面外せん断荷重下における多層だ円形リングを有する
弾性体の解析解とその数値計算例*平島 健一^{*1}, 池田 然之^{*2}, 木村 清和^{*3}Analysis of Elastic Medium with Multilayered Elliptical Rings
under Out-of-Plane Shear Loading at Infinity

Ken-ichi HIRASHIMA, Zenji IKEDA and Kiyokazu KIMURA

The present paper shows the closed-form solutions of a two-dimensional elastic medium containing elastic multi-layered elliptical rings under uniform out-of-plane shear stresses at infinity. This analysis is based on the complex variable method using a conformal mapping technique and analytical continuations, and allows some sliding boundary condition among the elastic rings, inner inclusion and the matrix. Using this solution, we demonstrate the effects of number, elastic properties and sliding parameters of multilayered elastic rings on the distribution of stresses and displacements.

Key Words: Out-of-Plane Shear Loading, Multilayered Elliptical Rings, Perfect Bonding or Sliding Boundary, Stress Intensity (Singularity) Factor, Elasticity

1. 緒 言

著者らは先に、同一の共焦点のだ円形境界が二つ存在し、それらの境界に挟まれた領域は媒体の弾性定数とは異なる、いわゆる 1 層の弾性補強リングで、その内側は空孔または剛体介在物とした問題の閉じた形の解析解と数値計算例を提示した⁽¹⁾。これに関連する従来までの研究としてはいくつかの文献^{(2)~(6)}が列挙できる。

本論文では上述の成果を拡張し、最も一般的な場合として、同一の共焦点を有する多数のだ円形リングと最も内側に中実の弾性介在物(空孔または剛体介在物の場合を含む)を有する媒体に無限遠で一様荷重が作用する問題を対象とする。ここで取り扱うだ円形リングの層数は数十ないし百層以上あっても、連立方程式や代数方程式などを解くといった数値的操作はいっさい必要ではなく、極めて簡単な閉じた形の代数的解析解が得られるように構成されている。

この種の問題は一般的に、単一層のだ円形介在物内

の弾性定数が一定で変化しないとして簡略的に取り扱われてきていたものを、介在物の弾性定数が中心に向かって変化する問題に拡張することを目的としたものである。この論文では、さらに各層間にある種のすべりを許容できるように理論構成がなされる。

本論文では従来までの単純な層数ないし単一介在物の場合との数値比較とともに、多数のだ円形リングの場合の数値計算例を示す。

2. 基礎方程式と解析解

2.1 応力・変位を求める公式 本論文においては図 1(a)に示すように、奥行き方向に十分長く断面形状の変化のない同一の共焦点だ円形境界が多数存在し、無限遠より一様な面外せん断荷重が作用する問題を取り扱う。媒体(Matrix)および共焦点だ円形多層リングの境界をそれぞれ外側から $L_1, L_2, \dots, L_{M-1}$ とし、 L_{M-1} の内側にだ円形中実介在物が存在するものとする。このとき、媒体、多層リングおよび最も内側の介在物の弾性係数およびポアソン比をそれぞれ外側から $E_1, E_2, \dots, E_M$, および $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_M$ とする。

なお、 L_{M-1} の内側に中実介在物が存在する場合には、後の解析上の必要性から、 x 軸上の共焦点間の直線を境界 L_M とする。他方、 L_{M-1} の内側が自由境界

* 原稿受付 1996 年 6 月 21 日。

^{*1} 正員, 山梨大学工学部(〒400 甲府市武田 4-3-11)。^{*2} 山梨大学大学院。^{*3} 正員, 群馬工業高等専門学校(〒371 前橋市鳥羽町 580)。

または剛体境界の場合には E_M, ν_M は必要ではなく、また境界 L_M も設定の必要がなくなる。

本論文で取り扱う無限遠からの一様な面外せん断荷重下での応力、変位成分は xy -平面に垂直な方向の座標を z として、せん断応力 τ_{xz}, τ_{yz} および変位 u_z であり、いずれも面内座標系 (x, y) のみの関数となる。

媒体、多層リングおよび最も内側の介在物に対する物体力を無視した釣合い式および構成式は、次式のようになら与えられる。

$$\frac{\partial \tau_{xz}^n}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^n}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

$$\tau_{xz}^n = G_n \frac{\partial u_z^n}{\partial x}, \quad \tau_{yz}^n = G_n \frac{\partial u_z^n}{\partial y}. \quad (2)$$

ここに、 $G_n (n=1, 2, \dots, M)$ は $n=1$ のとき、外側媒体を、また $n=2, \dots, M-1$ のとき、多層リングを、さらに $n=M$ のとき、最も内側のだ円形介在物のせん断弾性係数を、それぞれ表す。この G_n は弾性係数 E_n 、ポアソン比 ν_n を用いれば、次式のように表される。

$$G_n = \frac{E_n}{2(1+\nu_n)}, \quad (n=1, 2, \dots, M). \quad (3)$$

ここで、図 1 (a) に示す複素平面を $z=x+iy$ で表し、この z -平面を ζ -平面に写像する関数 $\omega(\zeta)$ を次式のように設定する。

(a)

(b)

Fig. 1 Configuration of (a) z -plane and applied stresses at infinity, and (b) ζ -plane

$$z = \omega(\zeta) = R_0 \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right). \quad (4)$$

ここに、上式中の係数 R_0 および m は次式で与えられる。

$$R_0 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad m = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}. \quad (5)$$

上式中の a_1, b_1 はだ円境界 L_1 の長半軸、短半軸の長さを表す。この写像関数を用いることにより図 1 (b) に示すように境界 L_1 は ζ -平面上では半径 $\rho_1=1.0$ の単位円に、また境界 $L_2, L_3, \dots, L_{M-1}$ はそれぞれ半径 $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{M-1}$ の円に写像される。ここで、共焦点間を結んだ直線 L_M は半径 $\sqrt{m}$ の円に写像されることを考慮すれば、半径 $\rho_n (n=1, 2, \dots, M-1)$ はその外側に位置することから、次式が成立する。

$$\rho_n = \frac{a_n + b_n}{a_1 + b_1}. \quad (6)$$

上記のだ円形境界 $L_n (n=1, 2, \dots, M-1)$ に沿う曲線座標系 (ξ, η) の任意点における面外方向(奥行きの z 方向)の変位 u_z^n および合応力 P_z^n はともに調和関数でなければならないことから、変位、合応力および応力は複素関数 $F_n(z)$ を用いて次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_z^n &= \frac{1}{G_n} \operatorname{Re}[F_n(z)] = \frac{1}{2G_n} \{F_n(z) + \overline{F_n(z)}\}, \\ P_z^n &= \int p_z^n ds = \int (\tau_{xz}^n dy - \tau_{yz}^n dx) \\ &= \operatorname{Im}[F_n(z)] = \frac{1}{2i} \{F_n(z) - \overline{F_n(z)}\}, \\ \tau_{xz}^n - i\tau_{yz}^n &= (\tau_{xz}^n - i\tau_{yz}^n) e^{i\varphi} = F_n'(z) e^{i\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、

$$e^{i\varphi} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega(\zeta)|}. \quad (8)$$

2.2 境界条件式と定式化

2.2.1 最も内側の中実介在物が弾性体の場合

境界 $L_1, L_2, \dots, L_{M-1}$ 上の境界条件は合応力と変位を用いて、次式で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} P_z^n &= P_z^{n+1}, \quad \gamma_n u_z^n = u_z^{n+1} \quad \text{on } L_n, \\ (n=1, 2, \dots, M-1). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、 $\gamma_n (n=1, 2, \dots, M-1)$ はだ円形境界上での、変位に関するある程度のすべりを許容するすべり係数である。したがって、今考えている問題が無限遠荷重であることから、一般に $0 \leq \gamma_n \leq 1.0$ である。ここで、 $\gamma_n=1.0$ の場合には通常の完全接合 (Perfect Bonding) となるのに対し、 $\gamma_n < 1.0$ の場合には変位差によってすべりを生じ、特に、 $\gamma_n=0$ の場合には完全すべり (Perfect Sliding) となることを意味する。

上述の境界条件を満足するように、鏡像原理を用いた解析接続法により定式化を行う。

まず最初に、境界 L_1 上においては $\xi=1/\zeta$ (i.e. $\rho_1=1$) であるから、媒体側およびリング側の合応力および変位は式(7)より次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} P_2^+|_{\rho=1} &= \frac{1}{2i} \left\{ F_1^+(\zeta) - \bar{F}_1^+ \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\}, \\ P_2^-|_{\rho=1} &= \frac{1}{2i} \left\{ F_2^-(\zeta) - \bar{F}_2^- \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} u_z^+|_{\rho=1} &= \frac{1}{2G_1} \left\{ F_1^+(\zeta) + \bar{F}_1^+ \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\}, \\ u_z^-|_{\rho=1} &= \frac{1}{2G_2} \left\{ F_2^-(\zeta) + \bar{F}_2^- \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $F_1^+(\zeta)$ は媒体の応力関数 $F_1(\zeta)$ の境界 L_1 上の値を、また $F_2^-(\zeta)$ は 1 番めの円形リングの L_1 上での値を示す。しかるに、境界 L_1 上での境界条件式(9)から、次式が成立する。

$$F_1^+(\zeta) - \bar{F}_1^+ \left(\frac{1}{\zeta} \right) = F_2^-(\zeta) - \bar{F}_2^- \left(\frac{1}{\zeta} \right) \quad \text{on } \rho = \rho_1 (=1). \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\gamma_1}{G_1} \left\{ F_1^+(\zeta) + \bar{F}_1^+ \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\} = \frac{1}{G_2} \left\{ F_2^-(\zeta) + \bar{F}_2^- \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\} \quad \text{on } \rho = \rho_1 (=1). \dots\dots\dots (13)$$

したがって、上述の結果を一般化して、境界 L_n 上においては、次式が成立することになる。

$$F_n^+(\zeta) - \bar{F}_n^+ \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) = F_{n+1}^-(\zeta) - \bar{F}_{n+1}^- \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \quad \text{on } \rho = \rho_n. \dots\dots\dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma_n}{G_n} \left\{ F_n^+(\zeta) + \bar{F}_n^+ \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \right\} \\ = \frac{1}{G_{n+1}} \left\{ F_{n+1}^-(\zeta) + \bar{F}_{n+1}^- \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \right\} \quad \text{on } \rho = \rho_n. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

式(14)、(15)から、 $\bar{F}_n^+(\rho_n^2/\zeta)$ を消去すれば、次式の第1式が、また同様に $\bar{F}_{n+1}^-(\rho_n^2/\zeta)$ を消去すれば、次式の第2式がそれぞれ得られる。

$$\left. \begin{aligned} F_n^+(\zeta) &= \frac{1}{1+K_n} \left\{ F_{n+1}^-(\zeta) - K_n \times \bar{F}_{n+1}^- \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \right\}, \\ F_{n+1}^-(\zeta) &= \frac{1}{1-K_n} \left\{ F_n^+(\zeta) + K_n \times \bar{F}_n^+ \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad \text{on } L_n (n=1, 2, \dots, M-1). \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 K_n は次式で与えられる実定数である。

$$K_n = \frac{\gamma_n G_{n+1} - G_n}{\gamma_n G_{n+1} + G_n}, \quad (n=1, 2, \dots, M-1). \dots\dots (17)$$

ここで、式(16)₂ で与えられた基本関数の境界での値 $F_{n+1}^-(\zeta)$ を解析接続によって、境界 L_n の内側領域に一般化した関数を ${}_0F_{n+1}(\zeta)$ と書くものとすれば、次式のようになる。

$${}_0F_{n+1}(\zeta) = \frac{1}{1-K_n} \left\{ {}_0F_n(\zeta) + K_n \times {}_0\bar{F}_n \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \right\}. \dots\dots\dots (18)$$

同様に、式(16)₁ で与えられた基本関数の境界での値 $F_n^+(\zeta)$ を解析接続によって、境界 L_n の外側領域に一般化した関数を ${}_rF_n(\zeta)$ と書くものとすれば、次式が得られる。

$${}_rF_n(\zeta) = \frac{1}{1+K_n} \left\{ {}_rF_{n+1}(\zeta) - K_n \times {}_r\bar{F}_{n+1} \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \right\}. \dots\dots\dots (19)$$

また、 $n=M$ の場合の境界 L_M は ζ 平面上の半径 $\rho_M = \sqrt{m}$ の円に写像されることになるが、ここでの境界条件式を満たすための解析接続は、共焦点間の x 軸に沿う上下での関数の連続性の要請から、次式で表される。

$${}_rF_M(\zeta) = {}_0F_M \left(\frac{m}{\zeta} \right). \dots\dots\dots (20)$$

ところで、境界 L_1 の外側の媒体の無限領域に関する関数 ${}_0F_1(\zeta)$ は無限遠で作用する一様な面外荷重の設定から、主要部として次式のように、 ζ の一次の項を採用すればよい。

$${}_0F_1(\zeta) = A\omega(\zeta) \approx AR_0\zeta. \dots\dots\dots (21)$$

したがって、各領域の解析関数 $F_n(\zeta)$ 、($n=1, 2, \dots, M$) は上式までの解析接続法により求められた 2 種類の関数 ${}_0F_n(\zeta)$ および ${}_rF_n(\zeta)$ を重ね合わせることにより、最終的に次式のように求められる。

$$\begin{aligned} F_n(\zeta) &= {}_0F_n(\zeta) + {}_rF_n(\zeta) \\ &= R_0 \left\{ \delta_{1n} + (1-\delta_{1n}) \prod_{r=1}^{n-1} \left[\frac{1}{1-K_r} \right] \right\} \\ &\quad \times \{ (B_{1n}\zeta + B_{4n}/\zeta)A + (B_{3n}\zeta + B_{2n}/\zeta)\bar{A} \}, \\ &\quad (n=1, 2, \dots, M). \dots\dots (22) \end{aligned}$$

なお、上式中の係数 B_{jn} 、($j=1, \dots, 4$) は、それぞれせん断弾性係数 G_n 、すべり係数 γ_n および円形状パラメータ a_n, b_n によって定められる実定数であり、最終的に次式のように得られる。

$$\begin{aligned} B_{1n} &= \delta_{1n} + \delta_{2n} + (1-\delta_{1n})(1-\delta_{2n}) \\ &\quad \times \{ (1+K_1K_2/\rho_2^2) \times f_n^1 + (K_1+K_2\rho_2^2) \times \bar{f}_n^1 \}. \end{aligned} \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned} B_{2n} &= \delta_{2n}K_1 + (1-\delta_{1n})(1-\delta_{2n}) \\ &\quad \times \{ (1+K_1K_2/\rho_2^2) \times f_n^2 + (K_1+K_2\rho_2^2) \times \bar{f}_n^2 \}. \end{aligned} \dots\dots\dots (24)$$

$$\begin{aligned} B_{3n} &= - \left\{ \delta_{nM} + (1-\delta_{nM}) \prod_{r=n}^{M-1} \left[\frac{1}{1-K_r^2} \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ mB_{1M}C_{1n}^M - \frac{1}{m}B_{2M}C_{2n}^M \right\}. \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{4n} &= \left\{ \delta_{nM} + (1-\delta_{nM}) \prod_{r=n}^{M-1} \left[\frac{1}{1-K_r^2} \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ mB_{1M}C_{3n}^M - \frac{1}{m}B_{2M}C_{4n}^M \right\}. \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} C_{1n}^M &= \delta_{n(M-1)} K_n / \rho_n^2 + (1 - \delta_{nM})(1 - \delta_{n(M-1)}) \\ &\quad \times \{ (1 + K_n K_{n+1} \rho_{n+1}^2 / \rho_n^2) \times g_n^{M1} \\ &\quad + (K_n / \rho_n^2 + K_{n+1} / \rho_{n+1}^2) \times g_n^{M2} \}, \\ C_{2n}^M &= \delta_{nM} + \delta_{n(M-1)} + (1 - \delta_{nM})(1 - \delta_{n(M-1)}) \\ &\quad \times \{ (1 + K_n K_{n+1} \rho_{n+1}^2 / \rho_n^2) \times \bar{g}_n^{M1} \\ &\quad + (K_n / \rho_n^2 + K_{n+1} / \rho_{n+1}^2) \times \bar{g}_n^{M2} \}, \\ C_{3n}^M &= \delta_{nM} + \delta_{n(M-1)} + (1 - \delta_{nM})(1 - \delta_{n(M-1)}) \\ &\quad \times \{ (1 + K_n K_{n+1} \rho_{n+1}^2 / \rho_n^2) \times g_n^{M2} \\ &\quad + (K_n \rho_n^2 + K_{n+1} \rho_{n+1}^2) \times g_n^{M1} \}, \\ C_{4n}^M &= \delta_{n(M-1)} K_n \rho_n^2 + (1 - \delta_{nM})(1 - \delta_{n(M-1)}) \\ &\quad \times \{ (1 + K_n K_{n+1} \rho_{n+1}^2 / \rho_n^2) \times \bar{g}_n^{M2} \\ &\quad + (K_n \rho_n^2 + K_{n+1} \rho_{n+1}^2) \times \bar{g}_n^{M1} \}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

$$\left. \begin{aligned} f_3^1 &= 1, \bar{f}_3^1 = 0, f_3^2 = 0, \bar{f}_3^2 = 1, \\ f_n^1 &= f_{n-1}^1 + f_{n-1}^2 K_{n-1} / \rho_{n-1}^2, \\ \bar{f}_n^1 &= \bar{f}_{n-1}^1 + \bar{f}_{n-1}^2 K_{n-1} / \rho_{n-1}^2, \\ f_n^2 &= f_{n-1}^2 + f_{n-1}^1 K_{n-1} \rho_{n-1}^2, \\ \bar{f}_n^2 &= \bar{f}_{n-1}^2 + \bar{f}_{n-1}^1 K_{n-1} \rho_{n-1}^2. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{M-2}^{M1} &= 0, \bar{g}_{M-2}^{M1} = 1, g_{M-2}^{M2} = 1, \bar{g}_{M-2}^{M2} = 0, \\ g_n^{M1} &= g_{n+1}^{M1} + g_{n+1}^{M2} K_{n+2} / \rho_{n+2}^2, \\ \bar{g}_n^{M1} &= \bar{g}_{n+1}^{M1} + \bar{g}_{n+1}^{M2} K_{n+2} / \rho_{n+2}^2, \\ g_n^{M2} &= g_{n+1}^{M2} + g_{n+1}^{M1} K_{n+2} \rho_{n+2}^2, \\ \bar{g}_n^{M2} &= \bar{g}_{n+1}^{M2} + \bar{g}_{n+1}^{M1} K_{n+2} \rho_{n+2}^2. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

上式の係数 $f_n^i, \bar{f}_n^i$ は漸化式的に、 n の小さいほうから大きいほうに向かって逐次決定されるのに対し、 $g_n^{Mj}, \bar{g}_n^{Mj}$ のほうは n の大きいほうから小さいほうに向かって逐次決定される。これらから式(22)の係数 B_{jn} が式(23)～(26)により求められることになる。

最後に、式(22)の係数 A を決定するために、媒体領域に対する解析関数 $F_1(\xi)$ に着目し、荷重条件としては、式(21)の設定の際に想定した無限遠での面外せん断荷重 $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$ が作用するものとするれば、式(7)₃より次式が成立する。

$$\tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty = \frac{F_1'(\xi)}{\omega'(\xi)} \Big|_{|\xi|=\infty} = B_{11}A + B_{31}\bar{A}. \dots\dots\dots (30)$$

これより、係数 A は次のように求められる。

$$A = \frac{\tau_{xz}^\infty}{B_{11} + B_{31}} - i \frac{\tau_{yz}^\infty}{B_{11} - B_{31}}. \dots\dots\dots (31)$$

以上によって式(22)の解析関数 $F_n(\xi)$ が完全に決定されたことになる。

ここで最も内側の中実介在物の応力場について考える。式(22)で求められた解析関数を用いることによって、この内側介在物の応力場は次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} - i\tau_{yz} &= \frac{F_n'(\xi)}{\omega'(\xi)} \\ &= \prod_{r=1}^{M-1} \left[\frac{1}{1-K_r} \right] \left(B_{1M}A - \frac{1}{m} B_{2M}\bar{A} \right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

上式より、層数には無関係に内側介在物の応力場は ξ に依存せず、一定値になることが確認できる。このことは「媒体と一つのだ円形の中実介在物が存在し、無限遠より一様荷重が作用する問題に対して、介在物内の応力場が位置に関係なく一定になる」という Eshelby の解⁽⁷⁾とも整合し、かつ一般化したものとなっているのは興味深い成果である。さらに、このことが式(9)のようなすべり結合の場合に対して成立するというのも極めて興味深いものである。

2・2・2 最も内側の介在物が空孔または剛体の場合

次に、最も内側の境界 L_{M-1} の内側介在物が空孔または剛体の場合を考える。この場合、境界 $L_n (n=1, 2, \dots, M-2)$ 上の境界条件は合応力と変位を用いて、式(9)と同様に次式で与えられる。

$$P_z^n = P_z^{n+1}, \gamma_n u_z^n = u_z^{n+1}, \text{ on } L_n (n=1, 2, \dots, M-2). \dots\dots\dots (33)$$

これに対し、最も内側の境界 L_{M-1} 上の境界条件が自由または剛体の場合には、次式(34)のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_z^{M-1} &= 0 : \text{自由境界} \\ u_z^{M-1} &= 0 : \text{剛体境界} \end{aligned} \right\} \text{ on } L_{M-1} \dots\dots\dots (34)$$

上述の境界条件を満足するように、鏡像原理を用いた解析接続法により定式化を行う。境界 $L_1, L_2, \dots, L_{M-2}$ に対しては、境界条件、解析接続ともに 2・2・1 項の中実弾性介在物の場合とまったく同様であるが、異なるところは次式で定義される境界 L_{M-1} 上での解析接続のみである。

$${}_r F_{M-1}(\xi) = -k \times {}_0 \bar{F}_{M-1} \left(\frac{\rho_{M-1}^2}{\xi} \right). \dots\dots\dots (35)$$

ここに、

$$k = \begin{cases} -1 : \text{自由境界} \\ 1 : \text{剛体境界} \end{cases} \dots\dots\dots (36)$$

したがって、2・2・1 項同様、外側領域から内側領域への解析接続を行い、最も内側の境界 L_{M-1} での境界条件を満足する解析接続 [式(35)] を経て、内側領域から外側領域への解析接続を行い、得られた 2 種類の関数 ${}_0 F_n(\xi), {}_r F_n(\xi)$ を重ね合わせることで、各領域の解析関数 $F_n(\xi)$ が最終的に次式のように求められる。

$$\begin{aligned} F_n(\xi) &= R_0 \left\{ \delta_{1n} + (1 - \delta_{1n}) \prod_{r=1}^{n-1} \left[\frac{1}{1-K_r} \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ (B_{1n} - k B_{3n}) A \xi + (B_{2n} - k B_{4n}) \frac{\bar{A}}{\xi} \right\}, \end{aligned}$$

$$(n=1, 2, \dots, M-1). \dots\dots (37)$$

上式中の係数 B_{jn} , ($j=1, \dots, 4$) は次式のように表される。

$$B_{1n} = \delta_{1n} + (1 - \delta_{1n}) \{ B_{1(n-1)} + B_{2(n-1)} K_{n-1} / \rho_{n-1}^2 \}. \dots\dots (38)$$

$$B_{2n} = (1 - \delta_{1n}) \{ B_{2(n-1)} + B_{1(n-1)} K_{n-1} / \rho_{n-1}^2 \}. \dots\dots (39)$$

$$B_{3n} = \left\{ \delta_{n(M-1)} + (1 - \delta_{n(M-1)}) \prod_{r=n}^{M-2} \left[\frac{1}{1 - K_r^2} \right] \right\} \times \{ B_{1(M-1)} h_n^1 \rho_{M-1}^2 - B_{2(M-1)} \hat{h}_n^1 / \rho_{M-1}^2 \} \dots\dots (40)$$

$$B_{4n} = - \left\{ \delta_{n(M-1)} + (1 - \delta_{n(M-1)}) \prod_{r=n}^{M-2} \left[\frac{1}{1 - K_r^2} \right] \right\} \times \{ B_{1(M-1)} h_n^2 \rho_{M-1}^2 - B_{2(M-1)} \hat{h}_n^2 / \rho_{M-1}^2 \} \dots\dots (41)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} h_{M-1}^1 &= 0, \quad \hat{h}_{M-1}^1 = 1, \quad h_{M-1}^2 = 1, \quad \hat{h}_{M-1}^2 = 0. \\ h_n^1 &= h_{n+1}^1 + h_{n+1}^2 K_n / \rho_n^2, \\ \hat{h}_n^1 &= \hat{h}_{n+1}^1 + \hat{h}_{n+1}^2 K_n / \rho_n^2, \\ h_n^2 &= h_{n+1}^2 + h_{n+1}^1 K_n / \rho_n^2, \\ \hat{h}_n^2 &= \hat{h}_{n+1}^2 + \hat{h}_{n+1}^1 K_n / \rho_n^2. \end{aligned} \right\} \dots\dots (42)$$

この場合も、上式中の $h_n^i, \hat{h}_n^i$ は漸化式的に、 n の大きいほうから小さいほうに向かって逐次決定することができる。

最後に、上式中の係数 A を $2 \cdot 2 \cdot 1$ 項の場合と同様にして求めれば、最終的に次式が得られる。

$$\tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty = \frac{F_1(\xi)}{\omega'(\xi)} \Big|_{|\xi|=\infty} = (B_{11} - k B_{31}) A. \dots\dots (43)$$

これより、係数 A は次式となる。

$$A = \frac{\tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty}{B_{11} - k B_{31}}. \dots\dots (44)$$

2・2・3 応力拡大(特異)係数 境界 L_{M-1} の内側介在物が空孔または剛体の場合において、内側境界 L_{M-1} の短軸が $b_{M-1} = 0.0$ となったクラックないしは直線状剛体(rigid line inhomogeneity)の場合、その先端において特異性をもった応力集中が生じる。そのときのクラック先端(右端)における応力拡大(特異)係数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_{III} &= i\sqrt{2\pi} \lim_{\xi \rightarrow \rho_{M-1}} \sqrt{\omega(\xi) - \omega(\rho_{M-1})} \frac{F'_{M-1}(\xi)}{\omega'(\xi)} \\ &= i\sqrt{\pi} \frac{F'_{M-1}(\rho_{M-1})}{\sqrt{\omega''(\rho_{M-1})}}. \end{aligned} \right\} \dots\dots (45)$$

上式に式(4)の写像関数 $\omega(\xi)$ および式(37)の解析関数 $F_{M-1}(\xi)$ に対する導関数を求めて代入すると、 K_{III} が最終的に次式のように求められる。

$$K_{III} = i\sqrt{\frac{\pi R_0}{2m}} \rho_{M-1}^3 \left\{ \delta_{2M} + (1 - \delta_{2M}) \prod_{r=1}^{M-2} \left[\frac{1}{1 - K_r} \right] \right\}$$

Fig. 2 Effects of sliding parameter γ_1 on stress $\tau_{\eta z}^2$ at $(a_1, 0)$ of the boundary L_1 with one elliptical solid inclusion

Fig. 3 Distribution of $\tau_{\eta z}^n$ on the all boundaries $L_1, \dots, L_{M-1}$ with perfect bondings

Fig. 4 Distribution of $\tau_{\eta z}^n$ on the two boundaries L_1 and L_{M-1} with slidings

$$\times \left\{ (B_{1(M-1)} - kB_{3(M-1)})A - (B_{2(M-1)} - kB_{4(M-1)}) \frac{\bar{A}}{\rho_{M-1}^2} \right\}, \dots \dots \dots (46)$$

3. 数 値 計 算 例

2章までに示した解析解を用いた数値計算例を以下に示す。

なお、従来までの研究者による1層のリングを有するだ円形空孔または剛体介在物の場合に対する計算例と、本論文の2・2・1項において最も内側の中実介在物の弾性係数を空孔または剛体に近似した場合に対する計算例および2・2・2項における計算例とを比較して、応力および変位がともに完全に一致することが確認されている。

まずはじめに、すべり係数 γ_n の影響を評価するために、一つのだ円形境界とその内側に中実介在物が存在する弾性体について考える。図2はすべり係数 γ_1 の値を評価したものであり、 $b_1/a_1=0.8$ のだ円形境界を有する弾性体に無限遠からの面外せん断荷重 τ_{yz}^∞ が

Fig. 5 Distribution of $\tau_{\eta z}^n$ on L_1 with perfect bonding, L_2 is rigid or free boundary

Fig. 6 Distribution of $\tau_{\eta z}^n$ on L_1 with perfect bonding, L_5 is rigid or free boundary

作用したときの x 軸上の境界 ($x=a_1$) での中実介在物の応力 $\tau_{\eta z}^n$ を求め、すべり係数が境界上での応力分布に及ぼす影響を表したものである。これより、 $\gamma_1=0$ のときに完全すべりとなり、この応力 $\tau_{\eta z}^n$ は発生しないのに対し、一方 $\gamma_1 \geq 0.999$ のときには完全接合になることが従来までの研究者による計算例との比較により確認されている。また、 γ_1 がその中間的な値をとる場合の変化が図中に示されている。図2よりすべり係数 γ_1 が小さいほど同一条件の完全接合状態に比べ応力は小さくなることがわかる。

次に、図3および図4は多層のだ円形リングと中実介在物を有する媒体に無限遠から面外せん断荷重 τ_{yz}^∞ が作用した場合における応力 $\tau_{\eta z}^n$ の分布図である。横軸の θ は x 軸より反時計廻りにとり、このときの着目点は $\rho_1=1.0$ (最も外側の境界 L_1 上) の媒体と一つめのだ円形リングの境界および $\rho_{M-1}=0.637$ (最も内側の境界 L_{M-1} 上) の $(M-1)$ 層めのだ円形リングと最も内側の中実介在物の境界の周縁についてである。図3の左側半分に1層のだ円形リング ($M=3; b_1/a_1=0.80, b_2/a_2=0.57$) とその内側に中実介在物がある場合 ($G_2/G_1=10.0, G_3/G_1=20.0$) を、また右側半分には4層のだ円形リング ($M=6; b_1/a_1=0.80, b_2/a_2=0.76, b_3/a_3=0.71, b_4/a_4=0.65, b_5/a_5=0.57$) とその内側に中実介在物がある場合 ($G_2/G_1=4.0, G_3/G_1=8.0, G_4/G_1=12.0, G_5/G_1=16.0, G_6/G_1=20.0$) をそれぞれ示している。また、4層のだ円形リングのせん断弾性係数は上記のように、外側から内側に向かって G_1 から G_6 の間を等間隔で大きくなるように設定し、それぞれの境界において $\gamma_n=1.0$ すなわち完全接合の場合を想定して計算したものである。また図4においては、図3と同じ荷重、幾何形状ならびにせん断弾性係数であるが、

Fig. 7 Distribution of $\tau_{\max}$ of 4-layered elliptical rings with all perfect bonding boundaries

すべり係数を変化させていることが異なる。図4の左側半分では $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.75$ 、右側半分においては $\gamma_1 = \gamma_5 = 0.75$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1.0$ すなわち外側境界および最も内側の境界において変位間のすべりが生じることを想定したものである。図3, 図4の場合, 最も内側の中実介在物中の応力状態はだ円形リングの層数および境界条件(完全接合, すべり結合)によらず作用荷重に対し, 場所に関係なく一定となることが, 別途確認されている。

次に, すべての境界が完全接合の場合に, 最も内側の領域が空孔または剛体であると仮定したときの図3および図4と同様の応力分布をそれぞれ図5および図6に示す。図の左側半分の範囲が空孔の場合についての, また右側半分が剛体介在物の場合についての計算結果である。図5は1層のだ円形リング($M=3; G_2/G_1=10.0$)の場合, 図6においては4層のだ円形リングの場合($M=6; G_2/G_1=4.0, \dots, G_5/G_1=16.0$)をそれぞれ示している。なお, これらの図中には媒体内部位置(i.e.

$\rho=2.0$)の τ_{yz} の分布図も示されている。図3~6より, 最も内側の中実介在物のせん断弾性係数が大きくなるほど応力分布の振幅が小さくなることがわかる。

次に, 弾性体の降伏や破壊において重要となる最大せん断応力 $\tau_{\max}$ および変位 u_z の等高線図を示す。図7, 図8および図9は空孔または剛体介在物を有する4層のだ円形リング($b_1/a_1=0.80, \dots, b_5/a_5=0.57$)に τ_{yz}^∞ が作用した場合を対象としたものである。図7では層状リング内部においていちばん外側の層から最も内側の層までのせん断弾性係数 $G_2, G_3, \dots, G_5$ が比例的に変化($G_2/G_1=4.0, G_3/G_1=8.0, \dots, G_5/G_1=16.0$)するものと仮定した。図7の左側半分は境界 L_5 が剛体境界の場合について, 右側半分は自由境界の場合について求めたもので, それぞれの境界における境界条件は完全接合としている。図8は図7と同様に, すべての境界において完全接合である4層のリングを想定しているが, リング各層のせん断弾性係数を図7の最外

Table 1 Effects of ratio of elastic shear rigidities on SIF($\times \sqrt{a_1 \tau_{yz}^\infty}$) & SSF($\times \sqrt{a_1 \tau_{xz}^\infty}$) for the case of 4-layered elliptical rings

G_{n+1}/G_n	$b_1/a_1=0.8$		$b_1/a_1=0.4$	
	SIF	SSF	SIF	SSF
0.1	0.0003	0.0010	0.0002	0.0021
0.2	0.0051	0.0135	0.0039	0.0289
0.5	0.1587	0.2991	0.1412	0.5647
1.0	1.3729	1.3729	1.6969	1.6969
2.0	4.7864	2.5391	9.0347	2.2594
5.0	8.4641	3.1945	18.0462	2.4528
10.0	9.8050	3.3755	20.7655	2.4973
20.0	10.4897	3.4586	22.0699	2.5167
50.0	10.9058	3.5063	22.8482	2.5276
100.0	11.0454	3.5218	23.1077	2.5311

Fig. 8 Distribution of $\tau_{\max}$ of 4-layered elliptical rings with all perfect bonding boundaries

Fig. 9 Distribution of $\tau_{\max}$ of 4-layered elliptical rings with all perfect bonding boundaries

Fig. 10 Distribution of u_z of 4-layered elliptical rings with sliding boundary L_1

Table 2 Effects of sliding parameter γ_1 on SIF ($\times \sqrt{a_4} \tau_{yz}^\infty$) & SSF ($\times \sqrt{a_4} \tau_{yz}^\infty$) for the case of 4-layered elliptical rings

G_{n+1}/G_n	γ_1	$b_1/a_1=0.4$		$b_1/a_1=0.2$	
		SIF	SSF	SIF	SSF
2.0	1.00	9.0347	2.2594	13.2354	2.0305
	0.75	8.2702	2.1955	11.6482	2.0005
	0.50	7.0733	2.0778	9.3949	1.9431
	0.25	4.9319	1.7901	5.9449	1.7890
10.0	1.00	20.7655	2.4973	37.4733	2.1242
	0.75	20.6831	2.4880	37.3827	2.1202
	0.50	20.5202	2.4697	37.2028	2.1124
	0.25	20.0467	2.4162	36.6733	2.0894

層のリングのせん断弾性係数と等しくして計算したものである。この結果は1層のリング($b_1/a_1=0.80$, $b_2/a_2=0.57$)を設定して計算した結果と完全に一致することが確認されている。図9も図8と同様に、リング各層のせん断弾性係数を図7のリングの最も内側のリングのせん断弾性係数と等しいとして計算したものである。図8および図9より図7の多層だ円形リング内の応力分布は媒体側から内部へ行くほど図8から図9へ向かって変化する様子が確認できる。

また図10では空孔または剛体介在物を有する4層のだ円形リングに τ_{yz}^∞ が作用したときの変位 u_z の分布図である。図10の左側半分は剛体境界の場合について、また右側半分は自由境界の場合についての計算例であるが、だ円形リングの外側境界 L_1 におけるすべり係数を $\gamma_1=0.75$ と設定している。

最後に、4層のだ円形リングを有し最も内側の境界の共焦点を結ぶ直線クラックまたは直線状剛体介在物とした場合のその先端における応力拡大(特異)係数の数値計算例を示す。なお、応力拡大(特異)係数 K_{III} は複素数で表されるが、応力拡大係数(SIF: Stress Intensity Factor)は無遠達荷重 τ_{yz}^∞ が作用する場合の実部を、応力特異係数(SSF: Stress Singularity Factor)は無遠達荷重 τ_{yz}^∞ が作用する場合の虚部をとることにより得られる。表1は境界 L_1 の扁平度が $b_1/a_1=0.8$ (および $b_2/a_2=0.71$, $b_3/a_3=0.55$, $b_4/a_4=0.32$)あるいは 0.4 (および $b_2/a_2=0.31$, $b_3/a_3=0.21$, $b_4/a_4=0.11$)で完全接合の場合に、せん断弾性係数比を $G_{n+1}/G_n=0.1 \sim 100.0$ ($n=1, 2, 3$)と比例的に変化させたときの応力拡大(特異)係数を示している。この結果より弾性係数比が大きくなるほど拡大係数、特異係数

はともに大きくなるが、その変化は拡大係数のほうが特異係数に比べて大きい。

次に、境界 L_1 の扁平度が $b_1/a_1=0.4$ あるいは 0.2 (および $b_2/a_2=0.15$, $b_3/a_3=0.10$, $b_4/a_4=0.05$)のときに、せん断弾性係数比が $G_{n+1}/G_n=2.0, 10.0$ ($n=1, 2, 3$)ですべり係数 γ_1 を変化させたときの応力拡大(特異)係数に及ぼす影響を表2に示した。これより、すべり係数が小さくなるにつれ応力拡大(特異)係数は小さくなることが確認できる。

4. 結 言

弾性定数の異なる同一共焦点の多数のだ円形リングと最も内側のだ円形の中実介在物を有する弾性体に無限遠より一様な面外せん断荷重が作用する問題の閉じた形の解析解を提示した。さらに、最も内側の介在物が空孔または剛体となった場合の解析解についても誘導し、その特殊な場合として、直線状クラックあるいは直線状剛体介在物の場合の応力拡大(特異)係数の理論式を示した。なお、各層の境界条件は通常の完全結合の場合のほか、層間の変位差に比例するようなすべり結合の場合についても定式化がなされている。

ここで得られた成果のうち、興味深いものは最も内側に中実介在物がある場合、この介在物内の応力場は一定になることである。これはEshelbyの解をより一般化したものに相当し、多数のだ円形境界層が存在し、またここで考えた完全結合を含むすべり結合の境界条件の場合にも当てはまるものとなっている。

これらの理論解をもとに、代表的な数値計算例を示し、特殊な場合には従来までの結果と一致することが確認された。

文 献

- (1) 木村清和・山下幸夫・平島健一・木口昌彦, 機論, **61**-589, A(1995), 2086-2092.
- (2) Wu, C.H. and Chen, C.H., *J. Appl. Mech.*, **57**(1990), 91-96.
- (3) Sendeky, G.P. (Simmon, J.A., de Wit, R. and Bullough, R. 編), *Fundamental Aspects of Dislocation Theory, Spec. Publ.*, 317-1(1970), 57-72.
- (4) Smith, E., *Int. J. Eng. Sci.*, **6**(1968), 129-138.
- (5) 木村清和・平島健一・広瀬幸雄, 機論, **58**-555, A(1992), 2104-2110.
- (6) 平島健一・川上哲太郎・藤原紀夫・山下幸夫, 土木学会論文集, No. 436(1991), 37-45.
- (7) Eshelby, J.D., *Proc. R. Soc. London, A*, **241**(1957), 376-396.