近似正四角形剛体板をはめ込んだ無限板の引張り*

山 本 照 美*¹

Tension of an Infinite Plate Containing a Square Rigid Plug with Rounded Corners

Terumi YAMAMOTO

This paper is concerned with the mixed boundary value problems of an infinite plate with a square hole, into which a smooth rigid square plug with rounded corners is simply inserted. Since the infinite plate is subjected to a uniaxial tension at infinity, gaps are produced along the boundary between the inserted plug and the hole. The contact pressure between the inserted plug and the hole is expressed in a convergent series, so that the stress and displacement along the boundary can be numerically analyzed by the point matching method. Using the numerical results for the shape of a square hole with rounded corners, the influence of the interference is shown with the stress around a square hole.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Contact Problem, Numerical Analysis, Mixed Boundary Value Problem, Square Hole, Square plug, Interference

1. ま え が き

異物のはめ込まれた弾性板に荷重が作用する場合の応力分布の解明は、材料の強さや機械の強度設計などに関連して重要である。そのため円形やだ円形充てん物のはめ込まれている場合の研究があり、また近似正四角形穴のある無限板の引張り⁽¹⁾や内圧の作用する場合⁽²⁾および近似正四角形穴のある帯板の引張り⁽³⁾の研究があるが、近似正四角形充てん物のはめ込まれている場合の研究はないようである。

著者らは以前、円形やだ円形充てん物のはめ込まれた無限板に荷重が働き、穴周縁と充てん物との一部境界にすきまの発生する、混合境界値問題の応力解析を行った^{(4)~(6)}。本研究は、その際用いた解析法を正四角形充てん物のはめ込まれた問題にも適用できるように拡張したもので、無限板に引張荷重が働き近似正四角形穴と充てん物の一部境界領域にすきまの発生する混合境界値問題を解析し、はめあいしろと引張荷重の大きさおよび四角形穴の角の曲率半径が、接触領域や応力分布に与える影響を明らかにした。

2. 解 析 法

図1のように無限板にある近似正四角形穴に剛体充てん物のはめ込まれ、これが y 軸方向に一樣に引張られるとき、穴と充てん物が完全固着されていない場合には、両者の境界の一部領域にすきまが発生し、このすきまの大きさは荷重やはめあいしろの大きさに関係して変化するであろう。この混合境界値問題を解析するために、無限板にある正四角形穴面に未知の圧力分

Fig. 1 Contact condition between an infinite plate and a rigid plug

* 原稿受付 1996 年 8 月 19 日.

*¹ 正員, 愛知技術短期大学 (〒443 蒲郡市西迫町馬乗 50-2).

布が働く場合の解と、正四角形穴のある無限板の y 軸方向引張りに対する解を重ね合わせ、正四角形穴の変位に関する境界条件を選点法によって満足させることによって、接触圧力分布を決定した。

ζ 平面の直角座標 (α, β) を z 平面の直交曲線座標に写像する関数 $w(\zeta)$ を

$$\left. \begin{aligned} z &= w(\zeta) \\ z &= x + iy, \zeta = \alpha + i\beta \\ i &= \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

とおき、二つの複素応力関数 $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を使用すれ

Fig. 2 Shapes of square hole with rounded corners

ば、力の釣合い式と適合条件式は満足され、 z 平面に写像された直交曲線座標 (α, β) における応力成分 $(\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta})$ および変位成分 (u_α, v_β) は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\beta + \sigma_\alpha &= 2\{\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}\}, \sigma_\beta - \sigma_\alpha + i2\tau_{\alpha\beta} = \frac{2}{w'(\zeta)}\{w(\zeta) \cdot \Phi'(\zeta) + \psi'(\zeta)\} \\ 2G(u_\alpha + i \cdot v_\beta) &= \frac{1}{|w'(\zeta)|}\{\kappa \cdot \overline{w'(\zeta)} \cdot \varphi(\zeta) - w(\zeta) \cdot \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{w'(\zeta)} \cdot \psi(\zeta)\} \\ \kappa &= \frac{3-\nu}{1+\nu} (\text{平面応力}), \kappa = (3-4\nu) (\text{平面ひずみ}), \Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{w'(\zeta)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

で表される⁽⁷⁾。ここで G は横弾性係数、 ν はポアソン比であり、 $\Phi'(\zeta)$ は $\Phi(\zeta)$ の ζ による 1 階微分を表し、 $\overline{\Phi(\zeta)}$ は $\Phi(\zeta)$ の共役複素量を表す。写像関数 $w(\zeta)$ を

$$z = w(\zeta) = R(3e^{\zeta} + \lambda e^{-3\zeta})/(3+\lambda), R > 0, 0 \leq \lambda < 1 \dots\dots\dots (3)$$

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} x/R &= (3e^{\alpha} \cdot \cos \beta + \lambda e^{-3\alpha} \cdot \cos 3\beta)/(3+\lambda) \\ y/R &= (3e^{\alpha} \cdot \sin \beta - \lambda e^{-3\alpha} \cdot \sin 3\beta)/(3+\lambda) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

とおけば、 z 平面に写像された直交曲線座標において $\alpha=0$ は、図 2 のように角を丸めた近似正四角形になる。

充てん物がなく、近似正四角形穴のみある無限板が無限遠方で y 軸方向に σ_0 で一様に引張られている場合には、複素応力関数を

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{3\sigma_0 R}{4(3+\lambda)} e^{\zeta} \left\{ 1 - \frac{6}{3-\lambda} e^{-2\zeta} - \frac{1}{3} \lambda e^{-4\zeta} \right\} \\ \psi(\zeta) &= \frac{3\sigma_0 R}{2(3+\lambda)} e^{\zeta} \left\{ 1 - (3+\lambda^2) \left(\frac{1}{3} e^{2\zeta} + \frac{1}{3-\lambda} \right) \cdot \sum_{n=1,2,\dots} \lambda^{n-1} e^{-4n\zeta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

とおけばよい。このとき無限遠方では、 $\sigma_y = \sigma_0$, $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ となり、穴周縁 ($\alpha=0$) の応力および変位は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} {}^0\widehat{\sigma}_\alpha &= 0, \frac{{}^0\widehat{\sigma}_\beta}{\sigma_0} = \frac{(1-\lambda)\{(1+\lambda)(3-\lambda) + 6 \cos 2\beta\}}{(3-\lambda)(1+\lambda^2 - 2\lambda \cos 4\beta)}, {}^0\widehat{\tau}_{\alpha\beta} = 0 \\ \frac{2G^0 \widehat{u}_\alpha}{\sigma_0 R} &= \frac{1+\kappa}{(3+\lambda)\sqrt{1+\lambda^2 - 2\lambda \cos 4\beta}} \left\{ \frac{3+\lambda^2}{4} - \frac{9(1-\lambda)}{2(3-\lambda)} \cos 2\beta - \lambda \cos 4\beta \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

無限板にある穴周縁 ($\alpha=0$) における応力および変位には、各記号の上に $\widehat{}$ をつけて表す。

いま図 1 のように、剛体充てん物と無限板が $-\theta \leq \beta \leq \theta$ の領域で摩擦なく接触している場合には、接触圧力は穴面に垂直に作用し、また x 軸と y 軸に対称に分布する。このことを考慮して、接触圧力を

$$\sum_{k=1,2,\dots} p_k \cdot f_k^0(\beta), f_k^0(\beta) = \begin{cases} 0 & (-\pi/2 \leq \beta < -\theta) \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 - (-1)^k \cos \frac{k\pi\beta}{\theta} \right\} & (-\theta \leq \beta \leq \theta) \\ 0 & (\theta < \beta \leq \pi/2) \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

で表す。ここで p_k は応力の次元をもつ未知定数である。また $f_k^0(\beta)$ は θ と k によって決まる滑らかな連続関数であり、その値域は $0 \leq f_k^0(\beta) \leq 1$ で $-\theta \leq \beta \leq \theta$ の領域にだけ分布する形で与えてある。すなわち分布関数 $f_k^0(\beta)$ を重み p_k で k について重ね合わせて接触圧力分布を表すようにしてある。この分布関数 $f_k^0(\beta)$ をフーリエ級数に展開すれば、

$$f_k^0(\beta) = {}^k A_0 + \sum_{n=1,2,\dots} {}^k A_n \cdot \cos 2n\beta \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで,

$${}^k A_0 = \frac{\theta}{\pi}, {}^k A_n = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{(k\pi/\theta)^2 \cdot \sin 2n\theta}{n\{4n^2 - (k\pi/\theta)^2\}} \quad (n=1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (9)$$

正四角形穴面に圧力 $p_k \cdot f_k^0(\beta)$ が働く無限板の解は、複素応力関数を

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{p_k R}{2(3+\lambda)} \left[2 \cdot {}^k A_0 \cdot \lambda e^{-3\zeta} - 3 \cdot {}^k A_1 e^{-\zeta} \left\{ \frac{3(1-\lambda)}{(3-\lambda)} - \frac{1}{5} \lambda e^{-4\zeta} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=2,3,\dots} 3 \cdot {}^k A_n e^{-(2n-1)\zeta} \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \lambda e^{-4\zeta} \right) \right] \\ \psi(\zeta) &= \frac{p_k R}{3+\lambda} \left[{}^k A_0 \cdot (3+\lambda^2) \sum_{m=1,2,\dots} \lambda^{m-1} e^{-(4m-3)\zeta} + {}^k A_1 \frac{e^{\zeta}}{3-\lambda} \left\{ 3(3-4\lambda-\lambda^3) + (3+\lambda^2) \sum_{m=1,2,\dots} \lambda^{m+1} e^{-4(m+1)\zeta} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=2,3,\dots} {}^k A_n \cdot n e^{-(2n-3)\zeta} \cdot \left(\frac{\lambda}{2n-3} + \frac{3}{2n+1} \cdot e^{-4\zeta} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

とおけばよい。このとき無限遠方での応力はすべて消失し、穴周縁の応力および変位は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} {}^k \bar{\sigma}_\alpha / p_k &= {}^k A_0 + \sum_{n=1,2,\dots} {}^k A_n \cdot \cos 2n\beta, {}^k \bar{\tau}_{\alpha\beta} = 0 \\ \frac{{}^k \bar{\sigma}_\beta}{p_k} &= {}^k A_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{2(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2-2\lambda \cos 4\beta} \right\} + {}^k A_1 \cdot \left\{ 1 - \frac{4\lambda(1-\lambda)}{(3-\lambda)(1+\lambda^2-2\lambda \cos 4\beta)} \right\} \cos 2\beta + \sum_{n=2,3,\dots} {}^k A_n \cdot \cos 2n\beta \\ \frac{2G \cdot {}^k \bar{u}_\alpha}{p_k R} &= \frac{1}{(3+\lambda)\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda \cos 4\beta}} \left[{}^k A_0 \{ -(3+\lambda^2) + (3+\lambda) \cos 4\beta \} + {}^k A_1 \cdot \frac{3}{2} \left[\frac{1}{3-\lambda} \{ -(1+3\lambda) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left(\frac{1}{3} - 3\lambda \right) \lambda + 2 \left(1 - \frac{9}{5} \lambda \right) \lambda^2 - \left(1 - \frac{1}{5} \lambda \right) \lambda^3 \right\} \cos 2\beta + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \lambda \right) \lambda \cos 6\beta \right] \\ &\quad + \sum_{n=2,3,\dots} {}^k A_n \cdot \frac{3}{2} \left[\lambda \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1} \lambda \right) \cdot \cos (2n-4)\beta - \left\{ \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} \lambda \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda^2 \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n+3} \lambda \right) \right\} \cos 2n\beta + \lambda \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \lambda \right) \cdot \cos (2n+4)\beta \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

接触圧力が $\sum_{k=1}^K p_k \cdot f_k^0(\beta)$ で表される場合には、式(11)

を k について重ね合わせればよい。

無限板の正四角形穴よりわずかに大きい正四角形充てん物がはめ込まれている場合には、最初圧入状態にあり全領域で接触しており、荷重 σ_0 がある一定値に達して初めてすきまを生じ、荷重の増大とともにすきまも増大する。しかし本解析では逆に、接触領域 θ を与えて、その条件を満足するはめあいしりと荷重の大きさを求めることにする。

いま図1のように、穴面に垂直な α 方向に一定のはめあいしろ I_0 のある剛体充てん物がはめ込まれ、無限遠方に働く引張荷重によって、穴周縁の一部領域 θ で摩擦なく接触している場合に、接触圧力分布を式(7)のように $\sum_{k=1}^K p_k \cdot f_k^0(\beta)$ で表せば、すきま領域における α 方向応力零の条件

$$\bar{\sigma}_\alpha = \sum_{k=1,2,\dots} {}^k \bar{\sigma}_\alpha = 0 \quad \left(\theta < \beta \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (12)$$

は式(7)においてすでに考慮されているから、接触領域における変位の条件

$$\bar{u}_\alpha = {}^0 \bar{u}_\alpha + \sum_{k=1,2,\dots} {}^k \bar{u}_\alpha = I_0 \quad (0 \leq \beta \leq \theta) \quad \dots\dots\dots (13)$$

を満足するように荷重 σ_0 および $p_k (k=1, 2, \dots, K)$ を決めればよい。そのために接触領域内に $(K+1)$ 個の点 $\beta = \beta_j$ を選び、この選点において式(13)を満足させれば次のような $(K+1)$ 元一次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \xi_0 - \sum_{k=1,2,\dots}^K \xi_k \cdot \left(\frac{2G \cdot {}^0 \bar{u}_\alpha}{p_k R} \right)_{\beta=\beta_j} &= \left(\frac{2G \cdot {}^0 \bar{u}_\alpha}{\sigma_0 R} \right)_{\beta=\beta_j} \\ (j=0, 1, 2, \dots, K) \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここで,

$$\xi_0 = 2GI_0/\sigma_0 R, \xi_k = p_k/\sigma_0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(14)を解けば、接触領域 θ に対して未定係数 $\xi_k (k=1, 2, \dots, K)$ が決まり、 ξ_0 より与えられたはめあいしろ I_0 と荷重 σ_0 の関係が、そして ξ_k より p_k が決まるから、無限板の応力および変位が式(6)および式(11)を重ね合わせて求められる。

結局、式(14)を解けば、 I_0/σ_0 と接触領域の関係が決まるから、はめあいしろと接触領域が与えられれば、無限板に作用する引張荷重の大きさが決まることになる。

3. 数値計算とその結果

平面応力状態で無限板のポアソン比 $\nu=0.3$ とし、穴の形状 $\lambda=0$ (円形), 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 の場合について数値計算した。いずれの場合にも $K=50$ すなわち接触領域にその両端を含んで 51 点の選点を定めて、式(14)から ξ_k を決定し、式(6)および式(11)によって応力および変位を求めた。なお接触領域における変位の条件式(13)を無次元化すれば、

$$\frac{2G}{\sigma_0 R}(\bar{u}_a - I_0) = 0 \quad (0 \leq \bar{\beta} \leq \bar{\theta}) \quad \dots\dots\dots (16)$$

となり、この条件式は選点上においてのみ厳密に満足されており、選点間中央での誤差を求めることによって結果の精度を評価することができる。数値計算においては無限級数の項数を最大 $n=600$ 項まで用い、無次元化された応力および変位が小数点以下 4 けた以上有効となるようにした。その結果式(16)の左辺の値は厳密には零となるべきところ、選点間において 10^{-4} 程度となり、この誤差は $(2G\bar{u}_a/\sigma_0 R)$ の最大値の

Fig. 3 Normal displacement distributions along the square hole boundary ($\lambda=0.4$)

Fig. 4 Contact region for fit tolerance and load

0.05%以内に収まっており、十分な精度で満足させることができた。

図3は $\lambda=0.4$ の四角形形状の穴周縁における面に垂直方向の変位 $2G\bar{u}_a/\sigma_0 R$ の分布を示したもので、 $\bar{\beta} = \beta/(\pi/2)$, $\bar{\theta} = \theta/(\pi/2)$ とし $\bar{\theta}=0$ すなわち接触領域が存在しない場合には引張荷重によって穴周縁は自由に変形し、 $\bar{\theta}>0$ の場合には接触領域 ($0 \leq \bar{\beta} \leq \bar{\theta}$) に働く接触圧力によって四角形穴周縁がおしもどされていることを示している。四角形穴周縁の変位 $\bar{u}_a$ は、はめあい前の状態からの変位を示しているから、接触領域 ($0 \leq \bar{\beta} \leq \bar{\theta}$) における $\bar{u}_a$ の値は、はめあいによって生じた変位すなわちはめあいしろ I_0 に等しい。したがって $\bar{\theta}=0.2$ の場合には、わずかのしめしろで四角形充てん物が圧入された状態で、最初は全領域で接触しており負荷によって $0.2 < \bar{\beta} \leq 1.0$ の領域にすきまが生じていることを示している。そしてはめあいしろが大きくなるにつれて負荷後の接触領域は大きくなり、接触領域に対するはめあいしろと荷重の関係を示すと図4のようになる。すなわち、四角形の形状 λ の値によって異なるが、例えば $\lambda=0.4$ のときには $2GI_0/\sigma_0 R \leq -0.978$ の関係あれば負荷後も接触領域は存在しなく、また $2GI_0/\sigma_0 R \geq 2.129$ の関係があれば負荷後も全領域で接触を保っていることになる。これらの値すなわち $\bar{\theta}=0$ および $\bar{\theta}=1.0$ のときの $2GI_0/\sigma_0 R$ の値は表1に示されている。

図5は、四角形穴周縁の α 方向応力 $\bar{\sigma}_\alpha$ すなわち接

Table 1 Value of $2GI_0/\sigma_0 R$

λ	$2GI_0/\sigma_0 R$	
	$\bar{\theta} = 0$	$\bar{\theta} = 1$
0	-0.769	2.046
0.1	-0.821	1.995
0.2	-0.872	1.987
0.3	-0.925	2.028
0.4	-0.978	2.129

Fig. 5 Contact stress distributions on the square hole boundary ($\lambda=0.4$)

Fig. 6 Maximum contact pressure for fit tolerance and load

Fig. 7 Circumferential stress distributions on the square hole boundary ($\lambda=0.4$)

触圧力の分布を $\lambda=0.4$ の場合について示したもので $\bar{\beta}=0$ で最大値をとり接触領域が広がるにつれて接触圧力も増大する。はめあい状態と最大接触圧力の関係を示すと図6のようになり、はめあいしろが大きくなると接触圧力も増大する。また、近似正四角形の角の曲率半径が小さくなるほど、すなわち λ の値が増すと接触圧力は増大する。

図7は、四角形穴周縁の β 方向応力 $\bar{\sigma}_\theta$ の分布を $\lambda=0.4$ の場合について示したもので、接触圧力が小さいときには、 $\bar{\beta}=\bar{\theta}$ の位置で最大値をとり、接触領域が大きくなると $\bar{\beta}=0$ の位置で最大値をとる。はめあい状態と $\bar{\beta}=0, \bar{\theta}, 1$ における応力 $\bar{\sigma}_\theta$ の値との関係を示すと図8のようになり、近似正四角形の角の曲率半径が小さくなるほど、すなわち λ の値が増すにつれて $\bar{\sigma}_\theta$ の値は増大する。そして、はめあいしろが小さいとき $\bar{\beta}=\bar{\theta}$ の位置で最大値をとり、はめあいしろが大きくなると $\bar{\beta}=0$ の位置で最大値をとる。また、はめあいしろの値が増すにつれて、 $\bar{\beta}=1$ における応力 $\bar{\sigma}_\theta$ の値も増大する。

結局、接触領域、応力および変位の状態は、はめあ

Fig. 8 Circumferential stress on the hole boundary for fit tolerance and load

いしろと引張荷重の大きさによって決まる無次元パラメータ $2GI_0/\sigma_0R$ と近似正四角形の形状 λ によって決まる。はめあいしろが零の場合($I_0=0$)にはこのパラメータは荷重の大きさに無関係につねに零になるから、接触領域は変化しない(図4参照)。はめあいしろが正の場合($I_0>0$)、すなわち正四角形穴より充てん物がわずかに大きい場合には、荷重の増大につれてこのパラメータ正の値で零に近づき、接触領域が減少する。はめあいしろが負の場合($I_0<0$)、すなわち正四角形穴より充てん物がわずかに小さい場合には、荷重の増大につれてこのパラメータは負の値で零に近づき、接触領域が増大する。

4. あとがき

近似正四角形剛体充てん物のはめ込まれた無限板に引張荷重が働き、充てん物と穴周縁の一部にすきまのできる混合境界値問題を、充てん物のはめあいしろを考慮して解析した。解析にあたっては、接触圧力分布を収束のよい級数形の重ね合わせで表し選点法を適用して数値計算し、応力や変位および接触領域に与える充てん物のはめあいしろと近似正四角形形状の影響を明らかにした。

文 献

- (1) 浅羽隆太郎, 造船協会会報, 42(1928), 25-49.
- (2) 津村利光, 機誌, 32-142(1929), 77-91.
- (3) 石田誠, 機論, 25-159, 1(1959), 1110-1118.
- (4) 山本照美・津村利光, 機論, 52-475, A(1986), 601-607.
- (5) 山本照美, 機論, 53-486, A(1987), 320-327.
- (6) 山本照美・中切俊行・津村利光, 機論, 53-489, A(1987), 947-953.
- (7) 中原一郎・応用弾性学, (1977), 75, 実数出版.