溶接による座屈変形の整理パラメータに関する研究*

野本 敏治^{*1}, 寺崎 俊夫^{*2}, 前田 和伸^{*3}

Study of Parameters Controlling Weld Buckling

Toshiharu NOMOTO, Toshio TERASAKI and Kazunobu MAEDA

This paper deals with a buckling deformation caused by welding. The welding buckling is affected by welding conditions and sizes of plate. The parameter due to the moving heat source and that due to the residual stress were proposed for arranging the welding buckling. The experiments for making clear the parameter were done under changing welding conditions and plate sizes. The theory for calculating the welding buckling was derived and used for investigating the true parameter. It is clear from the experiment that the welding buckling is caused by the residual stress. The new parameter for arranging the welding buckling is proposed and is proved by the experiment.

Key Words: Buckling, Welded Joint, Finite Deformation Theory, Residual Stress, Energy Method

1. 緒言

溶接された板の座屈強度に関する研究は多く成されており, 種々の知見が報告されている⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾. しかし, 溶接のみによる板の座屈変形挙動を取り扱った研究は以外に少ない⁽⁶⁾⁻⁽⁹⁾. 佐藤⁽⁷⁾は溶接中の座屈変形挙動を測定し, 板厚, 板幅と溶接条件が与えられると固有収縮が計算できる式を導き, 固有収縮から座屈限界長が得られる式を提案している. 一方, 著者の一人である野本⁽⁹⁾は平板の単純支持境界条件において, 溶接条件から導かれる溶接入熱 Q と板厚 h の情報から座屈が生じる限界溶接入熱量 $(Q/h)_cr$ を導くことに成功している. しかし, 今までの研究では, 溶接による座屈変形の原因が十分に解明されていないようである. 例えば, 佐藤⁽⁷⁾のパラメータは溶接中の過渡温度履歴を支配する移動熱源のパラメータから導かれており, 野本⁽⁹⁾のパラメータは残留応力の発生原因である固有ひずみを支配するパラメータに注目している.

本研究では, 最初に溶接による座屈変形の実験を行い, 最新の測定装置を使用して座屈変形の変形挙動を詳細に検討する. 次に, 座屈変形挙動から座屈変形の発生原因を推定して, 座屈変形の整理パラメータを導き, 実験により明らかにする.

Fig.1 Measuring points of temperature and deflection

2. 実験方法

たわみの実験は再現性を重視して, 溶接中のアース点の移動を防止するために, Fig.1 に示すように試験片の四隅のみを単純支持して, アースは一ヶ所のみにした. 次に, 溶接ビードの不連続が座屈変形に影響を与えないように, 溶接始終端にタブ板を設けて試験体に不連続ビードが含まれないようにした. また, タブ板が座屈変形に影響を与えないように, 仮付け溶接を溶接線の一方側にした. そして, 溶接終了後のたわみにタブ板の有無が影響しないことを実験で確認した. 溶接は最も安定なビードが得られるTIG溶接で行った.

座屈の実験では残留応力が大きな影響を与えると考えられるため, すべての試験片は 600°C , 30分の応力除去焼鈍を行った.

座屈変形が生じる時期を調べるために, Fig.1 に示す

* 原稿受付 1996年7月8日.

*¹ 正員, 東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1).*² 正員, 九州工業大学 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1).*³ 九州工業大学大学院.

Fig.2 Definition of maximum deflection

ように板中央部で溶接線から30mm離れた m_3 点の位置にレーザ変位計を取り付けて、溶接中および溶接終了後のたわみの過渡変形を測定した。また、温度分布とたわみの関係を知るために、 m_1, m_2 点にC/A熱電対を取り付け、熱サイクルを測定した。実験に使用した板の寸法は板厚 $h=2.28\text{mm}$ 、板幅 $b=100\text{mm}$ 、板長（溶接長） $a=175\text{mm}$ である。溶接条件は溶接電流175A、アーク電圧18V、溶接速度6.67mm/sである。

溶接終了後のたわみの測定はFig.2に示すA,B,C,D,Eの5点で行い、次式で定義するたわみから最大たわみ $w_{\max}$ を決めた。

$$w_{\max} = w_1 + w_2$$

$$\text{ただし、} w_1 = w_E - (w_A + w_B)/2,$$

$$w_2 = (w_C + w_D)/2 - w_E$$

従来の研究により提案されたパラメータが座屈変形の整理に有効か否かを検討するために、溶接入熱一定の実験と佐藤⁽⁷⁾により提案された移動熱源のパラメータ $I/\sqrt{v}$ 一定の実験を行った。実験条件をTable 1に示す。

次に、本論文で提案する溶接による座屈変形を整理するパラメータを確認する実験として、同一材質で板厚の異なる平板を作成した。目標板厚は2.3mmと

Table 1 Welding condition

I (A)	V (V)	v (mm/s)	Q (J/mm)	$I/\sqrt{v}$ (A/(mm/s) ^{1/2})
100	15	4.0	375	50
200	20	16.0	250	50
125	16	6.17	324	50.3
175	18	10.0	315	55.3

Table 2 Welding condition

h (mm)	I (A)	V (V)	v (mm/s)	Q/h^2 (J/mm ³)
2.22	175	18	6.67	95.8
1.55	175	18	13.8	95.0

Fig.3 Thermal cycle and transitional deflection

1.6mmであったが、平板の板厚を測定するとそれぞれ2.22mmと1.55mmであった。実験に使用した溶接条件をTable 2に示す。

3. 座屈変形の過渡現象

実験結果をFig.3に示す。横軸の時間の原点は溶接スタート後にタブ板から試験片にアークが移動した瞬間である。溶接速度が6.67mm/sであるから、試験片を溶接する時間は26秒であった。図より溶接終了時 $t_f \approx 26\text{s}$ にはたわみはほとんど生じていないことが分かる。溶接線中央部近傍の m_1 点の温度と溶接線から最も離れた板端部の m_2 点の温度がほぼ一致する時間は140秒である。この時間は板厚 h の平板の表面上に瞬間線熱源を投与したとき、板厚方向の温度が一様になる時間を計算する式

$$t_H = 0.56h^2/k$$

ただし、 k ：熱拡散率

に $h=b/2$ を代入して、鋼の熱拡散率を $10\text{mm}^2/\text{s}$ として、計算した値 $t_H=140\text{s}$ にはほぼ一致している⁽⁵⁾。この時間ではたわみの過渡変形はほぼ終了している。従って、座屈によるたわみ変形は溶接入熱による温度上昇が板内部で一様になると終了すると考えられる。板の温度が一様になると板内部に生じている残留応力は変化しなくなることから、座屈は残留応力に起因していると推察される。

4. 座屈変形と溶接条件

佐藤⁽⁷⁾の提案する溶接電流 I (A)と溶接速度 v (mm/s)による移動熱源のパラメータ $I/\sqrt{v}$ を一定にして、実験したたわみをFig.4の△印に示す。たわみの最大値は溶

Fig.4 Parameter Q and $I/\sqrt{v}$ vs. maximum deflection

接速度の影響を受けており、 $I/\sqrt{v}$ はたわみを支配するパラメータになっていない。溶接入熱一定で溶接速度が異なるときのたわみをFig.4に○印で示す。たわみはほぼ一定であり、野本⁽¹²⁾が提案した溶接入熱はたわみの支配パラメータとなっている。溶接入熱は残留応力の支配パラメータであるから、たわみは残留応力を支配する因子、すなわち、固有ひずみを支配する因子の影響を受けていると考えられる。

5. 溶接による座屈変形の整理パラメータ

3, 4章の実験結果から座屈変形は溶接残留応力により生じていると考えられる。従って、座屈変形を支配する因子として、溶接残留応力の原因である固有ひずみを支配するパラメータが考えられる⁽¹¹⁾。

一方、藤田、野本ら⁽⁹⁾は固有ひずみが周辺単純支持平板に存在するときの座屈変形をRayleigh-Ritz法を用いて弾性たわみ理論解析をしている。しかし、この方法ではたわみ以外の面内の変位も仮定しなければならない。その後、藤田、野本ら⁽¹²⁾はたわみのみを仮定したGalerkin法による理論解析を提案し、外荷重による座屈挙動を研究した。

本章では、固有ひずみによる座屈変形の理論式を新たに導き、固有ひずみと溶接による座屈変形の関係を明らかにして、座屈変形の整理パラメータを考察する。

5. 1 理論式

Karman⁽¹³⁾が提案したAiryの応力関数 F を使用する方法を固有ひずみが存在する場合に適用する。初期たわみ w_0 、応力によるたわみを w 、そして全体のたわみを w^T とすると $w^T = w + w_0$ となる。Fig.5に示すように座

Fig.5 Simple supported plate with inherent strain

標 x, y を取り紙面に垂直方向に z 軸を取る。単位板長さ当たりの軸力を N_x, N_y, N_z 、板厚 h 、板幅 b 、板長 a とする。Airyの応力関数 F を用いると

$$N_x = hF_{,yy}, N_y = hF_{,xx}, N_{xy} = -hF_{,xy} \quad (1)$$

ただし、添字 x で微分 $\partial/\partial x$ を意味する

であるから、 x 方向と y 方向の釣合式（平衡方程式）は自動的に満足される。 z 方向の釣合式は溶接を行うときに、横荷重 q が作用することは一般にないため、 $q=0$ となり、

$$\nabla^4 w = h/D \cdot \{F_{,yy}(w+w_0)_{,xx} + F_{,xx}(w+w_0)_{,yy} - 2F_{,xy}(w+w_0)_{,xy}\} \quad (2)$$

となる。

次に、ひずみの適合条件を考える。板の中央面のひずみを添字*を付けて表すと板の中央面でのひずみは

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^T &= u_{,x} + 1/2 \cdot (w_{,x}^T)^2 \\ \varepsilon_y^T &= v_{,y} + 1/2 \cdot (w_{,y}^T)^2 \\ \gamma_{xy}^T &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}^T w_{,y}^T \end{aligned} \quad (3)$$

であるから、変位 u, v を消去してひずみの適合条件を導くと次式となる。

$$\varepsilon_{x,yy}^T + \varepsilon_{y,xx}^T - \gamma_{xy,xy}^T = (w_{,xy}^T)^2 - w_{,xx}^T w_{,yy}^T \quad (4)$$

一方、見かけのひずみは弾性ひずみ、初期ひずみ、固有ひずみの和で与えられるから、応力関数 F により次式のように示される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^T &= \frac{1}{E}(F_{,yy} - \nu F_{,xx}) + 1/2 \cdot (w_{0,x})^2 + g_x \\ \varepsilon_y^T &= \frac{1}{E}(F_{,xx} - \nu F_{,yy}) + 1/2 \cdot (w_{0,y})^2 + g_y \\ \gamma_{xy}^T &= -\frac{2(1+\nu)}{E}F_{,xy} + w_{0,x}w_{0,y} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、固有ひずみは z の関数でない
適合条件式(4)に式(5)を適用すると応力関数で表したひずみの適合条件式が得られる。

$$\nabla^4 F/E = w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} + 2w_{0,xy}w_{,xy} - w_{0,xx}w_{,yy} - w_{0,yy}w_{,xx} - g_{x,yy} - g_{y,xx} \quad (6)$$

式(2),(6)が固有ひずみと初期たわみが存在するときのKarmanの式となる。Karmanの式は変位 u, v を含まないため、たわみ w のみの仮定で解が得られる。

次に、座屈変形を全ポテンシャルエネルギー Π を用いたエネルギー法で解く⁽¹⁴⁾。溶接の問題では一般に外荷重が作用しないため、外力のポテンシャルエネルギー V が零となり、全ポテンシャルエネルギーは次式に示すように、ひずみエネルギー U に等しくなる。

$$\Pi = U + V = U$$

平板に蓄えられるひずみエネルギーは次式で与えられる。

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x^e + \sigma_y \epsilon_y^e + \tau_{xy} \gamma_{xy}^e) dV \\ = \frac{1}{2Eh} \int_0^b \int_0^a \{ N_x^2 + N_y^2 - 2\nu N_x N_y + 2(1+\nu) N_{xy}^2 \} dy dx \quad (7) \\ + \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \{ (\kappa_x^e)^2 + (\kappa_y^e)^2 + 2\nu \kappa_x^e \kappa_y^e + (1-\nu)/2 \cdot (\kappa_{xy}^e)^2 \} dy dx$$

$$\text{ただし, } \kappa_x^e = -w_{,xx}, \quad \kappa_y^e = -w_{,yy}, \quad \kappa_{xy}^e = -2w_{,xy}$$

平衡条件は全ポテンシャルエネルギーの第一変分 $\delta\Pi=0$ より求められ、安定条件は第二変分が $\delta^2\Pi>0$ の条件である。従って、座屈条件は一つの安定な状態から他の安定な状態に移行する分岐点(bifurcation point)と考えられ、

$$\delta^2\Pi = 0 \quad (8)$$

の条件で与えられる⁽¹⁴⁾。

Fig.5に示す周辺単純支持された平板に固有ひずみが斜線領域に存在する場合を例として、以下に示す具体的な解法の手順に従って計算する。

(a) たわみ w を問題の境界条件を満足する3角級数で仮定する。

(b) 式(6)を満足する応力関数 F を誘導する。

(c) 仮定したたわみの式から曲率を計算する。

(d) 式(7)よりひずみエネルギー U を求め、ポテンシャルエネルギー Π を導く。

(e) 仮定したたわみ w の未知係数は第1変分式より得られる平衡方程式より導く。

(f) 座屈の条件は第2変分より得られる安定条件式(8)より得る。

周辺単純支持された状態でのたわみ w と初期たわみ w_0 を次式で仮定する。

$$w = W \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (9) \\ w_0 = W_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

ただし、 W は未知係数
溶接線方向の固有ひずみを次式で与える。

$$g_x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{0i} \cos \frac{2i\pi y}{b} \quad (10)$$

式(6)より応力関数 F を求めると

$$F/E = 1/32a^2b^2 \cdot (W^2 + 2WW_0) \{ a^4 \cos(2\pi x/a) + b^4 \cos(2\pi y/b) \} + b^2/4\pi^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_{0i}/i^2) \cdot \cos(2i\pi y/b)$$

となる。この応力関数と式(9)のたわみよりひずみエネルギー(全ポテンシャルエネルギー)は

$$U = Eh\pi^4 ab/256 \cdot (1/a^4 + 1/b^4) (W^2 + 2WW_0)^2 \\ + Eh\pi^2 b\alpha_{01}/16a \cdot (W^2 + 2WW_0) + Ehab/4 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_{0i})^2 \\ + Eh^3\pi^4 ab/96(1-\nu^2) \cdot W^2(1/a^2 + 1/b^2)^2$$

となる。第一変分式より $\partial U/\partial W=0$ となり、たわみの未知係数 W は次式の解となる。

$$W^3 + 3W_0W^2 + \{2W_0^2 + 4h^2(1+\beta^2)/3(1-\nu^2)(1+\beta^4) + 8a^2\alpha_{01}/\pi^2(1+\beta^4)\}W + 8a^2\alpha_{01}/\pi^2(1+\beta^4) \cdot W_0 = 0 \quad (11)$$

$$\text{ただし, } \beta \equiv a/b$$

式(11)は藤田、野本ら⁽¹²⁾が提案したGalerkin法による計算結果と同じになる(著者らが確認する)。

座屈条件は第二変分式より $\partial^2 U/\partial W^2=0$ となる。

$$3W^2 + 6W_0W + \{2W_0^2 + 4h^2(1+\beta^2)/3(1-\nu^2)(1+\beta^4) + 8a^2\alpha_{01}/\pi^2(1+\beta^4)\} = 0 \quad (12)$$

5. 2 整理パラメータ

初期たわみが存在するときは式(12)の条件で座屈を生じる。しかし、物理的には“初期たわみが存在すると、たわみが連続変化するため座屈の限界条件は存在しない”という考えもある。本論文の目的は平板を溶接したときの溶接による座屈のパラメータを明らかにすることであるから、初期たわみ零の場合を対象にする。そうすると式(12)は W_0 を零とした次式となる。

$$3W^2 + 4\{h^2(1+\beta^2)/3(1-\nu^2) + 2a^2\alpha_{01}/\pi^2\}/(1+\beta^4) = 0$$

上式においてたわみが存在する条件は実根を持つこと

Fig.6 Butt joint

より

$$\alpha_{01} \leq -\pi^2 h^2 (1 + \beta^2)^2 / 6a^2 (1 - \nu^2) \quad (13)$$

となる。従って、式(10)に示される固有ひずみ g_x をフーリエ展開した係数 α_{01} が板の寸法で決まる式(13)の右辺の値より小さくなれば、座屈を生じることになる。

溶接により生じる固有ひずみ分布は著者の一人である寺崎^{(11),(17)}が明らかにしたように熱弾塑性パラメータにより決定される。溶接現象での熱弾塑性パラメータの誘導過程を以下に要約する。Fig.6に示すように平板を突合せ溶接したときの任意点の温度 θ は次式に示すように、平均温度上昇 T_{av} のパラメータで決まる。

$$\theta - \theta_i = T_{av} \{ u_p(\tau, Y) + \sum_{n=1}^{\infty} u_p(\tau, Y \pm 2n) \} \quad (14)$$

ただし、 $Y = y/b$, $\tau = 2\sqrt{kt}/b$, $T_{av} = Q/(cphb)$,

$$u_p(\tau, Y) = \exp(-Y^2/\tau^2)/\tau\sqrt{\pi}$$

θ_i : 平板の初期温度, c : 比熱, ρ : 密度, k : 熱拡散率, t : 熱源投与後の時間, Q : 溶接入熱

従って、2枚の相似板を比較したとき、平均温度上昇 T_{av} が等しければ、相似点 $P(Y)$ の温度及び時刻 τ と $\tau + \Delta\tau$ 間の温度変化は等しくなり、相似板に生じる固有ひずみと残留応力は相似点で等しくなる。以上の式では、物理的に理解しやすい平均温度上昇を得るために、相似の基準となる寸法として板幅 b を考えた。座屈では板厚 h が重要であるから、相似の基準寸法として板厚 h を考えて整理すると、温度の式は次式となり

$$\theta - \theta_i = Q/h^2 \cdot \{ u_p(\tau^*, Y^*) + \sum_{n=1}^{\infty} u_p(\tau^*, Y^* \pm nB^*) \} \cdot 1/cp \quad (15)$$

ただし、 $Y^* = y/h$, $\tau^* = 2\sqrt{kt}/h$, $B^* = b/h$

相似板の固有ひずみを支配する入熱因子は Q/h^2 となり、相似板の板の因子 $A^* = a/h$, B^* を用いると、相似点の固有ひずみは次式に示す因子の関数となる。

$$g(x/h, y/h) = f(Q/h^2, a/h, b/h) \quad (16)$$

従って、式(13)の左辺 α_{01} は式(16)の右辺の関数となる。

Fig.7 Inherent strain distribution

溶接により生じる固有ひずみ分布を測定した実験値は存在しないが、有限要素法による熱弾塑性解析や一次元熱弾塑性解析によると、固有ひずみは溶接線を中心にした台形で概ね近似できる^{(15),(16)}。そこで、Fig.7に示すように固有ひずみ分布を台形近似して、この台形をフーリエ級数展開すると α_{01} は次式となり

$$\alpha_{01} = g_0 \{ \cos(2\pi y_1/b) - \cos(2\pi y_2/b) \} / \{ \pi^2 (y_2/b - y_1/b) \}$$

更に、次のように書き換えられる。

$$\alpha_{01} = g_0 \{ \cos(2\pi Y_1^*/B^*) - \cos(2\pi Y_2^*/B^*) \} / \{ \pi^2 (Y_2^*/B^* - Y_1^*/B^*) \} \quad (17)$$

ただし、 $Y_1^* = y_1/h$, $Y_2^* = y_2/h$

式(17)の Y_1^* , Y_2^* は式(16)より右辺のパラメータが同じ時には等しくなる。

一方、式(13)の右辺は次式のように書き換えられる。

$$-\pi^2 \{ 1 + (A^*/B^*)^2 \}^2 / 6(1 - \nu^2) A^{*2} \quad (18)$$

式(17),(18)より、溶接による座屈の条件式(13)は式(16)に示す相似則のパラメータ

$$Q/h^2, a/h, b/h \quad (19)$$

で決定される。

6. 整理パラメータの有効性

板厚を相似寸法の基準にして入熱のパラメータ $Q/h^2 = 95 \text{ J/mm}^3$ の条件で実験した結果をTable 3及びFig.8に示す。溶接入熱が $Q=228$ と 473 (J/mm) 、板幅が70と100mmと変化しているにもかかわらず、5章で提案した相似則のパラメータが同じ値ならたわみの最大値 $w_{\max}$ も $w_{\max}/h$ で整理するとはほぼ一本の曲線上に載っていると見なせる。Table 3に*印を付けた実験値 $w_{\max}/h = 0.50$ の実験で得られたたわみの等高線をFig.9に示す。座屈の特徴である馬の背の傾向が現れようとしており、Fig.8の図中の破線近傍が座屈変形が生じているか否かの境界となる。

Fig.8より板厚の異なる二つの試験片の座屈変形挙動

Table 3 Experimental results of deflection in the similar plate

h (mm)	a (mm)	b (mm)	a/h	b/h	Q (J/mm)	Q/h^2 (J/mm ³)	$w_{\max}$ (mm)	$w_{\max}/h$
2.22	75	100	33.8	45.0	473	95.8	0.27	0.12
	100		45.0				0.74	0.33
	125		56.3				2.06	0.93
	150		67.6				5.18	2.33
	175		78.8				6.13	2.76
1.55	70	70	45.2	45.2	228	95.0	0.25	0.16
	70*		45.2*				0.78*	0.50*
	87		56.1				2.10	1.35
	87		56.1				2.46	1.59
	104		67.1				2.94	1.90
	104		67.1				4.11	2.65
	122		78.7				4.89	3.15
	122		78.7				5.35	3.45

Fig.8 Arrangement of deflection based on parameters of similar law

は同じと見なせる。従って座屈の発生限界値も同じと考えられる。以上より、溶接による座屈変形の限界値を研究する場合には、整理パラメータ Q/h^2 , $b/h, a/h$ が重要となる。

7. 結論

本論文で得られた主な結論を以下に示す。

- (1) 溶接による座屈変形の過渡変形と熱サイクルを測定した結果、座屈変形は溶接残留応力により生じていると考えられる。
- (2) 移動熱源によるパラメータを一定として座屈変形の実験をしたが、座屈変形は移動熱源のパラメータよりは残留応力のパラメータである溶接入熱の関数であった。
- (3) 溶接による座屈変形を整理するパラメータを残留応力の発生原因である固有ひずみに注目して、理論的

Fig.9 Contour line of deflection

に導いた。パラメータは溶接入熱と板の寸法で決まる $Q/h^2, a/h, b/h$ である。

(4) 溶接による座屈変形の整理パラメータの有効性を実験により証明した。

謝辞

薄板を提供していただいた日本鋼管(株)総合材料技術研究所の樺沢真事氏に感謝致します。

参考文献

- (1) 増淵興一, 小椋陽, 石原芳忠, 星野二郎, 造船協会論文集, 95 (1954), 161-171
- (2) 渡辺正紀, 佐藤邦彦, 溶接力学とその応用, 朝倉書店 (1965), 408, 533
- (3) 山本善之, 造船協会論文集, 97 (1955), 57-68
- (4) 藤田譲, 造船協会論文集, 102 (1957), 219-225
- (5) 上田幸雄, 安川度, 矢尾哲也, 池上博, 大南亮一, 日本造船学会論文集, 104 (1976), 205-209
- (6) T. Mura, Pro. 3rd Japan National Congress for Applied Mechanics, (1953), 103-106
- (7) 渡辺正紀, 佐藤邦彦, 溶接学会誌, 27 (1958), 313-320
- (8) 吉識雅夫, 藤田譲, 川井忠彦, 造船協会論文集, 107 (1960), 187-194
- (9) 藤田譲, 野本敏治, 寺井精英, 松井繁朋, 木下統雄, 日本造船学会論文集, 142 (1977), 182-189
- (10) 寺崎俊夫, 石本憲司, 溶接学会論文集, 9(1991), 446-451
- (11) 佐藤邦彦, 寺崎俊夫, 溶接学会誌, 45 (1976), 150-156
- (12) 藤田譲, 野本敏治, 仁保治, 吉江淳彦, 日本造船学会論文集, 146 (1979), 289-297
- (13) Karman, T.V., Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften, Vol.IV(1910), p.349; Timoshenko, S. and Gere, J., Theory of Elastic Stability, Second Edition (1961), p.347, McGraw-Hill
- (14) Dym, C.L. and Shames, I.H., Solid Mechanics, (1973), McGraw-Hill, 訳本, 砂川恵訳, p.423, プレイン図書
- (15) 寺崎俊夫, 大阪大学学位論文(1976), p.24
- (16) 辻勇, 日本造船協会論文集, 118(1965), 307-317
- (17) 寺崎俊夫, 横島直彦, 材料, 30(1981), 777-783