環状き裂を有する円筒の一次元温度分布下応力拡大係数簡易評価式*

飯井俊行^{*1}, 渡邊勝彦^{*2}Stress Intensity Factor of Circumferential Crack of Cylinders
under Radial Temperature Distribution

Toshiyuki MESHII and Katsuhiko WATANABE

A simple equation to approximately calculate the stress intensity factor of the circumferential crack of cylinders under axisymmetric bending was derived first. By applying it, an equation to evaluate the stress intensity factor for the same crack under thermal stress distribution with practically sufficient accuracy was deduced theoretically. The latter equation is valid for arbitrary axisymmetric temperature distribution, which has its gradient in the radial direction. The effect of the length of the cylinder on the stress intensity factor can be evaluated by using the equation. Investigation of the characteristics of the stress intensity factor of cylinders under radial temperature distribution was conducted, by using the equation. It was shown that the stress intensity factor is in proportion to the 'equivalent moment,' which is calculated from the temperature distribution. In addition, for cylinders with practical dimensions such as $R_m/W < 20$ (R_m : mean radius, W : thickness), the stress intensity factor showed a peak value with the increase of the crack length. The reason the stress intensity factor shows a peak value, was concluded to be because of the fundamental characteristics of the structure of the cylinder, which produces reaction force to close the crack.

Key Words: Fracture, Stress Intensity Factor, Thermal Stress, Crack Propagation, Cylindrical Shell

1. 緒 言

有限要素法をはじめとする各種数値解析法の急速な発達とともに、より実際に近い形状のき裂の応力拡大係数(K値)が計算され、ハンドブック等の形でデータが蓄積されつつある⁽¹⁾。例えば、円筒内面の表面き裂などがこれにあたる。しかしながら、この円筒内面の表面き裂の場合、実用上重要と思われるが、検討された荷重の種類については十分とは言えず、特に熱応力の影響も考慮に入れたデータまでは完備する段階には至っていない。

また、円筒を扱う場合にはその長さの影響について記述がなく、無限円筒のデータが記載されるのが一般的である。これは軸方向のき裂を扱う場合には大きな問題とされないと考えられる。しかしながら、周方向のき裂を扱う場合には軸対称曲げを考えればわかるように円筒固有の変形に対する抵抗が働くので、端部に曲げ荷重を負荷する場合にはK値に円筒の長さの影響が出てくると予想される。そして実際の円筒においては端部におい

て何らかの回転拘束が加えられている場合が多いことを考えると、実用上この問題は重要であると思われる。

そこで、本研究では端部で回転拘束を受ける円筒の内表面き裂の半径方向一次元温度分布に対し生じる熱応力下のK値について検討することにした。き裂形状についてはこの条件下最大熱応力が軸方向に発生することより周方向環状き裂とし、軸対称問題につき円筒の長さの影響を含んだ形での実用上十分な精度を有すると思われる熱応力下K値の簡易計算式を理論的に導いた。以下、このき裂を円筒環状き裂と称することにする。

具体的には、はじめに本研究を進めるにあたっての着眼点、基本的な考え方を述べ、続いて基本となる周方向環状き裂を有する円筒が軸対称曲げ外力を受ける場合のK値の近似計算式を導く。さらにそれをもとに円筒環状き裂の熱応力下のK値の計算式の導出を行い、結果を用いて円筒長さ、き裂長さのK値に与える影響等、円筒環状き裂の熱応力下のK値の基本的特性について考察する。

2. 着眼点と考え方

ここでは目標とするK値簡易評価式を導くにあたっての着眼点、基本的な考え方について述べる。

* 原稿受付 1996年10月1日。

^{*1} 正員、東京大学大学院 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)。^{*2} 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

まず「薄肉円筒の軸対称曲げ問題は弾性支持梁の問題として扱うことができる」という事実がある。具体的には、図1左に示す端部で周方向単位長さ当り M_1 、 M_2 の軸対称曲げモーメントを受ける円筒の曲げ問題は、弾性支持梁問題の支配方程式とのアナログより、弾性支持梁が端部で単位厚さ当りの曲げモーメント M_1 、 M_2 を受ける図1右の問題に置き換えられる⁽²⁾。このとき、この弾性支持梁のバネ定数 k は、形式的に曲げ剛性 EI を $D = EW^3/12(1-\nu^2)$ とし、次式により求まる。

$$k = 4\lambda^4 D; \lambda^4 = \frac{EW}{4R_m^2 D} \quad (1)$$

ここに、 R_m : 平均半径、 W : 肉厚、 E : ヤング率、 ν : ポアソン比、である。 λ は長さの逆数の次元を有する。

Fig. 1 Replacement of axisymmetric bending problem of a cylinder by a beam on elastic foundation

次に「き裂を有する梁が長手方向に分布する曲げモーメントを受けるとき、その変形は、近似的に二本の梁がき裂部で長さのない適切なコンプライアンス（バネ定数の逆数）を有する回転バネで接続された問題として扱うことができる」ということに注目する。これは図2のような置き換えが（必ずしも図のように弾性支持されている必要はない）成り立つということであるが、次のように考えられる。

図3に示すような純曲げを受ける単位厚さの片側き裂梁を考える。このときき裂断面より $l/2$ だけ離れた断面においてモーメント M と回転角 θ の間にはコンプライアンスを α として

$$\theta = \alpha \cdot M = (\alpha_0 + \Delta\alpha) \cdot M = \theta_0 + \Delta\theta \quad (2)$$

$$\theta_0 = \alpha_0 \cdot M, \Delta\theta = \Delta\alpha \cdot M \quad (3)$$

なる関係が成り立つ。ここで α_0 、 θ_0 はそれぞれき裂が存在しないときのコンプライアンスと当該断面回転角、 $\Delta\alpha$ 、

$\Delta\theta$ はき裂が入ることによるそれらの増分である。さてここで $\Delta\theta$ であるが、き裂から離れたところではき裂が入ることにより剛体的な回転が生じるだけであることを考慮すると、これは大部分き裂近傍断面での回転の増分の反映として考えることができる。従ってき裂断面 ($l=0$) では $\theta_0=0$ であることも考慮すると、き裂の存在による変形に対する効果は、き裂を、純曲げを受ける無限長片側き裂梁におけるコンプライアンスの増分として与えられる $\Delta\alpha$ ($\xi = a/W$, W には依存するが、 l には依存しない) をコンプライアンスとして有する回転バネで置き換えることにより近似的に扱えることになる。そしてこのように考えるとき、長手方向に分布する曲げモーメントを受ける片側き裂梁であっても、き裂を含む近傍で長手方向のモーメント分布がその範囲で符号が変化せず、その最大値と最小値の差が絶対値において最小値に比べて十分小さいという条件が成り立つとき、第一近似的にき裂の存在は $\Delta\alpha$ のコンプライアンスを有するバネで扱えるものと考えられることとなる^{(3),(4)}。

Fig. 2 Replacement of crack part by a spring

Fig. 3 Cracked beam under pure bending

ここで述べたのは長手方向に分布する曲げモーメントを受ける片側き裂梁の変形についてであるが、K値については、次のように考えられる。上のようなバネによる置き換えを行うとき、考える問題におけるバネ部に生じるモーメントが求まる。そして、その置き換えが妥当と判断される上述の条件の下では、その値はバネに置き換える前のき裂の状態において（図3参照）、 $l/2$ が小さい断面において生じるモーメントにほぼ近いものになると考えられる。従って「長手方向に分布する曲げモーメントを受ける片側き裂梁のK値は、バネ部に生じる曲げモーメントとして評価された値がき裂断面に近い断面に曲げモーメントとして作用する場合の、すなわち結局は片側き裂梁がその値の純曲げを受ける場合のK値によって近似的に与えられる」と考えられることになる。

以上述べてきた三つの着眼点を組み合わせるとき、本論文で基本となるのは図4に示すような環状き裂を有する円筒が端部で曲げモーメントを受ける場合のK値であるが、それは、図2の弾性支持された二つの梁を回転バネで接続したモデルに置き換えて長手方向のモーメント分布を求め、バネ部のモーメントに等しいモーメントが働く純曲げ下の片側き裂梁のK値として近似的に求まることになる。

Fig. 4 Cylinder with a circumferential crack under axisymmetric bending

3. 軸対称曲げを受ける円筒環状き裂のK値簡易評価式

ここでは基本となる軸対称曲げを受ける円筒環状き裂のK値簡易評価式を前章の考え方に従って誘導し、それより得られる結果と有限要素法による解析結果との比較を通じて簡易式の妥当性について検討する。

3・1 K値簡易評価式の誘導 図4の、端部に軸対称曲げモーメントを受ける環状き裂の入った円筒を考える。これは前章で述べたように、図2右の二つの弾性支持梁がき裂の存在とほぼ等価なバネで接合された問題に置き換えられ、まずバネ部に働くモーメント $M_0 - M_f$ を求めることが課題となる。ここで M_0 はバネが存在せず、二つの梁が一体の一つの梁であるときバネの位置に生じるモーメントであり、 M_f はバネが入ることによる荷重再配分の結果としてのモーメント低下分である。

さて M_0 は、弾性支持梁問題における Hetényi の解⁽⁵⁾より、 λ として円筒問題に対する式(1)を用いることにより次のように与えられる。

$$M_0 = \phi_f(\lambda H) \cdot M \quad (4)$$

$$\phi_f(\lambda H) = 2 \frac{\sinh A \cos A + \cosh A \sin A}{\sinh 2A + \sin 2A} ; A = \frac{\lambda H}{2} \quad (5)$$

M_f については、図2右においてバネの回転角の半分は弾性支持された長さ $H/2$ の梁のバネ側端面に M_f を作用させたときの作用面の回転角に等しいので

$$\Delta\alpha \cdot (M_0 - M_f) = \alpha_{bf} \cdot M_f \quad (6)$$

が成り立つ。ここで $\Delta\alpha$ は回転バネのコンプライアンス、 α_{bf} は、一端にモーメントを受け、他端自由の場合の荷重端の弾性支持梁に関するコンプライアンスであり、Hetényi によるもの⁽⁵⁾を円筒用に書き直すことにより次のように与えられる。

$$\alpha_{bf}(\lambda H) = \frac{1}{\lambda D} \cdot \frac{\sinh B + \sin B}{\cosh B + \cos B - 2} ; B = \lambda H \quad (7)$$

式(6)より

$$\psi_f(\xi, \lambda H, \lambda W) = \frac{(M_0 - M_f)}{M_0} = \frac{1}{1 + \Delta\alpha / \alpha_{bf}} \quad (8)$$

が成り立ち、バネが入ることによるバネ位置モーメントの低下率 ψ_f を用いて $M_0 - M_f$ は

$$(M_0 - M_f) = \psi_f \cdot M_0 = \psi_f \cdot (\phi_f \cdot M) \quad (9)$$

と与えられる。

K値については式(9)の $M_0 - M_f$ を受ける片側き裂梁の純曲げに対するK値として求めればよいので、次式により与えられることになる。

$$K_M = \phi_f(\lambda H) \cdot \psi_f(\xi, \lambda H, \lambda W) \cdot \left\{ \frac{M}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) \right\} \quad (10)$$

ただし $\{ \}$ 内は片側き裂梁の純曲げ下のK値、 F_M は有限幅補正関数であり、 Z は梁の断面定数 $Z = W^2/6$ である。

なおここでは軸対称曲げを受ける円筒環状き裂のK値として式(10)を与えたわけであるが、 D を EI に置き換え、 λ として $\lambda^4 = k/4EI$ より求まるものを用いるとき、当然それは、バネ定数 k のバネで弾性支持梁された片側き裂梁が端部で曲げモーメントを受けるときのK値となり、Parmerterが求めたもの⁽⁶⁾に一致することを付言しておく。

3.2 有限要素解析結果との比較 式(10)の妥当性を確認するため軸対称有限要素解析を行った。この種の解析でよく行われるように、端部に曲げモーメントをかける代わりに、等価なK値を与える、き裂が存在しないときき裂相当面に生じるモーメント ($M_0 = \phi \cdot M$) に対応する表面力を打ち消すような表面力をき裂面にかける解析を行い、変位法によってK値を評価した。この解析結果 K_{FEM} と式(10)による結果 K_{THEORY} が λH をパラメータにして図5に比較してある。式(10)は薄肉円筒理論に基づくものであるが、薄肉円筒という制約を越えると思われる範囲の R/W , H/W (例えば、 $R/W=5$, $H/W=2$) に対しても両者は実用上十分な程度に一致しており、実際の実用にあたってのその適用範囲は広いようである。なお計算の際に、有限幅の補正係数 F_M 、また、純曲げを受ける無限長梁において、き裂が入ることによるコンプライアンスの増分として与えられるバネのコンプライアンス $\Delta\alpha$ として、それぞれ次の式(11)⁽¹⁾、(12)⁽⁷⁾を用いた。

$$F_M(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \tan \frac{\pi\xi}{2} \cdot \frac{0.923 + 0.199\{1 - \sin(\pi\xi/2)\}^4}{\cos(\pi\xi/2)} \quad (11)$$

$$\Delta\alpha(\xi) = \frac{\pi(11215)^2}{2E} \cdot \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2(1+2\xi)^2} \times \left\{1 + \xi(1-\xi)(0.44 + 0.25\xi)\right\} \left(\frac{6}{W}\right)^2 \quad (12)$$

Fig. 5 Comparison of K from theory with that from FEM

ここで行ったような、外部の境界面に外力を作用させる代わりにき裂面に力を作用させ、所用のK値評価を行うことはしばしば行われることであるが、円筒の端部曲げの場合梁や板の一樣曲げと異なり、き裂面に作用させる力を考えるときの M_0 は端部での M とは異なり、 M_0 は長さ H の影響を考えねばならないことに注意したい。

4. 円筒環状き裂の熱応力下のK値簡易評価式の誘導

ここでは始めに円筒の軸対称曲げに対するコンプライアンスを求め、続いて円筒の熱応力下の自由膨張時の変形を求める。そしてこれらの知見と前章の結果をもとに、端部で回転拘束を受ける円筒環状き裂の熱応力下のK値の簡易評価式を導く。

4.1 円筒の軸対称曲げに対するコンプライアンス

さて、図4の円筒端部に軸対称曲げモーメント M を負荷したときに生じる端部の回転角 θ についても、き裂がない場合の回転角 θ_0 とき裂が入ることによる回転角の増分 $\Delta\theta$ の和として表せる。従って、円筒の端部曲げに対するき裂が存在するときのコンプライアンス α_{cyl} 、き裂が存在しないときのコンプライアンス α_{cyl0} 、き裂が入ることによるその増分 $\Delta\alpha_{cyl}$ が次のように定義される。

$$\alpha_{cyl} = \theta / M = (\theta_0 + \Delta\theta) / M = \alpha_{cyl0} + \Delta\alpha_{cyl} \quad (13)$$

$$\alpha_{cyl0} = \theta_0 / M ; \quad \Delta\alpha_{cyl} = \Delta\theta / M \quad (14)$$

き裂がない場合は図1にて $M_1 = M_2 = M$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$, $L = H$ とした場合であり、そのコンプライアンスは Hetényi が弾性支持梁に対し導いた結果⁽⁵⁾を円筒用に書き直し、次式を得る。

$$\alpha_{cyl0} = \frac{1}{\lambda D} \cdot \frac{\cosh B - \cos B}{\sinh B + \sin B} ; \quad B = \lambda H \quad (15)$$

この式において D を EI に置き換え、 λ として $\lambda^4 = k/4EI$ より定まるものを用いたものが Hetényi による弾性支持梁のコンプライアンスであり、このときには当然、弾性支持のバネ定数が $k \rightarrow 0$ 、すなわち $B \rightarrow 0$ において、 $H/2EI$ という普通の梁の曲げの場合の値に収束する。

き裂が入ることによるコンプライアンスの増分については次のように考える。き裂をバネによって置き換えた図2右で考えると、バネが入ることにより(すなわちき裂が入ることにより)中央部で M_f だけモーメントは減少する。 $\Delta\theta$ は M_f を反映したものであり、従って図2の上下二つの弾性支持梁において、バネ側端部に M_f を受け、他端

が自由であるときの自由端の回転角として $\Delta\theta$ は求まることになる。式(9)より、 M_f は次のように書き直せる。

$$M_f = (1 - \psi_f) \cdot M_0 = (1 - \psi_f) \cdot \phi_f \cdot M \quad (16)$$

Hetényi が導いた結果⁽⁵⁾を円筒用に書き直し、次式を得る。

$$\frac{\Delta\theta}{M_f} = \frac{1}{\lambda D} \cdot \frac{\sinh A \cos A + \sin A \cosh A}{\sinh^2 A - \sin^2 A} = \alpha_{bf}^* ; A = \frac{\lambda H}{2} \quad (17)$$

求めるコンプライアンスの増分 $\Delta\alpha_{cyl}$ は端部のモーメント M に対し定義するので、式(16)、(17)より次のように求まる。

$$\Delta\alpha_{cyl} = (1 - \psi_f) \cdot \phi_f \cdot \alpha_{bf}^* \quad (18)$$

以上、式(13)、(18)により、円筒の端部曲げに対するコンプライアンス α_{cyl} は次式にまとめられる。

$$\alpha_{cyl} = \alpha_{cyl0} + (1 - \psi_f) \cdot \phi_f \cdot \alpha_{bf}^* \quad (19)$$

式中、 α_{cyl0} 、 α_{bf}^* は各々式(15)、(17)により計算される。

4・2 円筒の熱応力下の自由膨張時の変形 端部を回転拘束した円筒の熱応力の問題は、円筒端部が温度分布に基づき自由膨張した後、端部に生じた回転角を零にする端部モーメントを重ね合わせる問題として考えることができる。そこで、円筒の自由膨張時の端部の回転角をまず求めた。

円筒の半径方向に温度が1次的に $T = T(x)$ の分布をする場合(図6(a)参照)の変形について考える。実用上の多くの問題で円筒は軸方向に変形拘束されていないことより、平均温度からの偏差成分について検討すれば十分であり、以下においても断面平均温度を零として扱う。すなわち、

$$\int_{-W/2}^{W/2} T dx = 0 \quad (20)$$

この場合の変形は、Duhamelのアナロジ⁽⁸⁾により図6(b)に示すように端部に M_t を負荷する場合と、き裂を含む面上に M_t を生じさせる応力分布に対応する表面力(図6(c)の実線)が負荷される場合の変形の和と等価である。ここに、薄肉円筒の M_t は次式にて定義される量で、以下熱変形相当モーメントと称する。 κ は線膨張係数である。

$$M_t = \frac{\kappa E}{1 - \nu} \int_{-W/2}^{W/2} T x dx \quad (21)$$

なお、 M_t に対応する応力分布が線形となるのは $T(x)$ が線形である場合のみであるが、Saint-Venantの原理を考慮すると線形からのズレは二次的なものであり、ここで扱っているような問題にはほとんど影響しないと考えられるので、図においては M_t に対応する線形応力分布を考えてお

り、以下すべてこのように扱う。

図6(b)は図4における M が M_t となった場合であり、これに対応する回転角 θ_1 は直ちに

$$\theta_1 = \alpha_{cyl} \cdot M_t \quad (22)$$

と求まる。さて、図6(c)におけるき裂面に表面力を負荷したことによる端面での回転角 θ_2 であるが、今まで行って来たように弾性支持された二つの梁がバネによって接合されたモデルで考えることにより次のように求まる。すなわち、図2右において M として $(-M_t)/\phi_f$ がかかっているとき M_0 は $(-M_t)$ であり、バネが入ることによる低下分 M_f に対応する回転角が θ_2 ということになるので、式(18)より

$$\theta_2 = \Delta\alpha_{cyl} \cdot (-M_t) / \phi_f = (1 - \psi_f) \cdot \alpha_{bf}^* \cdot (-M_t) \quad (23)$$

と得られる。従って自由膨張時の端部の回転角 θ は

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \{\alpha_{cyl0} - (1 - \psi_f) \cdot (1 - \phi_f) \cdot \alpha_{bf}^*\} \cdot M_t \quad (24)$$

なお、以上の議論ではき裂面の食い違いが許されるとして(すなわち負のK値が生じる)計算式の誘導を行っているが、最終的状態がいくつかの解の重ね合わせとして得られるとき、最終的K値が正の値であれば意味のある正しい結果が得られることになる。例えば、配管、圧力容器の内面が急冷される熱衝撃問題では、式(21)にて計算される熱変形相当モーメント M_t が負の値となり、最終的に正のK値が得られることになる。

Fig. 6 Duhamel's analogy

4・3 円筒の熱応力下のK値

4・3・1 円筒の自由膨張時のK値 前節においてDuhamelのアナロジにより自由膨張時の変形について考えたが、K値についても、同様に求めることができる。すなわち図6(b)の端部に M_t が作用するときのK値と図6(c)のき裂面に表面力が作用するときのK値の和として求められ、後者のK値は端部に $(-M_t)/\phi_f$ が作用するときのK

値に等しいので、円筒環状き裂の自由膨張によるK値 K_{free} は、結局図2右において M として

$$M = M_t + (-M_t / \phi_f) = (1 / \phi_f - 1) \cdot (-M_t) \quad (25)$$

が働いている場合として求められることになり、式(10)より次のように与えられる。

$$K_{free} = (1 - \phi_f) \cdot \psi_f \cdot \left\{ \frac{(-M_t)}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) \right\} \quad (26)$$

4.3.2 端部回転拘束によるK値 自由膨張時には端部で式(24)で与えられる θ の回転が生じる。従って端部の回転が拘束されている場合には、端部にはその拘束によって自由膨張を打消す($-\theta$)を生じさせるモーメント M_r (拘束モーメントと呼ぶことにする) が働くことになり、この M_r によるK値が求めるものとなる。4.1節の議論より、

$$(-\theta) = \alpha_{cyl} \cdot M_r \quad (27)$$

が成り立ち、求めるK値 K_r は式(10), (24), (27)より次式にて与えられる。

$$\begin{aligned} K_r &= \phi_f \cdot \psi_f \cdot \left\{ \frac{M_r}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) \right\} \\ &= \phi_f \cdot \psi_f \cdot \left\{ \frac{\alpha_{cyl} - (1 - \psi_f) \cdot (1 - \phi_f) \cdot \alpha_{bf}}{\alpha_{cyl}} \cdot \left\{ \frac{(-M_t)}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

4.3.3 円筒環状き裂の熱応力下のK値 求めるK値は重ね合わせの原理により、4.3.1、4.3.2 項にて求めた自由膨張時のK値と拘束モーメントに対するK値の和である。式(26), (28)により求めるK値 K_{cyl} は次式にて与えられる。

$$\begin{aligned} K_{cyl} &= K_{free} + K_r \\ &= \frac{\psi_f \cdot \alpha_{cyl0}}{\alpha_{cyl0} + \phi_f \cdot (1 - \psi_f) \cdot \alpha_{bf}} \cdot \left\{ \frac{(-M_t)}{Z} \sqrt{\pi a} \cdot F_M(\xi) \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

自由膨張の場合同様、端部が回転拘束された円筒環状き裂の熱応力下のK値は熱変形相当モーメントに比例することになる。

5. 円筒環状き裂の熱応力下K値の基本特性

ここでは前章で求めた式(29)に基づき、円筒長さ、き裂長さ、円筒半径/肉厚比の影響等、円筒環状き裂の熱応力下K値の基本特性について検討する。

なおここで式(29)の結果は、熱変形相当モーメント M_t が与えられれば、すなわち、温度分布が与えられれば M_t は定まるのであるから温度分布のみが与えられれば

所用のK値が求まることを意味しており、このことは、過渡的な温度変化を受ける問題においても、応力解析を行うことなく、温度場解析のみによって刻々のK値変化が求められることを示していることを指摘しておく。

5.1 円筒長さの影響 円筒半径/肉厚比 R_m/W を固定して円筒長さを変化させ、その熱応力下のK値 K_{cyl} への影響を調べた。代表例として、 $R_m/W = 5.5$ に対する結果を図7に示す。

この図より、アスペクト比 $W/H \rightarrow 0$ (無限円筒) となるにつれ、K値が全般的に大きくなり、各き裂長さに対し一定の値に収束する傾向が読みとれる。従って、熱応力の場合には長い円筒に対するK値を評価することは安全側の評価であるといえる。

また、円筒の長さによらずき裂の進展につれK値が極大値をとる傾向を示した。ただし、円筒が長くなるにつれK値が極大値をとるときき裂長さは大きくなり、かつ極大値前後でのK値の変化が小さくなる(ピークを示しにくくなる)。K値がき裂の進展につれ極大値を示すこの傾向については次節にて検討する。

Fig. 7 Effect of cylinder length on K under thermal stress ($R_m/W = 5.5$)

5.2 き裂長さ、円筒半径/肉厚比の影響 図7より円筒の長さに関係なく、円筒環状き裂の熱応力下のK値がき裂の進展につれ極大値を示すことがわかったので、以下この特性の検討を無限円筒に対し行った。

まず無限円筒の熱応力下のK値と片側き裂梁の純曲げに対するK値の比 K_{cyl} / K_{Mplate} (K_{Mplate} : 式(29)中の $\{ \}$ 内) の特性の検討から始める。式(29)を変形することにより

$$\frac{K_{cyl}}{K_{Mplate}} = \frac{\psi_f}{1 + \phi_f \cdot (1 - \psi_f) \cdot \alpha_{bf} / \alpha_{cyl0}} \quad (30)$$

を得る。式中端部曲げの減衰を示す関数 ϕ_f は図8からわかるように $\lambda H \rightarrow \infty$ で零であり、 $\lambda H \rightarrow 0$ に対し $K_{cyl} / K_{Mplate} \rightarrow \psi_f$ となる。図8からわかるように実質的には $\lambda H > 10$ で ϕ_f はほぼ零と見なせるようであり、 $\lambda H = 10$ として (K_{cyl} / K_{Mplate}) と ψ_f の比を円筒半径/肉厚比 R_m/W と無次元き裂長さ a/W に対しプロットしたものが図9である。これより、 K_{cyl} / K_{Mplate} と関数 ψ_f の差は無次元き裂長さ $a/W < 0.8$ の範囲で差が0.01%以下であることが分かり、 $\lambda H > 10$ であれば K_{cyl} / K_{Mplate} は ψ_f で表されるとして問題ないと思われる。

Fig. 8 Variation of ϕ_f with λH Fig. 9 Distribution of $(K_{cyl} / K_{Mplate}) / \psi_f$ for a/W and R_m/W

そこで次に、無限円筒に対する関数 ψ_f の特性を検討した。検討を始める前に、一般に円筒の形状パラメータとして使用される円筒半径/肉厚比 R_m/W ・アスペクト比 H/W と、無次元肉厚 λW ・無次元長さ λH との関係を示す。定義より次式を得る。

$$\lambda W = \frac{\sqrt[3]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{R_m/W}} \quad (31)$$

$$\lambda H = \frac{\sqrt[3]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{R_m/W}} \cdot \left(\frac{H}{W}\right) \quad (32)$$

この関係を念頭におき、無限円筒（計算上 $\lambda H = 10$ ）の関数 ψ_f を無次元き裂長さ a/W と円筒半径/肉厚比 R_m/W に対し示した。図10に全容、図11に $R_m/W < 20$ の比較的厚肉の範囲を示す。これらの図より次のことがわかる。

1. 無限円筒の関数 ψ_f は基本的なき裂の進展につれ単調に減少する1以下の関数である。
2. 無限円筒の関数 ψ_f は薄肉、すなわち $R_m/W \rightarrow \infty$ にて1に収束する。しかもき裂長さに無関係に1に収束する。
3. 2項の物理的意味は、無限円筒の軸対称曲げに対するK値が薄肉になるにつれ片側き裂梁の純曲げのK値の特性に収束していくことであると考えられる。
4. 円筒の熱応力下のK値の特性を支配する関数は ψ_f であり、キーパラメータは円筒の円筒半径/肉厚比 R_m/W である。

Fig. 10 Characteristics of function ψ_f for a long cylinder Fig. 11 Characteristics of function ψ_f for a long cylinder
(Regions for $R_m/W < 20$ enlarged)

最後に実際の円筒半径/肉厚比に対し、無限円筒の熱応力下の特性を検討した。

図12に検討結果を示す。円筒半径/肉厚比は $R_m/W = 1.5$,

5.5, 10.5, 20 の 4 種類に対し検討を行った。肉厚を一定値として行った検討故、K 値は図中のような無次元化を行い整理を行った。この図より次のことが分かる。

1. 無限円筒の熱応力下の K 値は、実的な円筒半径/肉厚比 $R_m/W < 20$ に対しき裂の進展につれ極大値を示す。
2. 極大値を示す無次元き裂長さ a/W は薄肉になるにつれ大きくなる。
3. 無限円筒の熱応力下の K 値の特性が関数 ψ_f に支配されていること、および関数 ψ_f がき裂が存在することに対する軸対称曲げモーメントの低下を示す量であることより、K 値がき裂進展につれ極大値を示す理由は、き裂が長くなるにつれて円筒固有の軸対称モーメントの再配分が生じるからであると考えられる。

Fig. 12 Variation of stress intensity factor with a/W

6. 結 言

本論文ではまず基本となる周方向環状き裂を有する有限長円筒が端部に軸対称曲げを受ける場合の K 値の簡易計算式を求めた。そしてこの式をもとに端部を回転拘束された環状き裂を有する円筒の半径方向一次元温度分布に対する熱応力下 K 値を求める簡易評価式を導いた。さらにこの結果を用いて円筒の長さが熱応力下 K 値に与える影響について検討し、最後に無限円筒の熱応力下の K 値がき裂長さの変化に対して示す特性を、実的な円筒半径/肉厚比に対して検討した。

得られた K 値評価式によれば、肉厚方向の温度分布から定まる熱変形相当モーメント M_t のみ求めれば所用の K 値が得られ、過渡的な温度変化を受ける問題においても温度

場解析のみによって刻々の K 値変化を求めることが可能になる。

文 献

- (1) 例えば、Murakami, Y. et al., Stress Intensity Factors Handbook, (1987), Pergamon Press.
- (2) Timoshenko, S. P., Strength of Materials, Part II, 2nd Printing(1934), Chap. I, D. Van Nostrand Company.
- (3) Okamura, H., Watanabe, K. and Takano, T., Application of the Compliance Concept in Fracture Mechanics, ASTM STP 536, (1973), 423-438.
- (4) Okamura, H., Watanabe, K. and Naito, Y., Some Crack Problems in Structural Reliability Analysis, Reliability Approach in Structural Engineering, (1975), 243-257, Maruzen.
- (5) Hetényi, M., Beams on Elastic Foundation, 2nd Edition (1971), The University of Michigan Press.
- (6) Parmerter, R. R. and Mukherji, B., Stress Intensity Factors for a Notched Beam on an Elastic Foundation, Engng. Fract. Mech., 7 (1975), 291-298.
- (7) 高橋淳、エネルギー原理に基づく構造物の線形および非線形破壊力学解析に関する研究、(1991)、東京大学学位論文。
- (8) 例えば、Fung, Y. C., Foundations of Solid Mechanics, (1965), Prentice-Hall Inc.