エレメントフリー Trefftz 法の二次元弾性問題解析と
形状感度解析への応用*北 栄輔^{*1}, 片岡陽二^{*2}, 神谷紀生^{*3}Applications of Element-Free Trefftz Method to Two-Dimensional Elastic
Problem and Its Shape Design Sensitivity Analysis

Eisuke KITA, Yohji KATAOKA and Norio KAMIYA

This paper presents an application of the element free Trefftz method to the two-dimensional elastic problem and its shape design sensitivity analysis. The element free Trefftz method is known as a boundary type solution procedure using the regular T-complete functions. Since the physical quantities are represented by regular expressions, direct differentiation of the expressions with respect to shape parameters leads to the regular expressions of shape sensitivities. The present method is applied to the relatively simple examples in order to confirm its validity.

Key Words: Trefftz Method, Element Free Method, 2D Elastic Problem, Sensitivity Analysis

1. 緒 論

最適設計問題や自由・移動境界問題の解析には、目的関数の設計変数に対する一次微係数である設計感度を用いることが多く、これまでに有限要素法や境界要素法を用いた手法が提案されている^{(1)~(5)}。しかし、これらの方法にはいくつかの問題点がある。まず有限要素法は領域型数値解析法なので、入力データ作成が面倒であるうえ、形状最適化問題などのように解析対象の形状を逐次変更しながら繰返し計算を行う場合は、形状変更によってメッシュがゆがんで計算精度が低下する問題がある。また、有限要素法では関数(変位や応力など)が節点値と内挿関数の線形結合によって近似されるが、内挿関数は形状の関数であるため、場の関数を設計変数で微分して感度を導出するときに形状関数を微分することになり、感度の計算精度が低下してしまう。

そこで、このような問題を改善するために境界要素

法の利用が提案されている。境界要素法は境界型解法なので、形状変更によってメッシュがゆがんで計算精度が低下するおそれは有限要素法に比べて低く、大規模な変形によってメッシュ再構成を必要とする場合でも比較的容易である。また、設計変数による微分で感度の近似のオーダーが低下することもない。しかし、境界要素法では別の困難が生じる。つまり、場の関数は特異性をもつ積分方程式によって表されるため、これを微分して得られる感度についての式は高次の特異性を有することになり、正則化のための複雑な定式化が必要となることである^{(1)~(5)}。そして、このような定式化はしばしば計算コストを著しく増大させることになる。

このような問題を解決するために、本論文では Trefftz 型境界解法を感度解析に用いる。Trefftz 法は、T-complete 関数と呼ばれる正則な関数を用いた境界形解法である。従って、入力データ作成は有限要素法などの領域型解法に比べて容易である。また、場の関数が正則な T-complete 関数の重ね合わせで近似されるので、それを微分して求めた感度についての式も正則となり、境界要素法のように特異積分を必要としない。このような点から、著者ら⁽⁶⁾⁽⁷⁾はこれまでに Trefftz 法を用いた二次元や三次元のポテンシャル問題の形状や境界条件に対する感度解析法を研究して

* 原稿受付 1996 年 3 月 6 日。

*¹ 正員、名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-01 名古屋市中種区不老町)。*² 正員、日立造船(株) (〒869 01 熊本県玉名郡長洲町清源寺 1735)。*³ 正員、名古屋大学情報文化学部。

きた。これに対して、本研究では Trefftz 法を二次元弾性問題の形状感度解析に適用する。

本論文では、まず T-complete 関数を導入して二次元弾性問題に対する Trefftz 法の基本ソルバーについて説明する。定式化には選点法、最小二乗法、Galerkin 法などを用いることができるが、本論文では選点法を採用する。選点法によって定式化すると、必要な入力データは境界上に取られる選点の座標値とそこでの指定境界条件値だけとなり、境界要素についての積分などが不要となる。そこで、このような定式化をエレメントフリー Trefftz 法と呼ぶことにする。次に、このソルバを用いて形状の寸法についての感度を計算する方法を示し、簡単な例題に適用する。

2. T-complete 関数

2.1 基本関係式 物体力が作用しない場合、二次元弾性問題の平衡方程式と境界条件は次式で与えられる⁽⁸⁾。

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (\text{on } \Omega) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad (\text{on } \Gamma_u), \quad t_i = \bar{t}_i \quad (\text{on } \Gamma_t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $\Omega, \Gamma_u, \Gamma_t$ は解析対象領域、その変位指定境界、表面力指定境界を示す。また、 $(\cdot)_{,j}$ は j 方向偏微分を、 $(\bar{\cdot})$ は境界条件値を示す。

変位 u_i 、表面力 t_i 、応力 σ_{ij} 、ひずみ ε_{ij} の間には次を示す変位ひずみ関係式、応力ひずみ関係式、Cauchy の関係式が成り立つ。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 D_{ijkl} は弾性係数マトリックスであり、 n_j は境界外向き法線の j 方向成分を示す。

Airy の応力関数 U を導入すると、式(1)を満足する応力成分は次式で与えられる。

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(3)、(4)、(6)から、次の重調和方程式を得る。

$$\nabla^4 U = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(6)で定義された Airy の応力関数 U は複素ポテンシャル $\phi(z), \chi(z)$ を導入すると次式のように表される。

$$U = \Re[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)] \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで $z = x + jy$ であり、 $j (= \sqrt{-1})$ は複素定数である。複素ポテンシャルと物理量との関係は次式で表される。

$$\begin{aligned} 2Gu_1 &= \Re[\kappa\phi(z) - z\bar{\psi}'(z) - \bar{\chi}'(z)] \\ 2Gu_2 &= \Im[\kappa\phi(z) - z\bar{\psi}'(z) - \bar{\chi}'(z)] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \Re[2\psi'(z) - \bar{z}\psi''(z) - \chi''(z)] \\ \sigma_{22} &= \Re[2\psi'(z) + \bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \\ \sigma_{12} &= \Im[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 κ は平面応力状態の場合 $\kappa = 3 - 4\nu$ であり、平面ひずみの場合 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ である。 G および ν は横弾性係数とポアソン比を示す。 $\Re$ と $\Im$ は複素関数の実部と虚部を、 $(\bar{\cdot})$ は共役な関数を示す。また、 $(\cdot)', (\cdot)''$ は z についての 1 階微分、2 階微分を示す。

2.2 T-complete 関数 内部問題に対する複素関数 $\phi(z), \chi(z)$ を次のようにとる⁽⁹⁾。

$$\phi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m z^m, \quad \chi'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m z^m \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで α_m, β_m は複素未知係数を示す。近似関数の個数を有限個で打ち切り、それを式(9)および式(10)に代入して整理すると、変位成分や応力成分についての近似式を得る。つまり、

$$u_i \simeq \tilde{u}_i = a_1 u_{i1}^* + \dots + a_N u_{iN}^* = \mathbf{a}^T \mathbf{u}_i^* \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\sigma_{ij} \simeq \tilde{\sigma}_{ij} = a_1 \sigma_{ij1}^* + \dots + a_N \sigma_{ijN}^* = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma}_{ij}^* \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで $a_n (n=1, \dots, N)$ は、式(11)の複素未知数を整理した結果生じた実数未知数である。そして、式(13)を式(5)に代入することで表面力に対する近似式を得る。

$$t_i \simeq \tilde{t}_i = a_1 t_{i1}^* + \dots + a_N t_{iN}^* = \mathbf{a}^T \mathbf{t}_i^* \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで $\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\sigma}_{ij}^*, \mathbf{t}_i^*$ は変位、応力、表面力に関する T-complete 関数である。このうち、 $\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\sigma}_{ij}^*$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} 2G\mathbf{u}_1^* &= 2G\{u_{11}^*, u_{12}^*, \dots, u_{1,4m-1}^*, u_{1,4m}^*, u_{1,4m+1}^*, u_{1,4m+2}^*, \dots\}^T \\ &= \{-1, 0, \dots, r^m[\kappa \cos m\theta - m \cos(m-2)\theta], -r^m[\kappa \sin m\theta - m \sin(m-2)\theta], \\ &\quad -r^m \cos m\theta, r^m \sin m\theta, \dots\}^T \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2G\mathbf{u}_2^* &= 2G\{u_{21}^*, u_{22}^*, \dots, u_{2,4m-1}^*, u_{2,4m}^*, u_{2,4m+1}^*, u_{2,4m+2}^*, \dots\}^T \\ &= \{0, 1, \dots, r^m[\kappa \sin m\theta + m \sin(m-2)\theta], r^m[\kappa \cos m\theta + m \cos(m-2)\theta], \\ &\quad r^m \sin m\theta, r^m \cos m\theta, \dots\}^T \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{11}^* &= \{\sigma_{111}^*, \sigma_{112}^*, \dots, \sigma_{1,1,4m-1}^*, \sigma_{1,1,4m}^*, \sigma_{1,1,4m+1}^*, \sigma_{1,1,4m+2}^*, \dots\}^T \\ &= \{0, 0, \dots, r^{m-1}[2m \cos(m-1)\theta - m(m-1)\cos(m-3)\theta], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -r^{m-1}[2m \sin(m-1)\theta - m(m-1)\sin(m-3)\theta], \\ & -r^{m-1}m \cos(m-1)\theta, r^{m-1}m \sin(m-1)\theta, \dots]^T \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^* &= \{\sigma_{121}^*, \sigma_{122}^*, \dots, \sigma_{1,2,4m-1}^*, \sigma_{1,2,4m}^*, \sigma_{1,2,4m+1}^*, \sigma_{1,2,4m+2}^*, \dots\}^T \\ &= \{0, 0, \dots, r^{m-1}m(m-1)\sin(m-3)\theta, r^{m-1}m(m-1)\cos(m-3)\theta, \\ & r^{m-1}m \sin(m-1)\theta, r^{m-1}m \cos(m-1)\theta, \dots\}^T \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^* &= \{\sigma_{221}^*, \sigma_{222}^*, \dots, \sigma_{2,2,4m-1}^*, \sigma_{2,2,4m}^*, \sigma_{2,2,4m+1}^*, \sigma_{2,2,4m+2}^*, \dots\}^T \\ &= \{0, 0, \dots, r^{m-1}[2m \cos(m-1)\theta + m(m-1)\cos(m-3)\theta], \\ & -r^{m-1}[2m \sin(m-1)\theta + m(m-1)\sin(m-3)\theta], \\ & r^{m-1}m \cos(m-1)\theta, -r^{m-1}m \sin(m-1)\theta, \dots\}^T \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ここで r, θ は平面曲座標であり, $m=1, 2, 3, \dots$ である.

3. エレメントフリー Trefftz 法の定式化

3.1 境界条件式の残差 解析対象上の任意点での変位 u_i と表面力 t_i を T-complete 関数の重ね合わせによって近似する.

$$u_i \simeq \mathbf{a}^T \mathbf{u}_i^*, t_i \simeq \mathbf{a}^T \mathbf{t}_i^* \dots\dots\dots (20)$$

T-complete 関数が支配方程式を満足していることより, これらの式は支配方程式を満足している, しかし, 境界条件 [式(2)] を満足していないので, 境界条件式に残差が生じる. つまり,

$$\left. \begin{aligned} R_u &= \hat{u}_i - \bar{u}_i = \mathbf{a}^T \mathbf{u}_i^* - \bar{u}_i \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_u \\ R_t &= \hat{t}_i - \bar{t}_i = \mathbf{a}^T \mathbf{t}_i^* - \bar{t}_i \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

ここで, R_u, R_t は Γ_u, Γ_t での境界条件式の残差を示す. Trefftz 法では, 残差 R_u と R_t を最小化するようにして $\mathbf{a}$ を決定する.

3.2 選点法定式化 選点法を用いる場合, 境界上におかれた選点 P で残差を零とおく. つまり, 式(21)より,

$$\left. \begin{aligned} P \in \Gamma_u : R_u(P) &= \mathbf{u}_i^*(P)^T \mathbf{a} - \bar{u}_i(P) = 0 \\ P \in \Gamma_t : R_t(P) &= \mathbf{t}_i^*(P)^T \mathbf{a} - \bar{t}_i(P) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここで, 二次元弾性問題では各選点で x, y 方向に関する二つの方程式が導かれることに注意しなければならない. 上式を整理してマトリックス表示すると,

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \dots\dots\dots (23)$$

一般に未知数の数と選点数が異なる場合, 式(23)の係数マトリックスは非正方形マトリックスとなる. 未知数の数が選点数よりも多い(マトリックスが横長)場合方程式は不定となるので, 未知数の数が選点数よりも少なく(マトリックスが縦長)なるようにして QR 分解を用いて解く.

3.3 条件数の低減 T-complete 関数は原点と解析対象上に取られた点 P の距離のべき乗関数である. そのため, 採用する T-complete の個数 N が増加すると $r > 1$ の場合 r^N が非常に大きくなり, 係数

マトリックスが悪条件となる. このとき右辺ベクトルに含まれる誤差が解に大きく拡大されるので, この問題を改善するために次に示すスケーリングを用いる.

- 座標原点が解析対象の図心にかさなるように平行移動する.
- 図心から境界までの距離の平均が 1 となるように, スケーリングを行う.

また, マトリックスの悪条件の問題を評価するために条件数(condition number)を用いる. 代数方程式 $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$ において, マトリックス $\mathbf{K}$ の条件数 $\text{cond}(\mathbf{K})$ は, 右辺ベクトル $\mathbf{f}$ の誤差 $\Delta \mathbf{f}$, 解ベクトル $\mathbf{a}$ の誤差 $\Delta \mathbf{a}$ と次の関係がある.

$$\frac{\|\Delta \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{K}) \frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} \dots\dots\dots (24)$$

$$\text{cond}(\mathbf{K}) = \frac{s_{\max}}{s_{\min}} \dots\dots\dots (25)$$

ここで, $s_{\max}, s_{\min}$ はそれぞれ最大特異値, 零でない最小特異値である. したがって, この条件数が大きければその系は不適切に近づき悪条件(ill-posedness)の指標となる.

4. 形状感度解析法

設計変数として解析対象の形状パラメータを取り, 変位や表面力などの物理量の設計変数に対する一次微係数(設計感度)を求める方法を示す. なお, 設計感度を評価する解析対象上の点は形状変化によって移動しないものとする.

先に述べたように, Trefftz 法では変位, 表面力などは T-complete 関数の線形結合によって近似される.

$$u_i \simeq \mathbf{a}^T \mathbf{u}_i^*, t_i \simeq \mathbf{a}^T \mathbf{t}_i^* \dots\dots\dots (26)$$

係数 $\mathbf{a}$ が解析対象の形状や境界条件の関数であるのに対して, T-complete 関数は関数値の評価点の座標の関数である. そこで, 上式の両辺を設計変数 φ_i で微分すると次式を得る.

$$\dot{u}_i \simeq \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{u}_i^*, \dot{t}_i \simeq \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{t}_i^* \dots\dots\dots (27)$$

ここで, $\partial/\partial \varphi_i = (\dot{})$ である. そして, 式(23)の両辺を

設計変数で微分することにより、 $\dot{\mathbf{a}}$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} &= \dot{\mathbf{f}} \\ \mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} &= \dot{\mathbf{f}} - \mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (28)$$

ここで既知境界条件値が形状の関数でなければ、 $\dot{\mathbf{f}} = 0$ となるので、

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} = -\mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} \quad (29)$$

式(28)または(29)から得られた $\dot{\mathbf{a}}$ を式(27)に代入すれば感度を求めることができる。ここで、式(29)の係数マトリックス $\mathbf{K}$ は感度解析に先立つ弾性解析で用いる係数マトリックスと同一である。したがって、あらかじめ QR 分解したものを再利用すれば感度解析における計算効率はたいへん改善されることになる。

5. 解 析 例

5.1 解析対象 解析対象として図1に示す円筒を考える。円筒は内径 $r_1=10$ [m]、外径 $r_2=12$ [m] であり、内圧 $p_1=1$ [Pa] を受けている。解析は平面ひずみ状態とし、対称性を考慮して 1/4 の部分を解析対象

Fig. 1 Circular cylinder under inner pressure

にする。縦弾性係数を $E=1$ [Pa]、ポアソン比を $\nu=0.3$ とし、境界条件は内壁上で $t_r=p_1$ [Pa]、 $t_\theta=0$ [Pa]、外壁上で $t_r=0$ [Pa]、 $t_\theta=0$ [Pa]、対称軸上で $t_r=0$ [Pa]、 $u_\theta=0$ [m] とする。ここで、 t_r は半径方向表面力を、 u_θ は周方向変位を表す。

解析には、2種類の選点配置を用いる。第一の配置では、34個の選点(図中では C. P. と表されている)が内外壁上に11個ずつ、対称軸上に6個ずつ均等に配置されている。第二の配置では、64個の選点が内外壁上に21個ずつ、対称軸上に11個ずつ均等に配置されている。両方とも四つのかど部には完全二重選点をとる。

解析には HP 社製 WS の IIP 9000 Model 712/80 および 712/60 を、代数方程式を解くのに LAPACK ソフトウェア⁽¹⁰⁾ を利用した。また、任意の選点での物理量 q の精度は次式の相対誤差で評価する。

$$e_q = \frac{\|q - q^{\text{ex}}\|^{1/2}}{|q^{\text{ex}}|} \quad (30)$$

ここで、 $\|\cdot\|$ は二乗ノルムを、上添字 ex は厳密解を示す。解析対象の部分境界上の関数値の精度で次式で

Fig. 3 Global error convergence of u_r on outer wall

Fig. 2 Global error convergence of u_r on inner wall

Fig. 4 Distribution of u_r

評価する。

$$TE = \frac{1}{L|q^{ex}|} \sum_{k=1}^L [\|q - q^{ex}\|]^{1/2} \dots\dots\dots (31)$$

ここで、 L は選点の個数を表し、総和は全選点について取るものとする。

5・2 変位解析結果 半径方向変位の誤差の収束状況を図 2, 3 に示す。総選点数 34 の選点配置は丸印で、総選点数 64 の選点配置は三角印で示す。

Fig. 5 Global error convergence of $\partial u_r / \partial r_1$ on inner wall

Fig. 6 Global error convergence of $\partial u_r / \partial r_1$ on outer wall

Fig. 7 Global error convergence of $\partial u_r / \partial r_2$ on inner wall

最初に総選点数 34 の結果に着目すると、誤差は T-complete 関数の増加につれて一様に収束しており、 $M \geq 6$ で 2% 以下、 $M \geq 10$ で 1% 以下になって十分な精度が得られていることがわかる。また解析結果からわかる限り、係数マトリックスの悪条件の問題は計算精度に悪影響を与えていないと思われる。次に総選点数 64 の結果を総選点数 34 の結果と比較すると、T-complete 関数の増加に伴いならかに速く収束して

Fig. 8 Global error convergence of $\partial u_r / \partial r_2$ on outer wall

Fig. 9 Distribution of $\partial u_r / \partial r_1$

Fig. 10 Distribution of $\partial u_r / \partial r_2$

いる。そして、 $M \geq 11$ での誤差はほぼ零となっており厳密解と一致している。最後に、T-complete 関数の個数 14 の場合の半径方向変位の分布を図 4 に示す。これからも、数値解が理論解とよく一致していることがわかる。

5・3 感度解析結果 半径方向変位の内径、外径に対する感度の誤差の収束状況を図 5～8 に示す。

最初に総選点数 34 の結果に着目すると、誤差は T-complete 関数の増加につれて一様に収束しており、 $M \geq 10$ で 1% 以下になっており十分な精度が得られている。また、図 5, 6 と図 7, 8 を詳しく比較すると内径より外径に対する感度のほうがやや収束が鈍い。これは、内壁と外壁上には同数の選点が配置されている結果外壁上のほうが選点が粗くなり、それが計算精度に影響していると考えられる。次に総選点数 64 の結果をみると、T-complete 関数の増加に伴い誤差は速やかに収束して $M \geq 12$ での誤差はほぼ零となっている。しかし、 $M \geq 22$ で精度が少し悪化している。これは、 $M \geq 22$ では係数マトリックスが悪条件になり弾性解析の計算誤差が感度解析に拡大されたためであると考えられる。実際に条件数を求めてみると、 $M = 20$ あたりで 10^6 程度なのに対して $M \geq 22$ では 10^{18} 程度以上となる。したがって、条件数 10^{18} 程度が用いたコンピュータと QR 分解の計算精度の限界であろうと推察される。T-complete 関数の個数 14 の場合の感度の分布状況を図 9, 10 に示す。

6. 結 論

本研究では、Trefftz 形境界解法による二次元弾性問題の新しい形状感度解析手法を提案した。Trefftz 法は境界型数値解析法なので、入力データ作成は有限要素法などの領域型解法よりも容易である。その上、変位や表面力は正則な関数の重ね合わせで近似されるので、それを微分して得られる感度についての式も正則となり、特異な基本解を用いる境界要素法に比べて定式化ははるかに容易となる。

そして、提案した方法の理論的妥当性を確認するために、内外圧をうける厚肉円筒の二次元弾性問題解析を行い、数値解を理論解と比較した。両者はよく一致

したので、提案した手法の理論的妥当性は確認できたと考えられる。けれども、これをさらに一般的な問題に拡張して行くには、解決すべき点もある。その一つは、係数マトリックスの悪条件の問題である。先に述べたように、T-complete 関数は r^N の関数である。したがって、 r と N の増加に伴って係数マトリックスの条件数は増大する。この問題を解決するために、本論文では座標変換法を用いた。しかし、より細長い形状などについてはこの方法でも十分とはいえない。そこで、領域の部分分割手法が提案されている⁽¹¹⁾⁽¹²⁾が、多くの部分領域に分けることは、Trefftz 法の境界型解法としての利点を失わせる結果となるので望ましくない。したがって、今後は、細長い解析対象に対して部分領域分割を用いずに解析する方法を開発することが望ましく、現在そのような方法のための研究を検討しているところである。

文 献

- (1) Barone, M. R. and Yang, R. J., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **74** (1989), 69-82.
- (2) Defouny, M., *Proc. Boundary Elements IX*, (1987), 463-472, Comp. Mech. Pub., Springer Verlag.
- (3) Kane, J. H. and Saigal, S., *ASCE : J. Eng. Mech.*, **114** (1988), 1703-1722.
- (4) Mukherjee, S. and Chandra, A., *Acta Mech.*, **78** (1989), 243-253.
- (5) Zhao, Z., *Shape Design Sensitivity Analysis and Optimization Using the Boundary Element Method (Lecture Notes in Engineering 62)*, (1991), Springer Verlag.
- (6) 北柴輔・神谷紀生・池田洋一, 日本シミュレーション学会論文集, **13-3** (1994), 247-254.
- (7) 北柴輔・神谷紀生・池田洋一, 日本シミュレーション学会論文集, **14-1** (1994), 26-33.
- (8) 井上達雄, 弾性力学の基礎, (1985), 日刊工業新聞社.
- (9) Gourgeon, H. and Herrera, I., *Boundary Element Methods*, (1981), 431-441, CML Pub., Springer Verlag.
- (10) Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Demmel, J., Dongarra, J., Du Croz, J., Greenbaum, A., Hammarling, A. S., McKenney, A., Ostouchov, S. and Sorensen, D., *LA PACK User's Manual*, 2nd ed., (1995), SIAM.
- (11) Zielinski, A. P. and Zienkiewicz, O. C., *Int. J. Num. Methods Eng.*, **21** (1985), 509-528.
- (12) Zielinski, A. P. and Herrera, I., *Int. J. Num. Methods Eng.*, **24** (1987), 871-891.