異材接合端における応力強さからの応力特異性の消失条件*
(第2報, 3相異材接合体の場合)

井 上 忠 信*

Disappearance Conditions of Stress Singularity Based
on Stress Intensity in Dissimilar Materials
(2nd Report, In Case of Three-Phase Bonded Structure)

Tadanobu INOUE

In this paper, characteristics of the stress intensity K in a three-phase bonded structure subjected to a uniform temperature change are studied theoretically. Material combinations with wedge angles and mechanical properties (Young's modulus, Poisson's ratio and thermal expansion coefficient), in which K becomes zero, are shown on the k_{12} (stiffness ratio)– φ_1 (wedge angle of material 1) plane against the thermal expansion coefficients. Also, distribution forms for K are the same as those in the case of a two-phase bonded structure. Then, the distribution forms for K in the case of the three-phase structure strongly depend on the thermal expansion coefficients of each material. Moreover, the relationship yielding $K=0$ between the stiffness ratio and the wedge angle, classification of the distribution patterns for K and disappearance conditions of the stress singularity are shown on the k_{12} – φ_1 plane.

Key Words: Thermal Stress, Stress Intensity Factor, Elasticity, Composite Material, Stress Singularity, Stress Distribution

1. 緒 言

著者は、既報⁽¹⁾において一様な温度変化 ΔT を受ける3相異材接合体(図1参照)の接合端近傍における応力場を、弾性論に基づいて導出した。この接合端における応力場は、界面と自由表面上における応力と変位の境界条件から導かれる特性方程式の j 番目の根 p_j (ここで、変位の連続性から $Re(p_j)>0$ の範囲に存在)に対して、 r^{p-1} 型および $\log r$ 型の特異解、特異性消失解、そして特解の一次結合によって表される。

r^{p-1} 型の特異性($0 < Re(p_j) < 1$)、特異性消失($Re(p_j) > 1$)の場合

$$\sigma_h(r, \theta) / \frac{E_\delta \alpha_\delta \Delta T}{1 + \nu_\delta} = \sum_{j=1}^n K_{hj} \rho^{p_j-1} + K_{hpa} \quad \dots\dots (1)$$

$\log r$ 型の特異性の場合($p \rightarrow 1$)

$$\sigma_h(r, \theta) / \frac{E_\delta \alpha_\delta \Delta T}{1 + \nu_\delta} = K_{hg} \log \rho + K_{hg}' \quad \dots\dots (2)$$

ここで、 $h=rr, r\theta, \theta\theta$ であり、 $\delta(=1, 2, 3)$ は各領域を、そし

て ρ は接合端部からの距離 r を一様な温度変化 ΔT を受ける距離 a で除した無次元距離である(但し、 $r \ll a$)。また、 K_{hj} , K_{hpa} , K_{hg} , K_{hg}' (無次元数)は各解の応力強さである。式(1), (2)から、材料の端部角度と弾性定数の組み合わせに対して、根 p_j が $Re(p_j) > 1$ の時あるいは応力強さ

Fig. 1 Model of three-phase bonded structure subjected to a uniform temperature change

* 1996年9月22日 第74期全国大会講演会において講演、原稿受付 1996年5月2日。

*1 正員、京都大学工学部 (〒606 01 京都市左京区吉田本町)。

$K_{h_j}=0(K_{h_g}=0)$ の時、応力特異性は消失する。よって、応力特異性の消失条件を考える場合、根と応力強さの両方からのアプローチによって検討することが必要となる。根 p_j からの特異性消失条件は、これまで多くの研究者によって行われ、明らかにされている^{(2)~(6)}。また、応力強さから応力特異性を消失させる方法は著者によって提案され、その消失条件が2相異材接合体に対して検討された^{(7),(8)}。そして、 $K_{h_j}=0(K_{h_g}=0)$ とする材料の端部角度と弾性定数の関係が k_{12} (材料1と2の剛性比)— φ_1 (材料1の端部角度)平面上および $\varphi_1+\varphi_2$ (材料1と2の端部角度の合計)— φ_1 平面上に示された。これらの平面は、 p_j と $K_{h_j}(K_{h_g})$ の両方からのアプローチによる応力特異性の消失条件と応力強さの分布の形態および大きさを同時に明示する。さらに、前報⁽⁹⁾では各材料のポアソン比が $K_{h_j}=0(K_{h_g}=0)$ の条件に与える影響について示された。

本論文では、図1に示した一様な温度変化 ΔT を受ける3相異材接合体に対して、応力強さからの特異性消失条件と強さの分布の形態を検討する。そして、3相以上の多相接合体の場合、2相接合体の場合に比べてパラメータの数が増えるので複雑となり、 $K_{h_j}=0(K_{h_g}=0)$ の条件は2相接合体とは異なり、線膨張係数に依存することを示す。また、2相接合体において根 p_j に対する応力強さ K_{h_j} の分布は単に符号が異なる2種類の分布形(K_{h_1} はStyle1とStyle2、 K_{h_2} はStyle3とStyle4)によって分けられた⁽⁸⁾が、3相接合体の場合も2相接合体の場合と同様に K_{h_j} はStyle1~Style4によって表される。さらに、2相接合体の場合、強さの分布形は各材料の線膨張係数に依存しない⁽⁸⁾が、3相以上の多相接合体の場合、線膨張係数はそれらに大きく影響を及ぼすことを示す。そして、3相異材接合体における $K_{h_1}=0$ の条件と K_{h_1} の分布の分類が k_{12} — φ_1 平面上に示される。

2. 接合端部の熱応力の理論解

異材接合体の熱応力は式(1),(2)によって表され、応力場の理論解の誘導に関しては、既報⁽¹⁾で詳細に報告しているので、ここでは以後の検討に必要な結果のみを示す。

3相接合体の場合、特性方程式の根 p_j に対する応力強さ K_{h_j} はMellin変換したAiryの応力関数を用いることによって、次式のように表される(ここで、 $\delta(=1, 2, 3)$ は各領域を示す)。

$$\begin{aligned} K_{m_j}(p_j, \theta) \Big|_0 &= \left[\frac{d^2}{d\theta^2} + (p_j + 1) \right] K_{F_j}(p_j, \theta) \Big|_0 \\ K_{r_{\theta j}}(p_j, \theta) \Big|_0 &= p_j \frac{d}{d\theta} K_{F_j}(p_j, \theta) \Big|_0 \quad \dots\dots (3) \\ K_{\theta\theta j}(p_j, \theta) \Big|_0 &= -p_j (p_j + 1) K_{F_j}(p_j, \theta) \Big|_0 \end{aligned}$$

関数 K_{F_j} は、以下によって与えられる。

$$\begin{aligned} K_{F_j}(p_j, \theta) \Big|_0 &= \left(n_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - n_2 \right) \bar{K}_{F_{jM}}(p_j, \theta) \Big|_0 + \left(n_2 - n_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right) \bar{K}_{F_{jN}}(p_j, \theta) \Big|_0 \\ &= \frac{1}{p_j(p_j - 1)^{\frac{d}{2\delta}} S \Big|_{p=p_j}} \left\{ \left(n_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - n_2 \right) M(p_j, \theta) \Big|_0 \right. \\ &\quad \left. + \left(n_2 - n_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right) N(p_j, \theta) \Big|_0 \right\} \quad \dots\dots\dots (4) \\ M(p_j, \theta) \Big|_0 &= -M_{a\delta}(p_j) \sin[(p+1)\theta] + M_{b\delta}(p_j) \cos[(p+1)\theta] \\ &\quad - M_{c\delta}(p_j) \sin[(p-1)\theta] + M_{d\delta}(p_j) \cos[(p-1)\theta] \\ N(p_j, \theta) \Big|_0 &= -N_{a\delta}(p_j) \sin[(p+1)\theta] + N_{b\delta}(p_j) \cos[(p+1)\theta] \\ &\quad - N_{c\delta}(p_j) \sin[(p-1)\theta] + N_{d\delta}(p_j) \cos[(p-1)\theta] \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここで、 $M_{a\delta} \sim M_{d\delta}$ および $N_{a\delta} \sim N_{d\delta}$ は端部角度、材料定数(ヤング率、ポアソン比)そして特性方程式の根を変数に持つ関数であり、 $n_1 \sim n_3$ は以下によって定義される。

$$n_\delta = \begin{cases} 1 + \nu_\delta & \text{for plane strain} \\ 1 & \text{for plane stress} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6)$$

また、式(4)の S は3相異材接合体の特性方程式であり、次式によって表される⁽¹⁰⁾。なお、下添字は各領域に対応している。

$$\begin{aligned} S(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \alpha_{12}, \beta_{12}, \alpha_{23}, \beta_{23}; p) &= \\ &A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \alpha_{12}, \beta_{12}, \alpha_{23}, \beta_{23}; p) \\ &+ B(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \alpha_{12}, \beta_{12}, \alpha_{23}, \beta_{23}; p) \quad \dots\dots (7) \\ &+ C(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \alpha_{12}, \beta_{12}, \alpha_{23}, \beta_{23}; p) \\ &+ D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; p) = 0 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \alpha_{12} &= \frac{k_{12}m_2 - m_1}{k_{12}m_2 + m_1}, \quad \beta_{12} = \frac{k_{12}(m_2 - 2) - (m_1 - 2)}{k_{12}m_2 + m_1} \quad \dots (8) \\ \alpha_{23} &= \frac{k_{23}m_3 - m_2}{k_{23}m_3 + m_2}, \quad \beta_{23} = \frac{k_{23}(m_3 - 2) - (m_2 - 2)}{k_{23}m_3 + m_2} \end{aligned} \right. \\ k_{12} &= \frac{G_1}{G_2}, \quad k_{23} = \frac{G_2}{G_3} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$m_\delta = \begin{cases} 4(1 - \nu_\delta) & \text{for plane strain} \\ 4 & \text{for plane stress} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(3)~(5)において、2相異材接合体の場合($n_2 - n_3(\alpha_3/\alpha_2) = 0$)により、8個の関数 $M_{a\delta}, M_{b\delta}, M_{c\delta}, M_{d\delta}(\delta=1, 2)$ が全て0の時 $K_{F_j}=0$ となり、これにより各応力成分の強さ K_{h_j} は全ての領域に対して(角度 θ に依らず)0となった⁽⁸⁾。しかし、3相異材接合体の場合、式(4)の K_{F_j} が0となるための条件(式(5)の24個の関数 $M_{a\delta}, M_{b\delta}, M_{c\delta}, M_{d\delta}, N_{a\delta}, N_{b\delta}, N_{c\delta}, N_{d\delta}(\delta=1, 2, 3)$ が全て0になる材料の端部角度と弾性定数の組合せ)はほとんどありえない。すなわち、3相接合体において応

力強さ K_{h_j} を0とする条件を求めるためには、2相接合体のように線膨張係数に依存しない関数を全て0とする条件からの検討ではなく、これと違う関数から $K_{h_j}=0$ の条件を求める必要がある。各応力成分の強さ K_{h_j} を0とするためには、強さのパラメータ K_{F_j} が0となればよい。式(4)からわかるように、このパラメータ K_{F_j} は材料1と2の線膨張係数 α_1, α_2 による項と材料2と3のそれら α_2, α_3 による項の和によって表される。この式(4)を、角度 θ に対して整理すると K_{F_j} は次式のように書くことができる。

$$K_{F_j}(p_j, \theta) \Big|_0 = \frac{1}{p_j(p_j-1) \frac{d}{dp} S \Big|_{p=p_j}} \{ K_{F_{ja\delta}}(p_j) \sin[(p+1)\theta] + K_{F_{jb\delta}}(p_j) \cos[(p+1)\theta] + K_{F_{jc\delta}}(p_j) \sin[(p-1)\theta] + K_{F_{jd\delta}}(p_j) \cos[(p-1)\theta] \} \quad (11)$$

ここで、 $K_{F_{ja\delta}} \sim K_{F_{jd\delta}}$ は式(4), (5)から、次式によって与えられる。

(a) Functions K_{F1a1} , K_{F1b1} , K_{F1c1} and K_{F1d1} for material 1

(b) Functions K_{F1a2} , K_{F1b2} , K_{F1c2} and K_{F1d2} for material 2

(c) Functions K_{F1a3} , K_{F1b3} , K_{F1c3} and K_{F1d3} for material 3

Fig. 2 Variations of twelve functions $K_{F1a1}(p_1) \sim K_{F1d3}(p_1)$ against wedge angle φ_1 of material 1 in three-phase bonded structure under thermal loading, where $\varphi_1 + \varphi_2 = 170^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$, $k_{12} = k_{23} = 2$, $\alpha_1/\alpha_2 = 0.1$ and $\alpha_3/\alpha_2 = 2$

$$\begin{aligned} K_{F_{ja\delta}}(p_j) &= -\left(n_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - n_2\right) M_{a\delta} - \left(n_2 - n_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) N_{a\delta} \\ K_{F_{jb\delta}}(p_j) &= \left(n_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - n_2\right) M_{b\delta} + \left(n_2 - n_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) N_{b\delta} \\ K_{F_{jc\delta}}(p_j) &= -\left(n_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - n_2\right) M_{c\delta} - \left(n_2 - n_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) N_{c\delta} \\ K_{F_{jd\delta}}(p_j) &= \left(n_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - n_2\right) M_{d\delta} + \left(n_2 - n_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) N_{d\delta} \end{aligned} \quad (12)$$

これにより、 $K_{F_j}=0$ とする関数の数は12個となり、これらの関数 $K_{F_{ja\delta}}=K_{F_{jb\delta}}=K_{F_{jc\delta}}=K_{F_{jd\delta}}=0$ の時、各応力成分の強さ K_{h_j} は全ての領域に対して(角度 θ に依らず)0となる。図2は、一様な温度変化 ΔT を与えた3相異材接合体($\varphi_1 + \varphi_2 = 170^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$, $k_{12} = k_{23} = 2$, $\alpha_1/\alpha_2 = 0.1$, $\alpha_3/\alpha_2 = 2$)の場合に対して、端部角度 φ_1 に対する根 p_1 の関数 $K_{F1a\delta}$, $K_{F1b\delta}$, $K_{F1c\delta}$, $K_{F1d\delta}$ の変化を示す。これらの図から、 $K_{F1a\delta}(p_1) \sim K_{F1d\delta}(p_1)$ の全ての関数が $\varphi_1 = 10.32^\circ$, 68.09° で0となるのがわかる。よって、それらの接合端部角度($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$) = (10.32, 159.68, 30), (68.09, 101.91, 30)で角度 θ に拘わらず、特性方程式の最小の根 p_1 に対する応力強さ K_{h1} は0となる。

3. 理論解析と結果の検討

本解析では、3相異材接合体の接合端の応力場に最も影響を及ぼす特性方程式の最小の根 p_1 に対する応力強さ K_{h1} の特性について検討する。解析条件は、平面ひずみ状態でを行い、一様な温度場から ΔT 冷却させた3相異材接合体(図3参照)を考える。

3.1 $K_{h1}=0$ となる端部形状と材料定数の関係 ここでは、根 p_1 の応力強さ K_{h1} が0となる材料の端部角度と弾性定数の関係について検討する。また、各材料の弾性定数は図3に示した通りであり、材料1と2の5通りの線膨張係数比 $\alpha_1/\alpha_2 = 0.1, 0.5, 0.8, 2, 10$ に対して、 $K_{h1}=0$ とする剛性比 k_{12} と材料1の端部角度 φ_1 の関係について検討する。また、本解析では材料3の端部角度 φ_3 を一定として考え、接合端部形状は材料1と2の端部角度 φ_1, φ_2 が変化

Fig. 3 Model of three-phase bonded structure under cooling

する。

図4, 5は, 材料2と3の線膨張係数比 $\alpha_3/\alpha_2=2, 0.1$ のそれぞれの場合において, 剛性比 k_{12} に対して $K_{h1}=0$ となる端部角度 φ_1 を示したものである。これらの図から, $K_{h1}=0$ となる条件は各材料の線膨張係数($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$)に大きく依

(a) In case of $\varphi_3=10^\circ$ ($\varphi_1+\varphi_2=190^\circ$)

(b) In case of $\varphi_3=30^\circ$ ($\varphi_1+\varphi_2=170^\circ$)

Fig. 4 Relationship yielding $K_{h1}=0$ between stiffness ratio k_{12} and wedge angle φ_1 of material 1, where $\alpha_3/\alpha_2=2$ and α_1/α_2 variable

(a) In case of $\varphi_3=10^\circ$ ($\varphi_1+\varphi_2=190^\circ$)

(b) In case of $\varphi_3=30^\circ$ ($\varphi_1+\varphi_2=170^\circ$)

Fig. 5 Relationship yielding $K_{h1}=0$ between stiffness ratio k_{12} and wedge angle φ_1 of material 1, where $\alpha_3/\alpha_2=0.1$ and α_1/α_2 variable

存していることがわかる。特に, 材料1が材料2に比べて軟らかくなるにつれ($k_{12} \rightarrow 0$), $K_{h1}=0$ の条件に対して線膨張係数の影響が大きくなり, それが硬くなるにつれ($k_{12} \rightarrow \infty$), それらの影響は小さくなる。既報⁽⁸⁾の結果から, 2相接合体の場合 $K_{h1}=0$ とする端部形状は $k_{12}=\text{const.}$ に対して1つだけであったが, 3相接合体の場合, 線膨張係数によって1つ或いは2つ存在する(例えば図4(a)の $\alpha_1/\alpha_2=0.1, 0.5, 0.8$ の時など)。また, 各図とも k_{12} が大きくなると $K_{h1}=0$ の条件が存在しなくなる。これは, 2相接合体の時と同様に, k_{12} が大きくなると $K_{h1}=0$ を満たすと思われる φ_1 の近傍において, 根 p_1 が複素数 $p=\xi \pm i\eta$ になるためである。これと同様に, k_{12} が小さくなることで複素根 $p=\xi \pm i\eta$ が生じて $K_{h1}=0$ の条件がなくなる(図4(a)の $\alpha_1/\alpha_2=0.1$, 図5(a)の $\alpha_1/\alpha_2=2, 10$, (b)の $\alpha_1/\alpha_2=10$)。但し, 実根のまま $K_{h1}=0$ の条件が消失する場合もある(図4(b)の $\alpha_1/\alpha_2=0.5$, 図5(a)の $\alpha_1/\alpha_2=0.5, 0.8$, (b)の $\alpha_1/\alpha_2=0.5$)。また, 線膨張係数や材料3の端部角度に拘わらず, $K_{h1}=0$ の条件に対して, 端部角度 φ_1 は材料1が軟らかくなるにつれ($k_{12} \rightarrow 0$)大きく, 硬くなるにつれ($k_{12} \rightarrow \infty$)小さくなる。また, ポアソン比が同じ2相接合体の場合⁽⁸⁾, 硬い材料の端部角度が軟らかい材料のそれに比べて小さい時に $K_{h1}=0$ の条件が存在していたが, 3相接合体の場合には線膨張係数や材料3の端部角度 φ_3 によって必ずしもそのような傾向になっていないのがわかる。特に, 図4(a)の $\alpha_1/\alpha_2=0.8$ の時, 材料1が材料2に比べて軟らかい時でも常に $\varphi_1 < \varphi_2$ の範囲に2つの $K_{h1}=0$ の条件が存在する。

3.2 応力強さ K_{h1} の分布の分類 既報⁽⁸⁾において, 2相接合体の場合, 応力強さの分布は $K_{h1}=0$, $p_j \rightarrow 1$ として $K_{h1}=0$ の延長線上にある複素根の領域を境に変化し, K_{h1} の場合Style1とStyle2, K_{h2} の場合Style3とStyle4にそれぞれ分けられることを示した。また, この時 K_{h1} の分布の形は線膨張係数に依存しないことを明らかにした。3相接合体の場合, 応力強さ K_{h1} は式(3)~(5)で表されることから, その分布は関数 K_{F1} によって決定される。この関数 K_{F1} は, 式(4)から2つの項に分けられる。よって, 3相接合体の K_{h1} の分布形を考える場合, まず式(4)における線膨張係数に依存しない第1項の強さのパラメータ $\bar{K}_{F1M}$ と第2項のそれ $\bar{K}_{F1N}$ の分布形を把握する必要がある。そして, それらの分布を理解した後に, 線膨張係数を含んだ因子をそれぞれのパラメータに乗じて, それらの和から K_{F1} が決定され, そして応力強さ K_{h1} の分布形が決まる。

図6は, $\varphi_1+\varphi_2=190^\circ$, $\varphi_3=10^\circ$, $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.3$, $k_{23}=2$ の条件の下, $k_{12}=0.002$, 2の2通りの場合において端部角度 φ_1 に対する最小の根 p_1 の変化を示す。この図より, $k_{12}=0.002$ の時 $\varphi_1=15.14^\circ, 56.74^\circ$ で根 p_1 は重根 $p_1 \rightarrow 1$ となり, 応力場には $\log r$ 型の特異性が発生する。さらに, 根 p_1 は $140.93^\circ \leq$

$\varphi_1 \leq 175.26^\circ$ の範囲で複素根 $p = \text{Re}(p) \pm i\text{Im}(p) = \xi \pm i\eta$ となる(図中では実部 ξ のみが示してある). よって, これらの端部角度を境として $\bar{K}_{F1M}$ と $\bar{K}_{F1N}$ の分布形が変化することが

Fig. 6 Variation of a root p_1 with wedge angle φ_1 , where $\varphi_1 + \varphi_2 = 190^\circ$, $\varphi_3 = 10^\circ$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$ and $k_{23} = 2$

Fig. 7 Distribution of parameters of intensity for root p_1 , where $k_{12} = 0.002$

予想できる. また, $k_{12} = 2$ の時根 p_1 は φ_1 の変化に対して重根とならないことから, $\bar{K}_{F1M} = 0$ 或いは $\bar{K}_{F1N} = 0$ となる端部形状が存在すれば, その条件を境として $\bar{K}_{F1M}$ や $\bar{K}_{F1N}$ の分布形が変化する. 図7は, 上述の解析条件の下, $k_{12} = 0.002$ の場合に対して $\varphi_1 = 10^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 100^\circ, 180^\circ$ の時の根 p_1 に対する強さのパラメータ $\bar{K}_{F1M}$ および $\bar{K}_{F1N}$ の分布を, 図8は $k_{12} = 2$ の場合に対して $\varphi_1 = 40^\circ, 150^\circ$ の時のそれらの分布を示したものである. これらの図の B_{12} および B_{23} は材料1と2および材料2と3の接界面を, CL (全くさび角度 $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ の半分の位置) は $\gamma = 0^\circ$ の条件である(図3参照). 図7から, 2つのパラメータ $\bar{K}_{F1M}$, $\bar{K}_{F1N}$ の分布形は *Style1* と *Style2* によって表されているのがわかる(式(3), (4)から, 関数 K_{Fj} の分布の形は円周方向の応力強さ $K_{\theta\theta}$ の分布形を指す. これにより, $\bar{K}_{F1M}$ と $\bar{K}_{F1N}$ の分布形も $K_{\theta\theta}$ のそれを指すことから, 図7, 8に示した分布は *Style1*, *Style2* として記述できる). なお, *Style1* および *Style2* の分布とは $\gamma = 0^\circ$ 近傍で $K_{\theta\theta}$ の最大および最小を持つ分布形を指したものであり, 詳細については文献(8)参照. $k_{12} = 0.002$ の場合(図7), 材料1と2の線膨張係数の項におけるパラメータ $\bar{K}_{F1M}$ は, $\varphi_1 = 10^\circ, 100^\circ$ の時 *Style1*, $\varphi_1 = 30^\circ, 50^\circ, 180^\circ$ の時 *Style2* の分布形を示し, 材料2と3の線膨張係数の項におけるそれ $\bar{K}_{F1N}$ は $\varphi_1 = 30^\circ, 50^\circ$ の時 *Style1*, $\varphi_1 = 10^\circ, 100^\circ, 180^\circ$ の時 *Style2* の分布形を示す. 図6から, $\varphi_1 = 15.14^\circ, 56.74^\circ$ で重根 $p_1 \rightarrow 1$ が発生していることにより, その端部角度を境にして $\bar{K}_{F1M}$ と $\bar{K}_{F1N}$ の分布が *Style1* $\leftrightarrow$ *Style2* に変化する. 図7(a)~(d)から, どちらのパラメータも重根 $p_1 \rightarrow 1$ が生じる端部角度を挟んだ $\varphi_1 = 10^\circ \sim 30^\circ, 50^\circ \sim 100^\circ$ で分布が *Style1* から *Style2* 或いは *Style2* から *Style1* に変化しているのがわかる. また,

Fig. 8 Distribution of parameters of intensity for root p_1 , where $k_{12} = 2$

$\bar{K}_{F1M}$ の分布は $\varphi_1=100^\circ$ の時 Style1, $\varphi_1=180^\circ$ の時 Style2 によって表される(図7(d),(e)). これは, $\varphi_1=100^\circ\sim 180^\circ$ の範囲に $\bar{K}_{F1M}$ の分布形を変化させる境 $\bar{K}_{F1M}=0$ に関連した複素根の領域(図6から $140.93^\circ \leq \varphi_1 \leq 175.26^\circ$ の範囲に複素根が発生)が存在しているからである. なお, $\bar{K}_{F1N}$ は $\varphi_1=100^\circ, 180^\circ$ のどちらの場合も Style2 によって表される. また, $k_{12}=2$ の場合(図8), $\bar{K}_{F1M}$ の分布は $\varphi_1=40^\circ$ の時 Style1, $\varphi_1=150^\circ$ の時 Style2 によって表され, $\bar{K}_{F1N}$ は $\varphi_1=40^\circ, 150^\circ$ のどちらの場合も Style2 によって表される. よって, $\varphi_1=40^\circ\sim 150^\circ$ の範囲に複素根や重根が存在しないことから, その範囲に $\bar{K}_{F1M}$ を0とする端部角度が存在する. 図9は, 剛性比 k_{12} に対して $\bar{K}_{F1M}=0$ となる端部角度 φ_1 とその時の根 p_1 の変化を示したものである. この図から, $\bar{K}_{F1M}=0$ を満たす φ_1 は $0.04 \leq k_{12} \leq 30$ の範囲に存在し, その時の根 p_1 は $k_{12}=1$ の時最大($p_1=0.8568$)となり, $k_{12}=0.04$ の時最小($p_1=0.7513$)となる.

ところで, 式(3)に示した各応力成分の強さ K_{h_j} は, 以下のように表される.

$$\begin{aligned} K_{h_j}(p_j, \theta) \Big|_0 &= K_{h1M}(p_j, \theta) \Big|_0 + K_{h1N}(p_j, \theta) \Big|_0 \\ &= \left(n_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - n_2 \right) \bar{K}_{h1M}(p_j, \theta) \Big|_0 \\ &\quad + \left(n_2 - n_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right) \bar{K}_{h1N}(p_j, \theta) \Big|_0 \quad (h=rr, r\theta, \theta\theta) \end{aligned} \quad (13)$$

上式の $\bar{K}_{h1M}$ は式(4)の $\bar{K}_{F1M}$ に, $\bar{K}_{h1N}$ は $\bar{K}_{F1N}$ に対応する関数である. すなわち, 図9で示した $\bar{K}_{F1M}=0$ の条件は $\bar{K}_{h1M}=0$ の条件を意味する. これにより, 根 p_1 の線膨張係数に依存しない強さのパラメータ $\bar{K}_{h1M}$ と $\bar{K}_{h1N}$ の分布は図10のように分類できる. すなわち, これらの分布は $\bar{K}_{h1M}=0$ ($\bar{K}_{h1N}=0$), $\bar{K}_{h1M}=0$ ($\bar{K}_{h1N}=0$) の延長線上にある複素根 $p=\xi \pm i\eta$ の領域, そして重根 $p_1 \rightarrow 1$ を境に変化する. 但し, 本解析においては $\bar{K}_{h1N}=0$ の条件は存在しなかったため, $\bar{K}_{h1N}$ の分布は $p_1 \rightarrow 1$ のみを境として変化する. な

Fig. 9 Relationship of wedge angle φ_1 yielding $\bar{K}_{h1M}=0$ and the corresponding root p_1 against stiffness ratio k_{12}

(a) Classification of distribution patterns for $\bar{K}_{h1M}$

(b) Classification of distribution patterns for $\bar{K}_{h1N}$

Fig. 10 Classification of distribution patterns for $\bar{K}_{h1M}$ and $\bar{K}_{h1N}$ on the k_{12} — φ_1 plane, where $\varphi_1+\varphi_2=190^\circ$, $\varphi_3=10^\circ$, $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.3$ and $k_{23}=2$

お, 2相接合体の時と同様に, $p=\xi \pm i\eta$ になる条件に近づけば近づくほど, $\bar{K}_{h1M}$ および $\bar{K}_{h1N}$ の分布形は Style1, 2 に比べて異なっていく. また, 図10に示した領域において根 p_1 は $p_1 \rightarrow 1$ で囲まれた領域以外で応力特異性を示す範囲 $0 < \text{Re}(p) < 1$ に存在する. ここで, $\bar{K}_{h1M}$ および $\bar{K}_{h1N}$ は $\bar{K}_{h1M}=0$ および $\bar{K}_{h1N}=0$ (本結果では存在しない) の条件近傍で小さく, $p_1 \rightarrow 1$ および $p=\xi \pm i\eta$ の条件近傍で大きくなる. また, 図11は同様な解析条件 ($\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=200^\circ$, $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.3$, $k_{23}=2$) の下, $\varphi_1=30^\circ$ の場合における $\bar{K}_{h1M}$ と $\bar{K}_{h1N}$ の分布の分類を示す.

式(13)に示されたように, 各応力成分に対する強さ K_{h1} の分布は線膨張係数比 ($\alpha_1/\alpha_2, \alpha_3/\alpha_2$) とポアソン比に依存した関数 n_θ の因子と強さのパラメータ ($\bar{K}_{h1M}, \bar{K}_{h1N}$) によって決定される. すなわち, $(n_1(\alpha_1/\alpha_2)-n_2), (n_2-n_3(\alpha_3/\alpha_2))$ が正なのか負なのか, $\bar{K}_{h1M}, \bar{K}_{h1N}$ の分布が Style1 なのか Style2 なのかによって, K_{h1} の分布は付録1に基づいて分類される. また, ここでは示していないが2番目の根 p_2 に対する応力強さ K_{h2} も2相接合体の時と同様な分布形

(a) Classification of distribution patterns for $\bar{K}_{h1M}$ (b) Classification of distribution patterns for $\bar{K}_{h1N}$ Fig. 11 Classification of distribution patterns for $\bar{K}_{h1M}$ and $\bar{K}_{h1N}$ on the k_{12} — φ_1 plane, where $\varphi_1 + \varphi_2 = 170^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$ and $k_{23} = 2$ (a) In case of $\alpha_3/\alpha_2 = 2$ (b) In case of $\alpha_3/\alpha_2 = 0.1$ Fig. 12 Classification of distribution patterns for intensity K_{h1} on the k_{12} — φ_1 plane, where $\varphi_1 + \varphi_2 = 190^\circ$, $\varphi_3 = 10^\circ$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$, $k_{23} = 2$ and $\alpha_1/\alpha_2 = 2$ (a) In case of $\alpha_3/\alpha_2 = 2$ (b) In case of $\alpha_3/\alpha_2 = 0.1$ Fig. 13 Classification of distribution patterns for intensity K_{h1} on the k_{12} — φ_1 plane, where $\varphi_1 + \varphi_2 = 170^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$, $k_{23} = 2$ and $\alpha_1/\alpha_2 = 2$

(Style3とStyle4)を持ち、付録1に対してStyle1をStyle3に、Style2をStyle4に変換すれば K_{h2} の分布の早見表となる。

以上の結果をまとめることにより、特性方程式の最小の根 p_1 の応力強さ K_{h1} の分布は図4, 5, 10, 11そして付録1から、図12, 13のように分類される。ここで、図12は $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 200^\circ$ において $\varphi_3 = 10^\circ$ の、図13は $\varphi_3 = 30^\circ$ の場合である（この時の線膨張係数比 α_1/α_2 , α_3/α_2 に対する $K_{h1} = 0$ の

条件は、図4, 5参照）。但し、ここでは材料1と2の線膨張係数比 $\alpha_1/\alpha_2 = 2$ としたが、その他の線膨張係数比 α_1/α_2 に対する応力強さ K_{h1} の分布の分類も図4, 5, 10, 11そして付録1から理解できる。また、図12, 13に示されているStyle 1 or 2やStyle 2 or 1の表記は $(n_1(\alpha_1/\alpha_2) - n_2)$, $(n_2 - n_3(\alpha_3/\alpha_2))$ の正負や $\bar{K}_{h1M}$, $\bar{K}_{h1N}$ の分布形からでは決められず、 K_{h1M} と K_{h1N} の大小によって決められる領域を指している

ものである。そして、Style 1 or 2 は K_{h1} の分布形が Style 1 の可能性が高い場合を、Style 2 or 1 はそれが Style 2 の可能性が高い場合を示している。

3.3 多相接合体の応力強さ K_{hj} 多相異材接合体の場合、 k 番目の領域 (Ω_k) における弾性定数で無次元化された熱応力に対し、各応力成分の強さ K_{hj} は次式によって表される。

$$\begin{aligned} K_{hj}(p_j, \theta)|_{\delta} &= K_{hj(1,2)}|_{\delta} + K_{hj(2,3)}|_{\delta} + \cdots + K_{hj(k-1,k)}|_{\delta} \\ &\quad + K_{hj(k,k+1)}|_{\delta} + \cdots + K_{hj(n-1,n)}|_{\delta} \\ &= \left(n_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - n_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \bar{K}_{hj(1,2)}|_{\delta} + \left(n_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - n_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) \bar{K}_{hj(2,3)}|_{\delta} \\ &\quad + \cdots + \left(n_{k-1} \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} - n_k \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}}\right) \bar{K}_{hj(k-1,k)}|_{\delta} \\ &\quad + \left(n_k - n_{k+1} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right) \bar{K}_{hj(k,k+1)}|_{\delta} \\ &\quad + \cdots + \left(n_{n-1} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} - n_n \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\right) \bar{K}_{hj(n-1,n)}|_{\delta} \end{aligned} \quad (14)$$

すなわち、応力強さの分布や $K_{hj}=0$ の条件は線膨張係数に大きく依存する。また、応力強さの分布の形は2相接合体と同様に、Style 1~4 によって表せられる。

4. 結 言

本論文では、一様な温度変化を受ける相異材接合体の応力強さ K_{hj} に対して、 $K_{hj}=0$ となる条件と K_{hj} の分布の形態を検討し、それらを $k_{12}-\phi_1$ 平面上に示した。そして、以下の結果が得られた。

- 1) 3相以上の多相接合体の場合、応力強さが0となる条件は2相接合体とは異なり、線膨張係数に依存する関数が全て0の時、応力強さは角度 θ に依らず0となる。すなわち、2相接合体の時と異なり、線膨張係数は $K_{hj}=0$ ($K_{hg}=0$) の条件に大きく影響を及ぼす。なお、材料の数を $n(>1)$ とすると $K_{hj}=0$ ($K_{hg}=0$) の条件を満たすためには、4個の関数が全て0となる必要がある。
- 2) K_{hj} の分布形 (K_{h1} は Style 1 と Style 2, K_{h2} は Style 3 と Style 4) は、線膨張係数に大きく依存する。
- 3) 3相接合体の K_{hj} の分布形を考える場合、まず線膨張係数に依存しない強さのパラメータ $\bar{K}_{FJM}$ と $\bar{K}_{FJN}$ の分布形を把握する必要がある。そして、それらの分布を理解した後に、線膨張係数を含んだ因子をそれぞれのパラメータに乗じて、それらの和から応力強さ K_{hj} の分布形が決まる。なお、3相接合体の K_{hj} の分布形は $\bar{K}_{FJM}$ と $\bar{K}_{FJN}$ の分布形および大きさがわかれば、付録Ⅱに示したような早見表から容易に推測できる。

謝辞 本研究の一部は、日本学術振興会特別研究員(PD)の下、平成8年度文部省科学研究費補助金の助成を

受けて行われたものであり、ここに謝意を表する。また、長岡技術科学大学工学部古口日出男助教授には、本研究を行う場を提供して頂きました。付記して謝意を表する。

文 献

- (1) 井上・古口・矢田, 機論, 61-581, A(1995), 73-79.
- (2) Bogy, D. B., *J. Appl. Mech.*, 38-2(1971), 377-386.
- (3) Hein, V. L. and Erdogan, F., *Int. J. Fracture Mech.*, 7-3(1971), 317-330.
- (4) 久保・大路, 機論, 57-535, A(1991), 160-164.
- (5) Inoue, T. and Koguchi, H., *Int. J. Solids and Struc.*, 33-3(1996), 399-417.
- (6) Pageau, S. S., Joseph, P. F. and Biggers, S. B. Jr, *Int. J. Solids and Struc.*, 31-21(1994), 2979-2997.
- (7) 井上・古口, 機論, No. 95-10, Vol. I(1995), 511-512.
- (8) 井上・古口, 機論, 62-593, A(1996), 41-48.
- (9) 井上, 機論, 62-604, A(1996), 2726-2733.
- (10) Koguchi, H., Inoue, T. and Yada T., *J. Appl. Mech.*, 63-2(1996), 252-258.

Appendix 1 A table on distribution for stress intensity K_{h1} in three-phase bonded structure

$K_{hj}(p_j, \theta) _{\delta} = K_{hJM}(p_j, \theta) _{\delta} + K_{hJN}(p_j, \theta) _{\delta}$ $= \left(n_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - n_2\right) \bar{K}_{hJM}(p_j, \theta) _{\delta} + \left(n_2 - n_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) \bar{K}_{hJN}(p_j, \theta) _{\delta}$					
$\left(n_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - n_2\right)$	$\left(n_2 - n_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)$	$\bar{K}_{h1M}$	$\bar{K}_{h1N}$	$K_{h1M} \geq K_{h1N}$	K_{h1}
+	+	Style 1	Style 1	$K_{h1M} \geq K_{h1N}$	Style 1
		Style 2	Style 2		Style 2
		Style 1	Style 2	$K_{h1M} < K_{h1N}$	Style 1
		Style 2	Style 1	$K_{h1M} < K_{h1N}$	Style 2
+	-	Style 1	Style 1	$K_{h1M} \geq K_{h1N}$	Style 1
		Style 2	Style 2	$K_{h1M} \geq K_{h1N}$	Style 2
		Style 1	Style 2	$K_{h1M} < K_{h1N}$	Style 1
		Style 2	Style 1		Style 2
-	+	Style 1	Style 1	$K_{h1M} \geq K_{h1N}$	Style 2
		Style 2	Style 2	$K_{h1M} \geq K_{h1N}$	Style 1
		Style 1	Style 2	$K_{h1M} < K_{h1N}$	Style 2
		Style 2	Style 1		Style 1
-	-	Style 1	Style 1	$K_{h1M} \geq K_{h1N}$	Style 2
		Style 2	Style 2		Style 1
		Style 1	Style 2	$K_{h1M} < K_{h1N}$	Style 2
		Style 2	Style 1	$K_{h1M} < K_{h1N}$	Style 1