内側き裂を有する中空軸丸棒の応力解析*

河 栄 旻^{*1}, 江 角 務^{*2}, 高 橋 賞^{*3}Stress Analyses of Hollow Cylinder with
Inner Cracks Subjected to Torsion

Youngmin HA, Tsutomu EZUMI and Susumu TAKAHASHI

Stress intensity factors are important parameters affecting stress-strain behavior in the vicinity of a crack tip. They are used for the strength evaluation of machines, structures, and various machine elements. In fracture problems, stress intensity factors obtained theoretically and experimentally have been effectively utilized in the analytical evaluation of the effect of cracks. The effect of surface crack of a cylindrical and a hollow cylindrical bar is investigated, as well as the effect of the thickness of a hollow cylindrical bar and an inclined crack of a hollow cylinder subjected to torsion. In this study, stress intensity factor K_{III} of mode III which expresses the stress state in the neighborhood of a crack tip is used. Stress analysis was conducted on the inside of a hollow cylinder in the axial direction of a three-dimensional crack tip subjected to torsion by combining the caustic method and the stress freezing method.

Key Words: Stress Intensity Factor, Experimental Stress Analysis, Elasticity, Torsion, Fracture Mechanics

1. 緒 論

実際、構造物部材中には製造過程に発生する微少な初期クラックを含むまたは使用中にクラックが発生する場合が多い。いったんクラックが発生すると破壊はクラック先端近傍の応力やひずみの分布状態に支配されるようになり、材料力学の力学的パラメータは適用できなくなる。このような理由で破壊力学では、クラック先端近傍の応力とひずみの分布状態を表す K (応力拡大係数) や G (エネルギー解放率) を力学的パラメータとして使用する。破壊力学は、クラックを有する機械や構造物の破壊防止を目的として発展してきた背景には、さまざまな工業現象があつてクラックをもつ部材の強度を扱う必要性が増大してきた。この要求に応じて発達した破壊力学は、理論面では各種形状のクラックをもつ二次元および三次元物体に対して K の値を理論解析により求める研究が多く行われた。また、実験面ではクラックを有しても簡単には破壊されない強い材料を選別する実験法を実用化させること

ができ、材料の改善および新しい材料の開発に寄与することができた。したがってさまざまなき裂を有する部材の破壊力学的な解析は工業的にまたは経済的にも重要であると思われる。

前回までの一連の研究では、ねじりトルクを受ける中空丸棒の外部表面き裂⁽¹⁾⁻⁽³⁾の影響およびき裂の角度を変えた傾斜き裂の影響、また外径と内径の比を変え肉厚の影響を調べた。本研究では比較的簡単な光学系のコースティックス法と応力凍結法を併用し、ねじりトルクを受ける中空軸丸棒の面内(内側)に内部円弧、内部軸方向に三次元き裂を入れ、き裂先端の応力解析を行い、内部き裂の影響および破壊挙動を明らかにした。

2. 試 験 片

本実験に使用した材料は、エポキシ CT-200 に硬化剤 HT903 を重量比 100:30 で混合したものを使用した。中空軸丸棒の長さは 200 mm、直径 55 mm、中空径 14 mm の試験片を用意して軸方向で二つに切断し、厚さ 0.50 mm、直径 100 mm のカットで中空丸棒の内側の軸方向に対して垂直にき裂を入れた。さらに十分な鋭さをもつき裂先端を得るため最後に、中空軸丸棒をカミの中に入れて 125°C まで温度を上げ 2 時間保つ

* 原稿受付 1996 年 7 月 19 日。

*¹ 学生員、関東学院大学大学院(〒236 横浜市金沢区六浦町 4834)。*² 正員、芝浦工業大学(〒108 東京都港区芝浦 3-9-14)。*³ 正員、関東学院大学工学部。

た後、ただちに剃刀を用いてき裂先端を慎重に加工し、切断された二つの試験片を同じ重量比で混合したエポキシ樹脂で貼り合わせ旋盤で加工を行った。最終的に長さ 200 mm、直径 52 mm、中空径 16 mm の試験片を制作した。き裂深さ a は内部円弧き裂の場合約 8 mm、内部の軸方向き裂の場合は 3 mm、6.8 mm、8.5 mm とした。試験片の制作中に発生する残留応力を取り除くためアニーリングを行った。本実験に用いた高温硬化形エポキシ樹脂の応力凍結温度 125°C での材料特性は、ヤング率 $E=17.13$ MPa、ポアソン比 $\mu=0.484$ である。また、表 1 に試験片の諸元を示す(ここで、円弧き裂の長さは 54 mm~55 mm であり、軸方向き裂の長さは約 140 mm、 D は直径、 r は内径、 a は

き裂長さ、 R は半径、 T はトルク、 α は光弾性感度である)。

3. 実験方法

本実験には、静的ねじり試験機を使用した。試験片が軸方向の応力を受けないよう左側を固定し右端の軸方向は自由にして、右端に偶力を加えてねじりを負荷した。応力凍結は丸棒全体が均一温度になるように炉内温度を 125°C まで到達させてから 5 時間後に荷重を負荷し、8 時間保った後、2.5°C/h の温度降下により 25~30°C まで徐冷し応力凍結を完了した。図 1、2 に示すような内側き裂を有する中空軸丸棒がねじりトルクが負荷された試験片をき裂前縁に対して垂直の方向に平均 5 mm の厚さに図 3 のようにスライスした。スライス片の表面を平滑に研磨し応力凍結時と同一サイクルでアニーリングし、凍結した応力を解放させると、き裂表面には凍結前のねじりトルクに対応した変形が生じる。この変形を図 4 の反射形コースティックス像形成装置を用いて面外せん断形の応力拡大係数 $K_{III}^{(1)-(3)}$ および無次元化した応力拡大係数 F_{III} の値を求め、中空丸棒の内部き裂の影響を調べた。

本実験のコースティックス装置には反射形の発散光を用いた。光源にはレーザ発振出力 5 mW の He-Ne ガスレーザを使用した。

Table 1 Dimensions of test specimens

(Inside arc crack)						
No	D mm	r mm	a mm	a/R	T N·m	α mm/N
1	52	16	7.91	0.3	3.6	3.94
2	52	16	7.87	0.3	3.6	3.92
3	52	16	7.93	0.3	3.6	3.85

(Inside axial directional crack)						
No	D mm	r mm	a mm	a/R	T N·m	α mm/N
1	52	16	3	0.192	3.6	3.94
2	52	16	6.8	0.285	3.6	3.92
3	52	16	8.5	0.380	3.6	3.85

Fig. 1 Outside view of test specimen with inside arc crack

Fig. 2 Outside view of test specimen with inside axial directional crack

Fig. 3 Slice location

4. コースティックス法による

 K_{III} の算定⁽⁴⁾⁽⁵⁾

応力拡大係数の測定に有力なコースティックス法と応力凍結法を併用し、三次元内部き裂に対して実験的に解析し難い面外せん断形の応力拡大係数 K_{III} を求めた。ねじり応力を凍結した三次元き裂を有する中空丸棒をスライスし、アニーリングによって凍結された応力を解放すると、スライス片上のき裂先端近傍に変形が生じるため入射光の光路長が変化し、その結果としてスクリーン上にコースティックス像が形成される。

き裂先端の座標系を図5のように決めると、モードIIIのみのとき、き裂近傍 Z 方向の変位 w は次のようになる。

$$w = \frac{2rK_{III}}{G(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで G は横弾性係数、 r, θ はき裂先端に原点を置いた極座標での動径と偏角である。

本研究で、コースティックス法を用いて応力拡大係数 K_{III} を測定する場合には、図6のように試験片上の一点 $P(x, y)$ で反射する発散光の光路について考える。スクリーン上における X, Y 軸の光の位置は次式で与えられる。

Fig. 4 Optical setup for experiment using reflected caustics with divergent light

Fig. 5 The coordinate system of crack tip for mode III

$$\left. \begin{aligned} X &= \lambda x - 2Z_0 \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ Y &= \lambda y - 2Z_0 \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 λ は発散光の投影倍率で次式で定義される。

$$\lambda = (Z_0 + Z_i) / Z_i \quad \dots\dots\dots (3)$$

Z_0 は試験片とスクリーンの距離、 Z_i は発散光の焦点の位置と試験片との距離である。式(1)を微分すると、式(4)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= -\frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2} G} \sin \frac{\theta}{2} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2} G} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(2)の x, y を極座標 r, θ に変換して、式(4)を式(2)に代入すると、 X, Y は次式のように表される。

Fig. 6 Light ray deflection for mode III deformation

Fig. 7 Stress component of crack tip for mode III

Fig. 8 Theoretical caustic pattern for mode III

$$\left. \begin{aligned} X &= \lambda r \cos \theta + 2Z_0 \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2} G} \sin \frac{\theta}{2} \\ Y &= \lambda r \sin \theta - 2Z_0 \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2} G} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

スクリーン上で物体と光は1対1の対応ではなく、数学的には特異点の存在と対応しており、そのような状態が存在するための条件はヤコビアン行列式が零になることである。

$$J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= r\lambda^2 - r^{-2} Z_0^2 \frac{K_{III}^2}{2\pi G^2} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

式(6)を r について解くと、

$$r = \left(\frac{Z_0 K_{III}}{\sqrt{2} \pi \lambda G} \right)^{2/3} \equiv r_0 \dots\dots\dots (7)$$

になる。 r_0 は初期曲線である。反射光がスクリーン上に形成する像の形状は式(5), (7)より次式のように表すことができる。

(a) $K_{III} = 0.3229 \text{ [MPa} \cdot \text{mm}^{1/2}]$, $Y_{\max} = 44.6 \text{ mm}$
 $Z_i = 31 \text{ mm}$, $Z_0 = 671 \text{ mm}$, $\lambda = 22.6451$

(b) $K_{III} = 0.2763 \text{ [MPa} \cdot \text{mm}^{1/2}]$, $Y_{\max} = 38.5 \text{ mm}$
 $Z_i = 37 \text{ mm}$, $Z_0 = 680 \text{ mm}$, $\lambda = 19.3783$

(c) $K_{III} = 0.2621 \text{ [MPa} \cdot \text{mm}^{1/2}]$, $Y_{\max} = 36.45 \text{ mm}$
 $Z_i = 39 \text{ mm}$, $Z_0 = 678 \text{ mm}$, $\lambda = 18.3846$

(d) $K_{III} = 0.1934 \text{ [MPa} \cdot \text{mm}^{1/2}]$, $Y_{\max} = 31.6 \text{ mm}$
 $Z_i = 30 \text{ mm}$, $Z_0 = 662 \text{ mm}$, $\lambda = 23.0666$
 (in case of inside axial directional crack)

(e) $K_{III} = 0.5107 \text{ [MPa} \cdot \text{mm}^{1/2}]$, $Y_{\max} = 49.0 \text{ mm}$
 $Z_i = 75 \text{ mm}$, $Z_0 = 716 \text{ mm}$, $\lambda = 10.55$
 (in case of inside arc crack)

Fig. 9 Experimental caustic patterns for mode III

$$\begin{aligned} X &= \lambda r_0 (\cos \theta + 2 \sin \theta / 2) \\ Y &= \lambda r_0 (\sin \theta - 2 \cos \theta / 2) \end{aligned} \quad (8)$$

図8は、 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲について式(8)より得られるモードIIIのコースティックス像⁽⁶⁾である。クラック線に対して、垂直方向のコースティックス像の実際の最大寸法を $Y_{\max}$ とすると

$$Y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \lambda r_0 \quad (9)$$

なる関係が得られる。したがって初期曲線 r_0 は上式より、次のように表すことができる。

$$r_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{Y_{\max}}{\lambda} \quad (10)$$

応力拡大係数 K_{III} は式(7)、(10)より

$$K_{III} = 0.5986 \frac{G Y_{\max}^{3/2}}{Z_0 \lambda^{1/2}} \quad (11)$$

と表すことができる。したがって、コースティックス像の最大寸法 $Y_{\max}$ を測定すれば、 K_{III} 値がただちに得られることがわかる。

中空丸棒の面外せん断形の無次元化応力拡大係数 F_{III} の値は次式で示される。

$$\begin{aligned} F_{III} &= \frac{K_{III}}{K_0}, \quad K_0 = \frac{2TR_2}{(R_2^3 - R_1^3)\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \\ F_{III} &= \frac{K_{III}(R_2^3 - R_1^3)}{2TR_2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (12) \end{aligned}$$

ここで、 a はき裂深さ、 T はねじりモーメント、 $R_1 \cdot R_2$ は中空丸棒試験片の内径と外径である。図7にモードIIIにおけるき裂先端近傍の応力成分を示す。

5. 実験結果および考察

図9に、本実験で使用した中空軸丸棒モデルのスライス片を表面反射形コースティックス像形成装置より

撮影したコースティックス像写真を示す。図1のように中空軸丸棒の内部円弧き裂を有する試験片がねじりモーメントを受ける場合は、き裂先端およびき裂形状に沿って測定可能な等色線しまループは現れないが、小さくて測定不可能な等色線は現れることを確認した。このことにより内部円弧き裂を有する中空軸丸棒がねじりモーメントを受けると開口形の応力拡大係数 K_I は零であり、面内せん断形の応力拡大係数 K_{II} は存在するがあまりにも小さくてほぼ零であると考えられる。また、図4-7に示すようなき裂先端近傍に表面変形(τ_{xz} , τ_{yz} に対応した変形)は現れないが、き裂先端近傍の応力成分として τ_{xz} と τ_{yz} は存在すると考えられる。すなわち、面外せん断形の応力拡大係数 K_{III} は存在すると思われる。したがって、 K_{III} の値を求めるため、応力凍結時と同一サイクルでアニーリングし凍結した応力を解放させるとスライス片が凍結前の状態に回復し、表面変形が生じき裂先端近傍の板厚変化および光の屈折率の変化が生じる。さらに入射した光の光路長が変化し、光の方向が曲げられ、その結果としてスクリーン上に図9のようなコースティックス像が形成される。図4に示すようなコースティックス装置より K_{III} の値を求めた結果、図2のような内部軸方向き裂の場合はき裂の深さが増すと K_{III} の値は大きくなる。図1のような内部円弧き裂の場合は、き裂の最深点で K_{III} の値は最も大きく、中空円柱内面(中空軸丸棒の中心)に近づくほど K_{III} の値は減少することを確認した。この結果は、円弧表面き裂(外側)を有する中空軸丸棒のねじりによる K_{III} の値の傾向とよく一致することがわかった。このことより内側き裂を有する中空丸棒のねじりによる破壊挙動を明らかにするこ

Fig. 10 Distribution of stress intensity factor K_{III} along the crack front

Fig. 11 Distribution of nondimensional stress intensity factor F_{III} of inside arc crack

Fig. 12 Distribution of stress intensity factor K_{III} of inside axial directional crack

とができた。すなわち、図 1, 2 に示すような形状の試験片が破壊される場合は、き裂の最深点でクラックが発生し、外側に広がり破壊に至ると考えられる。図 10 にき裂前縁に沿っての応力拡大係数 K_{III} の分布を示す。

6. 結 論

実験的に応力拡大係数を求めるのに有効な手段の一つであるコースティックス法と応力凍結法を併用して、ねじりトルクを受ける内部三次元き裂を有する中空軸丸棒の応力解析を行い、無次元化した応力拡大係数 F_{III} を求め、内部き裂の影響および破壊挙動について実験的に検討した。この結果次の知見が得られた。

(1) 中空軸丸棒の内側き裂を有する試験片の K_{III} 値を求め、破壊挙動を明らかにすることができた。

(2) 中空軸丸棒の内部円弧き裂を有する試験片がねじりモーメントを受ける場合は、き裂先端およびき裂形状に沿って測定可能な等色線しまループは現れないが、小さくて測定不可能な等色線は現れることを確認した。このことにより内部円弧き裂を有する中空軸丸棒がねじりモーメントを受けると K_I は零であり、

Fig. 13 Distribution of nondimensional stress intensity factor F_{III} of inside axial directional crack

K_{II} は存在するがあまりにも小さくてほぼ零であり、 K_{III} が主として存在することがわかった。

(3) 内部軸方向き裂の場合は、き裂の深さが大きくなるにつれ K_{III} の値は増加することを確認した。

(4) 内部円弧き裂の場合は、き裂の最深点において K_{III} の値は最も大きく、中空円柱内面(中空軸丸棒の中心)に近づくほど K_{III} の値は減少することを確認した。

(5) 内側き裂を有する中空軸丸棒のねじりによる破壊は本実験結果からき裂の最深点でクラックが発生し、外側に広がり破壊に至ると考えられる。

文 献

- (1) 呉大方・高橋賞・江角務, 機論, **56** 527, A(1990), 53-58.
- (2) 呉大方・高橋賞, 機論, **58** 546, A(1992), 353-360.
- (3) 河栄旻・江角務・高橋賞, 機論, **61** 585, A(1995), 869-875.
- (4) Theocaris, P. S., *Int. J. Mech. Sci.*, **23**(1981), 105-112.
- (5) 清水紘治・高橋賞, 非破壊検査, **31** 4 (1982), 253-257.
- (6) Kalthoff, J. F., *The Shadow Optical Method of Caustics*, p443. (Edit. Lagarde, A., *Static and Dynamic Photoelasticity and Caustics*) Springer-Verlag., (1987).