル平均値はそれぞれ 4.1×10^{-3} 、 2.8×10^{-3} で、サン

ル標準偏差はそれぞれ 6.8×10^{-2} , 7.3×10^{-2} である。図中の黒丸は5章で述べた定式により同じ凸包について推定された座屈固有値の最小値点と最大値点である。

Fig.3 Occurrence frequency of buckling load due to uncertain Young's modulus

図3は、図2の不確定変数サンプルから算出された座屈荷重サンプルの頻度分布を示す。この座屈荷重サンプルの最小値と最大値は $[74.82, 90.36] \text{ kN}$ (以後、区間を $[]$ で表わす)、サンプル平均値は 82.41 kN 、サンプル標準偏差は $\sigma = 3.86 \text{ kN}$ である。また、本定式で推定した最小、最大値点から求めた座屈荷重の最小、最大値は $[74.17, 90.65] \text{ kN}$ であり、図3に破線で示す。この感度解析に基づいて推定された区間はサンプル・シミュレーションによる区間を内包している。ただし、サンプルによる発生頻度をヒストグラムで示す図3では、ヒストグラムの横軸が 1 kN の幅を持つので、両側の破線はヒストグラムの内側に表示されている。図中の一点鎖線は236サンプルの座屈荷重平均値、点線は 1σ ー限界 (236サンプルの平均値に標準偏差を加減した値) を示す。以上の検討により、2変数に関する本例は応答の一次近似が有効な場合であり、また有効な場合には本定式による区間の推定は妥当であることが判る。

7 柱の圧縮座屈荷重の区間推定

6章の検討により定式の妥当性が確かめられたので、本章では6章と同じ柱と着目応答について一次近似の精度および不確定変数の個数が座屈荷重の推定区間に及ぼす影響を調べる。

7.1 一次近似の精度の検討 構造パラメータの不確かさが同一であれば、対応する構造応答の不確かさも同じである。これは不確定変数の存在領域を表す同一の凸包については、推定された区間が同一となり、パラメータ公称値の取り方に依存しないことを意味している。一方、式(18)の最大、最小値点はパラメータのサンプル平均値を公称値として構成された凸包の境界上で応答一次近似に基づいて探索されたものである。このサンプル平均値で定めたパラメータ公称値を初期公称値と呼ぶ。パラメータの公称値が異なれば応答の公

称値と式(10)の一次変動率も異なるので、応答一次近似が変わる。式(18)の最大、最小値点に対応する値にパラメータ公称値を変えて、この新しい、サンプル平均値とは異なる、公称値について再び固有値解析と固有値感度解析を行い、その結果に基づいて区間推定を更に行うと式(18)により新たな最大、最小値点が同じ凸包境界上で得られる。以後、この過程を公称値更新と呼ぶ。推定された応答区間が応答一次近似に依存して変化するとき、その一次近似の精度は十分ではない。公称値更新を行っても、同一凸包で最大、最小値点が不動になれば、その一次近似は区間推定に関して十分な精度を有すると言える。

Fig.4 Convergence of estimated interval with renewal

図4は、公称値更新による座屈荷重の最大値と最小値の変化を示す。本例は16要素分割に対して16個の不確定変数を用いた一次座屈荷重の区間推定である。図中の点線はパラメータ初期公称値による座屈荷重の公称値を示す。公称値更新により最大、最小値点は凸包境界上を移動する。その結果、本例では座屈荷重最大値と最小値は共に低下している。本図では公称値更新は2回で最大、最小値点が不動となり、推定区間は収束したと見なせる。座屈荷重の最大、最小値の低下率は初期座屈荷重に対して2%以下と小さい。このように不確定変数の個数がやや多数の場合でも小さい想定凸包に関する座屈荷重の区間推定について応答一次近似は有効と考えられる。

7.2 不確定変数の個数の影響 要素に不確定変数を割付けるモデルによりパラメータの不確かさを表現する本定式では、物理的には同じ不確かさを要素離散化により個数の異なる不確定変数で表わすことにもなる。したがって、推定区間の不確定変数の個数に関する不変性を検討する必要がある。表1に、凸包が超球の場合について8, 16, 32, 64個の要素分割、したがって同数の不確定変数により推定された1次、2次、3次座屈荷重の区間とそれぞれの次数について座屈荷重公称値の解析解を列記する。本表は公称値更新をしていない計算結果である。本表作成においては、縦弾性係数の不確か

さを不確定変数の個数に拘わらずに一定とするため、単独の不確定変数の変動振幅を個数 M によらずに R で一定とする。

Table 1. Intervals estimated by different number of uncertainty variables (unit : kN)

elem.	1st	2nd	3rd
8	[73.49, 93.81]	[294.86, 374.16]	[667.28, 839.50]
16	[73.43, 93.88]	[293.95, 375.22]	[662.22, 843.16]
32	[73.42, 93.90]	[293.75, 375.54]	[661.12, 844.66]
64	[73.42, 93.91]	[293.70, 375.62]	[660.85, 845.07]
nominal	82.41	329.64	741.67

この数値計算例では、凸包は超球であるとして式 (19) により振幅 R を定める。

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \varepsilon_m^2 = R^2 \quad (19)$$

本式と式 (11) の比較により超球の次元数 M に対して定数 c は式 (20) と定められる。本数値計算例では振幅を $R = 0.1$ としている。

$$c^2 = \frac{1}{MR^2} \quad (20)$$

本表の結果では、推定区間は不確定変数の個数に殆ど依存せず、1 次座屈荷重については 3 2 個以上の不確定変数で推定区間はほぼ一定と見なせることが判る。

表 2 には、用いた要素分割数とそのときに求められた 1 次座屈荷重の公称値および区間半幅の関係を示す。

Table 2. Nominal values and radii of the first buckling load estimated by different number of uncertainty variables (unit : kN)

elem.	nominal value	radius
8	82.42	10.160
16	82.41	10.220
32	82.41	10.240
64	82.41	10.245

本表より公称値は 1 6 要素以上ではほぼ一定となっているが、区間半幅は 1 6 要素分割では収束していないことが分かる。したがって、座屈荷重の推定区間は公称値より要素数に関する収束は遅い傾向にあると言える。また、表 1 の 6 4 要素分割の場合、区間半幅の公称値に対する比は座屈次数、1 次、2 次、3 次についてそれぞれ、0.12432, 0.12426, 0.12429 となり、座屈次数による差異は見られない。しかし、区間半幅の公称値に対する比の値、約 0.124, は不確定変数の振幅 0.1 に対して拡大している。

8 結 論

固有値の区間を推定する定式を不確定変数の存在領域が二次凸包の場合について有限要素感度解析と Lagrange 乗数法により構成し、定式の妥当性を縦弾性係数の不確かさが超球内に局限される場合の真直柱の圧縮座屈荷重に関する数値計算例により示した。

その結果によれば、凸包が小さい場合は応答の一次近似による本定式は適切に区間を推定できること、充分な個数の要素を用いれば 1 要素に 1 個の不確定変数を割り付ける要素分割でも推定された区間はほぼ一定であること、また不確かな縦弾性係数の区間に対して座屈荷重の区間は拡大していることが判った。

参考文献

- (1) Alefeld, G. and Herzberger, J., Introduction to Interval Computations, Academic Press, 1983.
- (2) Koyluoglu, H. U., Cakmak, A. S. and Nielsen, S. R. K., Interval Algebra to Deal with Pattern Loading and Structural Uncertainties, Proc. ASCE, Vol.121, No.EM11 (1995), pp.1149-1158.
- (3) Dimarogonas, A. D., Interval Analysis of Vibrating Systems, Journal of Sound and Vibration, Vol.183, No.4 (1995), pp.739-749.
- (4) シェムニスキー, J.S. 著, 山田嘉昭・川井忠彦共訳; マトリックス構造解析の基礎理論, 培風館, 1971.
- (5) Fox, R. L. and Kapoor, M. P., Rate of Change of Eigenvalues and Eigenvectors, AIAA J., Vol.6, No.12 (1968), pp.2426-2429.
- (6) Ben-Haim, Y. and Elishakoff, I., Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics, Elsevier, 1990.
- (7) 布川 昊・中川弘隆・谷野哲三, 線形代数と凸解析, コロナ社, 1991.