円環状厚板の軸対称たわみ*
(第1報, 単純支持された円環状厚板)伊藤 金 彌^{*1}, 鈴木 秀 人^{*2}On an Axisymmetric Bending of Annular Thick Plates
(1st Report, Simply Supported Annular Thick Plates)

Kin'ya ITOH and Hideto SUZUKI

In this paper, the problem of annular thick plates sustaining an axisymmetric load is treated using Reissner's theory of plates. The general solutions obtained here contain the corresponding solutions for the case of classical theory predictions in limiting case of above general solutions. In order to determine the significance of effect of the transverse normal stress in addition to the effect of shear deformation, the maximum stresses and deflections for the case of simply supported annular thick plates are numerically obtained and compared with the results of classical plate theory. The numerical results are summarized as technological data. Comparison of corrective value for shearing stress and lateral load with the known exact solution indicates the sufficient accuracy for practical use.

Key Words: Elasticity, Bending, Constitutive Equation, Numerical Analysis, Stress Intensity Factor

1. 緒 言

平板が面に垂直な荷重あるいは板縁に外力を受けてたわむ場合の研究は, 諸機械, 船舶, 航空機, 構造物要素の設計などの実用的観点から重要であり, これまで Poisson-Kirchhoff の理論⁽¹⁾ により問題の解明が行われてきている。この理論は, 等方弾性体を対象とした微小板厚, 微小たわみ, せん断変形の無視, 厚さ方向の垂直応力の無視などの仮定を前提にしている。これらの仮定は理論の簡易化には寄与しているが, それから導かれた結果は, 必然的にこの仮定から強い制約を受けることになる。すなわち, 板のたわみに関する基礎式が重調和形微分方程式となって数学的扱いも比較的容易になる。しかし, せん断変形の効果を無視しているために, 各境界について3個の境界条件を与えることができない。したがって境界あるいは境界近傍における変位, 応力の様相を正しく評価しているとはいえず, さらにまた種々の力学的矛盾を引き出すことさえある。これらの力学的矛盾を解き, 境界あるいはその近傍の変位, 応力状態を正しく求めるためには, 上

述の仮定を除かなければならない。このような古典理論の修正を目的にした厚板に関する理論は多く見受けられるが, Reissner によって導かれた理論⁽²⁾ は, 他の理論と比較して多くの関数を必要とせず, しかもせん断変形, 垂直応力の両効果を含み, 各境界に対して3個の境界条件を与えることができる。この厚板理論によって古典理論の導き出す力学的矛盾を解明できるなど, その有効性も例示されている⁽³⁾⁽⁴⁾。

集中荷重あるいは分布荷重等の表面荷重を受ける円板や環状板は, 機械, 構造物要素としてしばしば見受けられる。これらの変形量, 応力分布の解明は軽量にして堅牢な機械, 構造物の設計製作を行う上でも必要である。実用面からの強い要請に応じて, 円板の軸対称たわみ問題に関する古典理論による解は, 古くから非常によく知られている⁽⁵⁾。しかしこれらの結果は, 必ずしも境界近傍の変位や応力を正しく与えるものではないことは, 上述のとおりである。また円板のある種の問題については厳密解⁽⁶⁾ も知られており, 境界部に生ずる最大たわみ量や応力値, 境界部近傍の応力分布などは, 古典理論と大分その様相を異にする。最大たわみや最大応力値は, 境界部あるいはその近傍に生ずることが多い。ところが設計の基準とするべき変位や応力は, 境界部あるいはその近傍における数値そのも

* 原稿受付 1996年6月20日。

*¹ 正員, 茨城大学大学院 (〒316 日立市中成沢町4-12-1)。*² 正員, 茨城大学工学部。

のであり、古典理論による数値解の修正が必要となる。環状板の軸対称たわみ問題に関しては、Wahl, Lobo⁽⁷⁾ および Beyer⁽⁸⁾ が、古典理論に基づいて問題の解明を行い、最大たわみと最大応力を求めているにすぎない。円板の軸対称たわみ問題にみられるように、厳密解の誘導はきわめて煩雑であり、数値計算もかなりの手数を要する。

本報は、集中荷重あるいは分布荷重を受けて、種々の境界条件のもとにある一様厚さの軸対称たわみ問題に関するものであり、Reissner の厚板理論に基づいて一般解を導いている。次いで、工学的に重要な単純支持された円環状厚板の最大たわみと最大応力の表示式を導いている。得られた結果は、数値計算の容易な形として解が求められており、また、板厚のごく薄い極限の場合として古典理論による解を含むものである。

さらに、一連の板厚、環状板の形状について数値計算を実行し、得られた結果を設計資料として便利な数値表にまとめている。得られた新数値表は一部既知の厳密解との対比によって、実用的に十分な精度を有することを確認している。

2. 基礎式と一般解

Reissner の厚板理論における基礎式を慣用記号を用いて、軸対称性を考慮して極座標表示をすれば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{12M_r z}{h^3} \\ \sigma_\theta &= \frac{12M_\theta z}{h^3} \\ \tau_{rz} &= \frac{3V}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{d}{d\rho}(\rho V) = a(q_2 - q_1) \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{dM_r}{d\rho} + \frac{M_r - M_\theta}{\rho} = aV \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{D}{a} \left[\frac{d\varphi}{d\rho} + \nu \frac{\varphi}{\rho} - \frac{\nu h^2(q_2 - q_1)}{10(1 - \nu)} \right] \\ M_\theta &= \frac{D}{a} \left[\nu \frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{\varphi}{\rho} - \frac{\nu h^2(q_2 - q_1)}{10(1 - \nu)} \right] \\ \varphi &= -\frac{1}{a} \frac{dw}{d\rho} + \frac{12(1 + \nu)V}{5Eh} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに $\rho = r/a$: 無次元半径, a, b : 円環状厚板の外, 内半径, h : 板厚, D : 板のたわみ剛性, z : 板中央面から下方に測る垂直座標, w : 板のたわみ, q_1, q_2 : 板の上, 下面に作用する表面荷重, M_r, M_θ : 半径, 円周方向曲げモーメント, V : 半径方向せん断力, σ_r, σ_θ : 半径, 円周方向垂直応力, τ_{rz} : 半径方向せん断応力, φ : 半径方向回転角。

これらの基礎式を用いて、集中荷重あるいは分布荷

重を受ける各種円環状厚板の軸対称問題について最大たわみ, 最大応力値を求めるための一般解を導く。

$q_2 - q_1 = q(\rho)$ の場合には、式(2)を積分してせん断力が求まる。

$$V = \frac{a}{\rho} \int q(\rho) d\rho + \frac{C_1}{\rho} \dots\dots\dots (5)$$

式(5), (4)および式(3)から回転角の支配方程式が求まる。

$$\rho^2 \frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} + \rho \frac{d\varphi}{d\rho} - \varphi = -\frac{a^2 \rho}{D} \int q(\rho) d\rho + \frac{C_1}{\rho} \dots\dots\dots (6)$$

式(6), (5)および式(4)から変位, 応力合成力を求めることができる。

$q_2 - q_1 = q = \text{const.}$ の場合に得られる一般解をまとめて示す。

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{a}{2}(q_2 - q_1)\rho + \frac{C_1}{\rho} \\ \varphi &= \frac{a^3}{16D}(q_2 - q_1)\rho^3 + \frac{a^2}{2D}C_1 \left(\rho \log \rho - \frac{\rho}{2} \right) \\ &\quad + C_2\rho + \frac{C_3}{\rho} \\ M_r &= \frac{a^2}{16}(3 + \nu)(q_2 - q_1)\rho^2 + \frac{a}{2}C_1 \left[(1 + \nu) \log \rho \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \nu}{2} \right] + \frac{D}{a}(1 + \nu)C_2 - \frac{D}{a}(1 - \nu)\frac{C_3}{\rho^2} \\ &\quad - \frac{h^2}{a^2} \frac{\nu a^2}{10(1 - \nu)}(q_2 - q_1) \\ M_\theta &= \frac{a^2}{16}(1 + 3\nu)(q_2 - q_1)\rho^2 + \frac{a}{2}C_1 \left[(1 + \nu) \log \rho \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - \nu}{2} \right] + \frac{D}{a}(1 + \nu)C_2 + \frac{D}{a}(1 - \nu)\frac{C_3}{\rho^2} \\ &\quad - \frac{h^2}{a^2} \frac{\nu a^2}{10(1 - \nu)}(q_2 - q_1) \\ w &= -\frac{a^4}{64D}(q_2 - q_1)\rho^4 - \frac{a^3}{4D}C_1(\rho^2 \log \rho - \rho^2) \\ &\quad - \frac{a}{2}C_2\rho^2 - aC_3 \log \rho + C_4 \\ &\quad + \frac{h^2}{a^2} \frac{a^4}{20(1 - \nu)D} \left[(q_2 - q_1)\rho^2 + \frac{4}{a}C_1 \log \rho \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに C_1, C_2, C_3 および C_4 は、積分定数であり、境界条件から決定される。また、 $w(\rho=1)=0$ または $w(\rho=b/a)=0$ の条件から積分定数1個を定めれば、たわみの表示式はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 w &= \frac{a^4}{64D} (q_2 - q_1) (1 - \rho^4) \\
 &\quad - \frac{a^3}{4D} C_1 (1 - \rho^2 + \rho^2 \log \rho) + \frac{a}{2} C_2 (1 - \rho^2) \\
 &\quad - a C_3 \log \rho + \frac{h^2}{a^2} \frac{a^4}{20(1-\nu)D} \\
 &\quad \times \left[-(q_2 - q_1) (1 - \rho^2) + \frac{4}{a} C_1 \log \rho \right] \\
 w &= \frac{a^4}{64D} (q_2 - q_1) \left(\frac{1}{m^4} - \rho^4 \right) - \frac{a^3}{4D} C_1 \left(\frac{1}{m^2} - \rho^2 \right) \\
 &\quad + \rho^2 \log m \rho + \frac{a}{2} C_2 \left(\frac{1}{m^2} - \rho^2 \right) \\
 &\quad - a C_3 \log m \rho + \frac{h^2}{a^2} \frac{a^4}{20(1-\nu)D} \\
 &\quad \times \left[-(q_2 - q_1) \left(\frac{1}{m^2} - \rho^2 \right) + \frac{4}{a} C_1 \log m \rho \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)'$$

ここに $m = a/b$.

古典理論による解は、上記解析における $h \rightarrow 0$ の極限の場合として得られる。

3. 具 体 例

単純支持される円環状厚板の具体的な例として Case 1~5 について解を求める。

Case 1 外周単純支持, 内周集中荷重

$q_1 = q_2 = 0$ とおき、軸対称性を考慮すれば、境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \rho = 1/m : V &= -P/2\pi b, M_r = 0 \\
 \rho = 1 : w &= 0, M_r = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式(8), (7')から積分定数が求まる。

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{P}{2\pi a}, \quad C_2 = \frac{aP}{4\pi D} \left[\frac{1}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{\log m}{m^2-1} \right], \\
 C_3 &= \frac{aP}{4\pi D} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\log m}{m^2-1}
 \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

最大たわみ、最大応力はともに円環内周に生ずる。

Fig. 1 Axisymmetric bending of annular plates

$$\left. \begin{aligned}
 w_{\max} &= \frac{a^2 P}{16\pi D} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4(1+\nu)}{1-\nu} \frac{(\log m)^2}{m^2-1} \right] \\
 &\quad + \frac{h^2}{a^2} \frac{a^2 P \log m}{10(1-\nu)\pi D} \\
 \sigma_{\max} &= \mp \frac{P}{h^2} \frac{3(1+\nu)}{2\pi} \left[1 - \nu + 2(1+\nu) \frac{\log m}{1 - \frac{1}{m^2}} \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

応力式の複号は、板の上面、下面を表す。最大たわみ量、最大応力値は、古典理論による解とせん断変形に起因する修正量から構成されている。古典理論のたわみ係数、応力係数⁽⁵⁾にならって厚板理論によるたわみ係数 α 、応力係数 β を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned}
 w_{\max} &= \alpha \frac{a^2 P}{Eh^3} \quad \text{あるいは} \quad w_{\max} = \alpha \frac{a^4 p}{Eh^3} \\
 \sigma_{\max} &= \beta \frac{P}{h^2} \quad \text{あるいは} \quad \sigma_{\max} = \beta \frac{a^2 p}{h^2}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

Case 1 については

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{3(1-\nu^2)}{4\pi} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 4 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{(\log m)^2}{m^2-1} \right] + \frac{h^2}{a^2} \frac{6(1+\nu)}{5\pi} \log m \\
 \beta_1 &= \mp \frac{3}{2\pi} (1+\nu) \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} + 2 \frac{\log m}{1 - \frac{1}{m^2}} \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

以下、同様の取扱いを Case 2~5 の各場合について行い、得られる結果を要約しておく。

Case 2 外周単純支持, 内周滑動, 集中荷重

境界条件: $\rho = 1/m; V = -P/2\pi b, \varphi = 0$

$\rho = 1; w = 0, M_r = 0$

たわみ係数、応力係数:

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= \frac{3}{4\pi} (1-\nu^2) \frac{m^2}{\frac{1-\nu}{1+\nu} + m^2} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} - \frac{2}{m^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{8}{1+\nu} \frac{\log m}{m^2} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{m^4} - 4 \frac{(\log m)^2}{m^2} \right] \\
 &\quad + \frac{h^2}{a^2} \frac{6}{5\pi} (1+\nu) \log m \\
 \beta_2 &= \mp \frac{3}{2\pi} \frac{m^2}{\frac{1-\nu}{1+\nu} + m^2} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \log m \right]
 \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

Case 3 外周単純支持, 内周自由, 分布荷重

境界条件: $\rho = 1/m; V = 0, M_r = 0$

$\rho = 1; w = 0, M_r = 0$

たわみ係数, 応力係数:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{3}{16}(1-\nu^2) \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} - 4 \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{1}{m^2} + \frac{7+3\nu}{1+\nu} \frac{1}{m^4} \right. \\ &\quad + 4 \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{\log m}{m^2} - 16 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{(\log m)^2}{m^2(m^2-1)} \\ &\quad \left. + \frac{h^2}{a^2} \frac{16}{5} \frac{1}{1-\nu^2} \left\{ 1 - \frac{1}{m^2} - 2(1+\nu) \frac{\log m}{m^2} \right\} \right] \\ \beta_3 &= \mp \frac{3}{4}(1+\nu) \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{m^2} - 4 \frac{\log m}{m^2-1} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

Case 4 外周単純支持, 内周滑動, 分布荷重境界条件: $\rho=1/m$; $V=0$, $\varphi=0$ $\rho=1$; $w=0$, $M_r=0$

たわみ係数, 応力係数:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{3}{16}(1-\nu^2) \frac{m^2}{1-\nu+m^2} \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} \right. \\ &\quad - \frac{19+5\nu}{1+\nu} \frac{1}{m^2} + \frac{11+7\nu}{1+\nu} \frac{1}{m^4} + 3 \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{m^6} \\ &\quad - 4 \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{\log m}{m^2} + 4 \frac{9+\nu}{1+\nu} \frac{\log m}{m^4} \\ &\quad + 16 \frac{(\log m)^2}{m^4} + \frac{h^2}{a^2} \frac{16}{5} \frac{1}{1-\nu^2} \left(1 + \frac{1-\nu}{m^2} \right) \left(1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{m^2} - 2 \frac{\log m}{m^2} \right) \left. \right] \\ \beta_4 &= \mp \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-\nu+m^2} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} - \frac{4}{1+\nu} \frac{1}{m^2} \right. \\ &\quad + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{m^4} - 4 \frac{\log m}{m^2} + \frac{h^2}{a^5} \frac{4}{5} \frac{\nu}{1+\nu} \left(1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m^2} \right) \left. \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

Case 5 外周自由, 内周単純支持, 分布荷重境界条件: $\rho=1/m$; $w=0$, $M_r=0$ $\rho=1$; $V=0$, $M_r=0$

たわみ係数, 応力係数:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_5 &= \frac{3}{16}(1-\nu^2) \left[\frac{7+3\nu}{1+\nu} - 4 \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{1}{m^2} \right. \\ &\quad + \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{1}{m^4} - 4 \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{\log m}{m^2} \\ &\quad + 16 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{(\log m)^2}{m^2-1} + \frac{h^2}{a^2} \frac{16}{5} \frac{1}{1-\nu^2} \left\{ -1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m^2} + 2(1+\nu) \log m \right\} \left. \right] \\ \beta_5 &= \pm \frac{3}{4}(1+\nu) \left[-\frac{1+3\nu}{1+\nu} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{m^2} \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{\log m}{1-\frac{1}{m^2}} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

以上, 式(12)~(16)で得られたたわみ係数, 応力係数において $h \rightarrow 0$ の極限の場合をとれば, 古典理論の解に一致する.

4. 数値例および考察

板のたわみに及ぼすせん断変形の効果を明らかにするため Case 1~5 の各場合の一連の板厚, 環状板形状について数値計算を実行し, 古典理論による解と対比している.

板厚: $h/a=0.3, 0.2, 0.1, 0$ (古典理論)形成: $b/a=1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0$ (円板)

式(12)~(16)を用いて, たわみ係数, 応力係数を算出して付表にまとめている.

Reissner の厚板理論によって, 単純支持された円環状厚板の軸対称たわみ問題についてたわみ係数, 応力係数の修正を行ったが, 次のようにしても求められる. 円環状厚板の内周に集中線荷重を受ける場合 (Case 1) の例について考える. 任意断面のせん断力は $V=-P/2\pi r$ であり, その最大値は板中央面に生じ, $\tau_{rz}=-3P/4\pi rh$ である. これに対応するせん断ひずみは, $dw_1/dr=-3P/4\pi rhG$ である. この w_1 がせん断変形を考慮に含めることによって増加した板中央面の増加たわみ量である. これを, $w_1(r=a)=0$ の条件で積分すれば,

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{3P}{4\pi hG} \log \frac{a}{r} \\ \therefore (w_1)_{\max} &= \frac{h^2}{a^2} \frac{a^2 P \log m}{8\pi(1-\nu)D} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

したがって, このような計算法によればせん断変形に起因するたわみの修正量は, 式(10)よりも 25% 大きい. これは, 板中央面の最大せん断ひずみを考えていることから当然の結果といえる.

Fig. 2 Coefficient α_1 in Eqs. (12)

この修正たわみ量は、板厚-外径比の大なるほど、また、円環の内-外径比の小なるほど大きく、式(12)、(17)の諸式は、 $h/a, m \rightarrow \infty$ となるので適用できなくなる。このことは円環形状、板厚とたわみ係数との関係を示した図2からもうかがわれる。内周に集中線荷重を受ける環状板の最大応力値は、古典理論による結果に一致する。

次に、等分布荷重を受ける環状板の例として Case 3 について同様の取扱いをしてみる。

本報の厚板理論による最大たわみ量は、

$$w_{\max} = \alpha_3 \frac{a^4 p}{E h^3} = \frac{a^4 p}{64 D} \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} - \frac{4(3+\nu)}{(1+\nu)m^2} + \frac{7-3\nu}{(1+\nu)m^4} + 4 \frac{(3+\nu) \log m}{(1+\nu)m^2} \right]$$

Fig. 3 Comparison with the exact theory

$$- \frac{16(1+\nu)(\log m)^2}{(1-\nu)m^2(m^2-1)} + \frac{h^2}{a^2} \frac{16}{5(1-\nu^2)} \left\{ 1 - \frac{1}{m^2} - \frac{2(1+\nu) \log m}{m^2} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

任意の断面部の単位長さ当たりの円弧に生ずるせん断力は、 $V = -(p/2)(r - b^2/r)$ である。最大せん断応力は板の中央面に生じ、対応するせん断ひずみは、

$$(\tau_{rz})_{\max} = -\frac{3p}{2h} \left(r - \frac{b^2}{r} \right)$$

$$\therefore \frac{dw_1}{dr} = -\frac{3p}{4hG} \left(r - \frac{b^2}{r} \right)$$

上式を $w_1(r=a)=0$ の条件のもとで積分すれば

$$w_1 = \frac{3p}{8hG} \left(a^2 - r^2 - 2b^2 \log \frac{a}{r} \right)$$

$$\therefore (w_1)_{\max} = \frac{h^2}{a^2} \frac{a^4 p}{16(1-\nu)D} \left(1 - \frac{1}{m^2} - 2 \frac{\log m}{m^2} \right) \dots \dots \dots (19)$$

また、等分布荷重 p の作用により板上面において $\nu p/E$ の半径方向伸びを生じ、板中央面の伸びは、 $\nu p/2E$ となる。この面の曲率は、 $1/R = \nu p/hE$ で与えられる。これに対応する板中央面のたわみ w_2 は、 $-d(-w_2)/rdr = 1/R$ である。この式を $w_2(r=a)=0$ の条件のもとで積分すれば、

$$w_2 = -\frac{1}{2R} (a^2 - r^2) = -\frac{\nu p}{2hE} (a^2 - r^2)$$

$$\therefore (w_2)_{\max} = -\frac{h^2}{a^2} \frac{\nu a^2 p}{24(1-\nu^2)D} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \dots \dots \dots (20)$$

Table 1 Case 1: Coefficients α_1 in Eqs. (12)

b/a h/a	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.551	0.632	0.704	0.733	0.721	0.672	0.590	0.478	0.341	0.181	0
0.1		0.644	0.712	0.739	0.726	0.675	0.592	0.480	0.342	0.182	
0.2			0.736	0.757	0.740	0.686	0.600	0.486	0.346		
0.3				0.787	0.762	0.703	0.613	0.494			

Table 2 Case 2: Coefficients α_2 in Eqs. (13)

b/a h/a	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.551	0.468	0.350	0.241	0.153	0.0877	0.0439	0.0179	0.0051	0.0006	0
0.1		0.479	0.358	0.247	0.158	0.0911	0.0464	0.0197	0.0062	0.0011	
0.2			0.382	0.265	0.171	0.101	0.0540	0.0250	0.0095		
0.3				0.295	0.194	0.119	0.0667	0.0339			

Table 3 Case 3: Coefficients α_3 in Eqs. (14)

b/a h/a	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.696	0.750	0.813	0.831	0.787	0.682	0.530	0.354	0.184	0.0529	0
0.1	0.702	0.755	0.818	0.835	0.790	0.684	0.531	0.355			
0.2	0.720	0.772	0.832	0.846	0.798	0.689	0.534				
0.3	0.750	0.800	0.856	0.865	0.812	0.698					

Table 4 Case 4: Coefficients α_4 in Eqs. (15)

$\begin{smallmatrix} b/a \\ h/a \end{smallmatrix}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.696	0.628	0.493	0.343	0.211	0.113	0.0500	0.0168	0.0035	0.0002	0
0.1	0.702	0.634	0.498	0.347	0.215	0.116	0.0517	0.0178	0.0039	0.0004	
0.2	0.720	0.651	0.513	0.360	0.225	0.123	0.0568	0.0208	0.0054		
0.3	0.750	0.679	0.538	0.381	0.242	0.136	0.0653	0.0260			

Table 5 Case 5: Coefficients α_5 in Eqs. (16)

$\begin{smallmatrix} b/a \\ h/a \end{smallmatrix}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	1.037	1.217	1.309	1.265	1.117	0.902	0.656	0.412	0.202	0.0553	0
0.1		1.247	1.328	1.278	1.126	0.908	0.660	0.415	0.204	0.0558	0
0.2			1.386	1.318	1.155	0.927	0.672	0.422	0.208	0.0573	0
0.3				1.385	1.200	0.959	0.693	0.435	0.214	0.0598	0

Table 6 Case 4: Coefficients β_4 in Eqs. (15)

$\begin{smallmatrix} b/a \\ h/a \end{smallmatrix}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	1.904	1.802	1.585	1.311	1.017	0.734	0.481	0.274	0.122	0.0303	0
0.1	1.905	1.803	1.586	1.312	1.019	0.735	0.482	0.275	0.124	0.0320	
0.2	1.909	1.808	1.591	1.317	1.023	0.740	0.487	0.280	0.129		
0.3	1.916	1.815	1.598	1.324	1.031	0.747	0.495	0.288			

Table 7 Case 1, 2, 3, 5: Coefficients β in Eqs. (12), (13), (14), (16)

$\begin{smallmatrix} b/a \\ \beta \end{smallmatrix}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
β_1	∞	3.222	2.415	1.977	1.688	1.482	1.325	1.202	1.104	1.022	0.954
β_2	∞	2.440	1.746	1.320	1.004	0.753	0.546	0.373	0.227	0.104	0
β_3	2.475	2.379	2.192	1.963	1.710	1.443	1.165	0.881	0.592	0.298	0
β_5	∞	7.641	5.092	3.688	2.745	2.048	1.499	1.045	0.656	0.312	0

古典理論による解に式(19), (20)を加えて, 簡便法によるたわみが, 次のように求まる,

$$w_{\max} = \frac{a^4 p}{64D} \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} - \frac{4(3+\nu)}{(1+\nu)m^2} + \frac{7+3\nu}{(1+\nu)m^4} + \frac{4(3+\nu)\log m}{(1-\nu)m^2} - \frac{16(1+\nu)(\log m)^2}{(1-\nu)m^2(m^2-1)} + \frac{h^2}{a^2} \frac{4}{3(1-\nu^2)} \left\{ (3+\nu) \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) - \frac{6(1+\nu)\log m}{m^2} \right\} \right] \quad (21)$$

古典理論による解は, 式(21)の $h \rightarrow 0$ の極限として求まる。周辺単純支持された等分布荷重を受ける円板に対しては厳密解が求められており, 最大たわみ量も知られている⁽⁶⁾,

$$w_{\max} = \frac{a^4 p}{64D} \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} + \frac{h^2}{a^2} \frac{2}{5} \frac{8+\nu+\nu^2}{1-\nu^2} \right] \quad (22)$$

厚板理論ならびに上述の簡便法による円板の解は, 式(14), (21)における $m \rightarrow \infty$ の極限の場合として, 次のように求まる,

$$w_{\max} = \frac{a^4 p}{64D} \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} + \frac{h^2}{a^2} \frac{16}{5(1-\nu^2)} \right] \quad (23)$$

$$w_{\max} = \frac{a^4 p}{64D} \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} + \frac{h^2}{a^2} \frac{4(3+\nu)}{3(1-\nu^2)} \right] \quad (24)$$

式(23), (24)の第2項が, せん断変形の効果を考慮することによって修正された増加たわみ量である。

これら増加たわみ量 Δw の Poisson 比による変化を図3に示す。板の中央面における垂直応力ならびに最大せん断ひずみの効果に着目する修正法は, 最大たわみ量を過大評価すること, これに対して Reissner の厚板理論によれば過小評価されるが, 厳密解との差異は極めて小さいことがわかる。例えば, $\nu=0.3$ の場合, Reissner の厚板理論による修正量は5%過小であり, 簡便法は31%過大評価される。

等分布荷重を受けて内外周のいずれかが単純支持, 他が自由の境界条件下にある環状板 (Case 3, 5) の最大応力値は, 古典理論による解に一致し, 最大応力値だけが問題となる場合には古典理論によっても差支えないことがわかる。最大たわみ量が問題となる場合には, 厚板理論によらなければならない。

5. 結 論

集中荷重あるいは分布荷重を受けて単純支持の境界条件のもとにある一様厚さの円環状厚板の軸対称たわみ問題の解を Reissner の厚板理論に基づいて導いた。この解は、板厚のごく薄い極限の場合として古典理論による解を含んでいる。得られた主要な結果を要約すれば、次のごとくである。

(1) 工学的に重要な内周あるいは外周が単純支持されて、集中線荷重あるいは等分布荷重を受ける5個の円環状厚板について、最大たわみと最大応力の表示式を板厚ならびに円環形状の関数として求めた。

(2) 集中線荷重を受ける環状板の最大応力値は、せん断変形を考慮することによって修正されない。しかし最大たわみ量が問題となる場合には、厚板理論によらなければならない。

(3) 等分布荷重を受ける環状板の最大応力値は、せん断変形の効果を考慮することによって修正されないが、中央部に角変位を拘束するいわゆる滑動条件を含む場合には、板厚の影響を考慮する必要がある。また、環状板の最大たわみが問題となる場合には、つねに厚板理論によらなければならない。

(4) 板の中央面における垂直応力ならびに最大せ

ん断ひずみの効果に着目する修正法は、最大たわみ量を過大評価するのに対して厚板理論は過小評価するが、厳密解との差異は十分小さく、実用上十分の精度を有する。

(5) 内周あるいは外周が単純支持されて、集中線荷重あるいは等分布荷重を受ける5個の円環状厚板の軸対称たわみ問題について、板厚ならびに円環形状から最大たわみおよび最大応力値を定量的に求めて、設計資料としてまとめた。

文 献

- (1) Timoshenko, S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., (1984), 51-54, McGraw-Hill.
- (2) Reissner, E., *J. Math. Phys.*, **23**(1944), 184-191. Reissner, E., *J. Appl. Mechanics*, **12**(1945), A-69-A-77. Reissner, E., *Q. Appl. Math.*, **5**(1947), 55-68.
- (3) 玉手統・伊藤金彌, 機論, **28**-191(1962), 812-818.
- (4) 玉手統・伊藤金彌, 機論, **29**-200(1963), 750-755.
- (5) Poisson, S. D., *Memoirs of the Academy*, **8**(1829), Paris, 文献(1)の51ページ.
- (6) Love, A. E., *Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., (1926), p. 465, Oxford.
- (7) Wahl, A. M. and Lobo, G., *Trans. ASME*, **52** (1930), 29-43.
- (8) Beyer, K., *Die Statik im Stahlbetonbau*, (1948), 652-660, Berlin.