平板内の楕円形開孔部に寸法および材質の異なる楕円板を 接合するとき生ずる内部応力の推定*

矢田 敏夫^{*1}, 益子 淳也^{*2}, 井上 忠信^{*3}

An Estimation of Internal Stresses Around a Dissimilar Ellipse Patch Jointed to on Elliptic Hole

Toshio YADA, Junya MASHIKO and Tadanobu INOUE

This paper discusses the problem of stresses of two joined materials, [I] and [II]. Material [I] is a large plate with an elliptic hole and [II] is an elliptic patch plate. There are two different conditions. One is the difference in the mechanical properties, the other is the difference in the initial elliptic boundary dimensions. Before joining, some amounts of dislocation exist on the elliptic boundaries between [I] and [II]. For continuous connection of both boundaries, we analyzed the necessary boundary tractions, q_x and q_y , theoretically using Goursat's stress functions and Dundurs' parameters. As a result, we obtained generally applicable formulae for expressing q_x and q_y and reported the fundamental numerical calculations in this paper.

Key Words: Composite Material, Residual Stress, Computational Mechanics, Stress Analysis, Elasticity, Elliptic Boundary

1. 緒 言

楕円孔を持つ平板の二次元弾性解析については数多くの大変有益な研究が行われてきた。^{(1),(2)} たとえば、楕円孔の曲率半径と応力集中率の関係を示す理論式は、疲労強度の評価に広く用いられている。また、破壊力学で用いられる切欠は短軸半径 $b=0$ の特殊な楕円孔であり、この特殊な楕円孔に対する応力解析結果をもとにして応力拡大係数、エネルギー解放率などが定義されており、これらは材料の靱性評価のための重要なパラメータとなっている。

著者らは、従来の楕円孔に関する理論解析を更に拡張、適用することを目的として楕円形の異材部を持つ平板の面内変形問題についていくつかの検討を行って

きた。その中で、本報告は楕円孔を持つ無限板 [I] と楕円板 [II] との接合時に生ずる内部応力について、次のような条件の下で解析を行ったものである。

図 1 に示すように [I] と [II] は異種材料であり、それぞれの領域の縦弾性係数（ヤング率）とポアソン比を E_1, ν_1 および E_2, ν_2 とする。また、接合前の [I] と [II] の単体の境界形状は C_0' と C_0'' の異なった寸法の楕円形状であるとする。図 1 において C_0 は両者の基準となる楕円形境界である。これが、例えば熱荷重、外力、あるいは工作誤差、その他によって、わずかに異なった形状の C_0' と C_0'' になっているとする。すなわち、[I] と [II] は初期の境界寸法が $(C_0' - C_0'')$ の「くいちがい」を持っている場合を考える。「くいちがい」の量は弾性変形範囲内の量であるとする。

上記のように本研究では、[I] と [II] の材質が異なり、かつ、初期の楕円形境界に $(C_0' - C_0'')$ の「くいちがい」がある場合に、この「くいちがい」を埋め合わせて境界を連続的に連結するために必要な境界力 q_x, q_y を算

* 原稿受付 1996 年 9 月 17 日。

*¹ 正員、千葉工業大学工学部 (〒275 習志野市津田沼 2-17-1)。

*² 学生員、千葉工業大学大学院。

*³ 正員、長岡技術科学大学 (〒940-21 長岡市上富岡町長峰)。

出するものである。

この「くいちがい」のモデルは異材境界部の応力解析においては基本となるモデルであって、各種の初期条件、荷重条件の問題に対してでも応用することができる。

また、この研究は他の異材接合体に対する問題、例えば「異材接合体端部の応力特異性」とも関連を持つものである。^{(3),(4)} 本研究結果を広範囲に適用できるようにするため、計算式の表示には Dundurs のパラメータを用いて一般化の形で表示するようにした。⁽⁵⁾

Fig. 1 Elliptic boundaries

2. 理論解析

2.1 解析の方法 長軸半径(a), 短軸半径(b)の楕円孔を持つ平板の境界上に一様な境界力(q_x, q_y)を働かせると、楕円孔は変形して長軸半径($a+u$), 短軸半径($b+v$)の楕円形境界となる。

本研究では、まず楕円孔上の境界力(q_x, q_y)と楕円孔の変位(u, v)の関係を示す計算式を求めた。解析には Goursat の複素応力関数を用いて二次元弾性解析を行った。この解析の主要部は付録に示した。

2.2 領域 [I]: 楕円孔を持つ無限平板の変位 図2に示すように横弾性係数 G_1 , ポアソン比 ν_1 とする。図1に関連して前述したように基準の楕円境界 $C_0(a, b)$ に対して、初期境界 $C_0'(a+u', b+v')$ であるが(u', v')は a に比べて十分に小さく、従って以下の変位の計算式の表示では u', v' は無視できる場合を考える。

Fig. 2 Region I; Infinite plate with elliptical hole

次に、境界上に(q_x, q_y)の一様な境界力が働いた時、境界(x_0, y_0)は変位(u_1, v_1)を生じて、形状は C_1 になるものとする。このときの u_1, v_1 は式(1)で表示される。

(付録 式(A-17)参照)

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{x_0}{2G_1} \left[-2 \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \left(\frac{b}{a} \right) q_x + \left\{ 2 \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) - 1 \right\} q_y \right] \\ v_1 &= \frac{y_0}{2G_1} \left[\left\{ 2 \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) - 1 \right\} q_x - 2 \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \left(\frac{a}{b} \right) q_y \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 G_1, κ_1 の二つの弾性パラメータを用いた。

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} \dots\dots\dots(2)$$

$$\kappa_1 = \begin{cases} \frac{3 - \nu_1}{1 + \nu_1} & \dots\dots \text{平面応力} \\ 3 - 4\nu_1 & \dots\dots \text{平面ひずみ} \end{cases} \dots\dots\dots(3)$$

更に、式(4)のパラメータを用いて式(1)を式(5)のように表示しておく。

$$n_1 = \frac{\kappa_1 + 1}{4} \dots\dots\dots(4)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{x_0}{2G_1} \left[-2n_1 \left(\frac{b}{a} \right) q_x + (2n_1 - 1) q_y \right] \\ v_1 &= \frac{y_0}{2G_1} \left[(2n_1 - 1) q_x - 2n_1 \left(\frac{a}{b} \right) q_y \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

2.3 領域 [II]: 楕円板の変位 図3に示すように、横弾性係数を G_2 , ポアソン比を ν_2 , 楕円板の初期境界形状を C_0'' とする。

Fig. 3 Region II; Elliptical patch plate

境界力 q_x, q_y が働いたとき、形状は C_2 になったとする。このときの境界上の変位(u_2, v_2)は式(6)となる。

(付録 式(A-6), (A-7)参照) ここで、 u_2, v_2 は領域 I の計算式に対応させて、式(6), (7), (8)で表示することができる。

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \frac{x_0}{2G_2} \left[\left(\frac{\kappa_2 + 1}{4} \right) q_x + \left(\frac{\kappa_2 + 1}{4} - 1 \right) q_y \right] \\ v_2 &= \frac{y_0}{2G_2} \left[\left(\frac{\kappa_2 + 1}{4} - 1 \right) q_x + \left(\frac{\kappa_2 + 1}{4} \right) q_y \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

$$G_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu_2)} \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\kappa_2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3-\nu_2}{1+\nu_2} \quad \dots \text{平面応力} \\ 3-4\nu_2 \quad \dots \text{平面ひずみ} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(8)$$

更に、式(9)を用いて式(6)を変形する。

$$n_2 = \frac{\kappa_2 + 1}{4} \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_2 = \frac{x_0}{2G_2} [n_2 q_x + (n_2 - 1) q_y] \\ v_2 = \frac{y_0}{2G_2} [(n_2 - 1) q_x + n_2 q_y] \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

2.4 領域[I]と領域[II]の接合時の境界条件

2.4.1 境界上の変位の連続条件 図 2 および図 3 において、 C_0 および C_0'' の境界の楕円形の寸法をそれぞれ $(a+u', b+v')$ 、 $(a+u'', b+v'')$ とすれば、[I] と [II] の境界の初期の「くいちがい」量を次のように表すことができる。

$$\left. \begin{array}{l} u' - u'' = e_x x_0 \\ v' - v'' = e_y y_0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

また、境界上に q_x 、 q_y を加えた後の変位は[I]では、 (u_1, v_1) であり、[II]では (u_2, v_2) である。したがって、境界上の変位の連続条件は式(12)で表される。

$$\left. \begin{array}{l} (u_1 - u_2) + e_x x_0 = 0, \quad u_1 - u_2 = -e_x x_0 \\ (v_1 - v_2) + e_y y_0 = 0, \quad v_1 - v_2 = -e_y y_0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(12)$$

なお、 u_1 、 v_1 および u_2 、 v_2 の符号はいずれも x 軸および y 軸の正方向の変位を正としている。

2.4.2 q_x 、 q_y の計算式 式(12)に式(5)と式(10)を代入して整理することにより式(13)、(14)を得る。

$$\left[\frac{2n_1}{2G_1} \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{n_2}{2G_2} \right] q_x + \left[\frac{-n_1 - (n_1 + 1)}{2G_1} + \frac{n_2 - 1}{2G_2} \right] q_y = e_x \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\left[\frac{-\{n_1 - (n_1 - 1)\}}{2G_1} + \frac{n_2 - 1}{2G_2} \right] q_x + \left[\frac{2n_1}{2G_1} \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{n_2}{2G_2} \right] q_y = e_y \quad \dots\dots\dots(14)$$

式(13)、(14)を更に一般化するために、式(15)に示す Dundurs のパラメータ α 、 β を用いる。この種の境界値問題ではもう一つのパラメータが必要である。ここでは、式(16)で示すパラメータ D を用いる。

$$\alpha = \frac{\frac{\kappa_2 + 1}{2G_2} - \frac{\kappa_1 + 1}{2G_1}}{\frac{\kappa_2 + 1}{2G_2} + \frac{\kappa_1 + 1}{2G_1}} = D \left(\frac{n_2}{2G_2} - \frac{n_1}{2G_1} \right) \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\beta = \frac{\frac{\kappa_2 - 1}{2G_2} - \frac{\kappa_1 - 1}{2G_1}}{\frac{\kappa_2 + 1}{2G_2} + \frac{\kappa_1 + 1}{2G_1}} = \alpha - \frac{D}{2} \left(\frac{1}{2G_2} - \frac{1}{2G_1} \right) \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\frac{1}{D} = \frac{n_2}{2G_2} + \frac{n_1}{2G_1} \quad \dots\dots\dots(16)$$

α 、 β と D の三つのパラメータを用いることによって、式(13)、(14)は式(17)、(18)となる。

$$\left[(1-\alpha) \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{2} (1+\alpha) \right] \frac{q_x}{D} - \left[\frac{1}{2} (1-\alpha) + 2(\alpha-\beta) - \alpha \right] \frac{q_y}{D} = e_x \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$- \left[\frac{1}{2} (1-\alpha) + 2(\alpha-\beta) - \alpha \right] \frac{q_x}{D} + \left[(1-\alpha) \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{1}{2} (1+\alpha) \right] \frac{q_y}{D} = e_y \quad \dots\dots\dots(18)$$

式(17)、(18)を解いて、 q_x 、 q_y は、式(19)、(20)のように定めることができる。

$$\frac{q_x}{D} = \frac{1}{\Delta} \left[\left\{ (1-\alpha) \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{1}{2} (1+\alpha) \right\} e_x + \left\{ \frac{1}{2} (1-\alpha) + 2(\alpha-\beta) - \alpha \right\} e_y \right] \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$\frac{q_y}{D} = \frac{1}{\Delta} \left[\left\{ \frac{1}{2} (1-\alpha) + 2(\alpha-\beta) - \alpha \right\} e_x + \left\{ (1-\alpha) \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{2} (1+\alpha) \right\} e_y \right] \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\Delta = \left[(1-\alpha) \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{1}{2} (1+\alpha) \right] \left[(1-\alpha) \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{2} (1+\alpha) \right] - \left[\frac{1}{2} (1-\alpha) + 2(\alpha-\beta) - \alpha \right]^2 \quad \dots\dots\dots(21)$$

2.5 q_x 、 q_y により生ずる領域[I]と領域[II]の境界変位量の比率 境界部に存在した初期の「くいちがい」 $(e_x x_0, e_y y_0)$ は、 (q_x, q_y) による変位 (u_1, v_1) および (u_2, v_2) とによって連結される。ここで、境界変位量の比率 $(u_1/e_x x_0, u_2/e_x x_0)$ および、 $(v_1/e_y y_0, v_2/e_y y_0)$ は式(1)、(6)、(13)、および式(19)、(20)を用いて算出することができる。これについては、次章において例示する。

3. 平面応力状態に対する計算式と数値計算例

3.1 計算式 平面応力に対しては、式(3)と式(8)の κ_j は次式のようになる。

$$\kappa_j = \frac{3-\nu_j}{1+\nu_j} \quad (j=1,2) \quad \dots\dots\dots(22)$$

$j = 1 \cdots$ 領域 [I], $j = 2 \cdots$ 領域 [II].

また, 式(15), (16)の α , β と D は次式となる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{D} &= \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1}, \quad \alpha = D \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \\ \frac{1}{2}(1-\alpha) &= D \frac{1}{E_1}, \quad \frac{1}{2}(1+\alpha) = D \frac{1}{E_2} \\ \alpha - \beta &= \frac{1}{2} D \left(\frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1+\nu_1}{E_1} \right) \end{aligned} \right\} \cdots (23)$$

これらを用いて, 平面応力の場合の式(19), (20)は式(24), (25)あるいは式(26), (27)となる.

$$\frac{q_x}{E_2} = \frac{\left[1 + 2 \left(\frac{a}{b} \right) \frac{E_2}{E_1} \right] e_x + \left[\nu_2 + (1-\nu_1) \frac{E_2}{E_1} \right] e_y}{\left[1 + 2 \left(\frac{b}{a} \right) \frac{E_2}{E_1} \right] \left[1 + 2 \left(\frac{a}{b} \right) \frac{E_2}{E_1} \right] - \left[\nu_2 + (1-\nu_1) \frac{E_2}{E_1} \right]^2} \cdots (24)$$

$$\frac{q_y}{E_2} = \frac{\left[\nu_2 + (1-\nu_1) \frac{E_2}{E_1} \right] e_x + \left[1 + 2 \left(\frac{b}{a} \right) \frac{E_2}{E_1} \right] e_y}{\left[1 + 2 \left(\frac{b}{a} \right) \frac{E_2}{E_1} \right] \left[1 + 2 \left(\frac{a}{b} \right) \frac{E_2}{E_1} \right] - \left[\nu_2 + (1-\nu_1) \frac{E_2}{E_1} \right]^2} \cdots (25)$$

$$\frac{q_x}{E_1} = \frac{q_x}{E_2} \left(\frac{E_2}{E_1} \right) \cdots (26)$$

$$\frac{q_y}{E_1} = \frac{q_y}{E_2} \left(\frac{E_2}{E_1} \right) \cdots (27)$$

式(24), (25)と式(26), (27)では無次元化の方法を変えたものであり, 例えば次のように用いる.

$E_2/E_1 \rightarrow 0$ (あるいは $E_1/E_2 \rightarrow \infty$) に近い材料組み合わせの時は式(24), (25)を用いる. 特に, $E_2/E_1 = 0$ の時は, $u_1 = 0, \nu_1 = 0; u_2 = e_x x_0, \nu_2 = e_y y_0$ である. このときは, 楕円板 [II] の変位のみで, 「くいちがい量」($e_x x_0, e_y y_0$) を埋めることを示す.

このときの q_x, q_y は,

$$q_x = \frac{E_2}{1-\nu_2^2} [e_x + \nu_2 e_y] \cdots (28)$$

$$q_y = \frac{E_2}{1-\nu_2^2} [\nu_2 e_x + e_y] \cdots (29)$$

式(28), (29)は平板上で計測したひずみ e_x と e_y から, 応力 q_x, q_y を求める計算式である.

$E_2/E_1 \rightarrow \infty$ (あるいは $E_1/E_2 \rightarrow 0$) に近い材料組み合わせの時は, 式(26), (27)を用いる. 特に, $E_2/E_1 = \infty$ の時は, $u_1 = -e_x x_0, \nu_1 = -e_y y_0; u_2 = 0, \nu_2 = 0$ である. このときは楕円孔板 [I] の変位のみで, 「くいちがい量」($e_x x_0, e_y y_0$) を埋めることを示す.

このときの q_x, q_y は,

$$q_x = \frac{E_1}{(3-\nu_1)(1+\nu_1)} \left[2 \left(\frac{a}{b} \right) e_x + (1-\nu_1) e_y \right] \cdots (30)$$

$$q_y = \frac{E_1}{(3-\nu_1)(1+\nu_1)} \left[(1-\nu_1) e_x + 2 \left(\frac{b}{a} \right) e_y \right] \cdots (31)$$

式(30), (31)は楕円形空孔(a, b)を($a+ae_x, b+be_y$)に拡大するに必要な境界力を求める式である.

3.2 計算例 $e_x = e_y = e$ の初期条件に対する数値計算例を示す.

図4は $b/a = 1, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$ に対する数値計算結果である. また, 図5は $b/a = 0.5, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$ に対する数値計算結果である.

図4と図5において, それぞれの図(a)は計算条件を表す. また, 図(b)は q_x, q_y を2つの方法で無次元化して示した図である. 例えば, 前項において述べたように, $E_1/E_2 \rightarrow 0$ のところでは $q_x/E_2 e, q_y/E_2 e$ の形に無次元化した値を用いて q_x, q_y を求める. また, $E_2/E_1 \rightarrow 0$ のところでは $q_x/E_1 e, q_y/E_1 e$ の形に無次元化した値を用いて q_x, q_y を求める.

図(c)から, 例えば $e x_0, e y_0$ の初期くいちがいに対して, [I]と[II]の変位の分担割合を求めることができる. 例えば, $E_1/E_2 = 1$ で $b/a = 1$ の時を例示すると u_1, u_2 は次式のようになる.

$$u_1 = -\frac{1+\nu}{2} e, \quad u_2 = \frac{1-\nu}{2} e \cdots (32)$$

そして, このときの q は図4(b)からもわかるように次式のようになる.

$$q = \frac{E e}{2} \cdots (33)$$

この条件を熱変形の場合に対応させれば, 一様な材質の平板内の円形領域を ($-\angle T$) だけ温度変化させた場合に相当する. 材料の線膨張係数を一様に α とすれば, $e = \alpha \angle T$ であり, 熱応力 q は次式で表される.

$$q = \frac{E \alpha \Delta T}{2} \cdots (34)$$

また, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ の場合, $E_2 < E_1$ であれば q は式(35)であり, $E_2 > E_1$ であれば q は式(36)である.

$$q < \frac{E_1 \alpha \Delta T}{2} \quad (E_2 < E_1) \cdots (35)$$

$$q > \frac{E_1 \alpha \Delta T}{2} \quad (E_2 > E_1) \cdots (36)$$

q_x, q_y は, 材料の組み合わせ (E_1, E_2, ν_1, ν_2), 初期くいちがいの比率 (e_x, e_y), および楕円形境界の寸法比 (b/a) に関係する. すべての条件に対する q_x, q_y は, 式(24), (25)などによって計算できる.

(a) Calculation model

 (b) q vs. E_2/E_1 or E_1/E_2

 (c) (u_1, u_2) vs. E_2/E_1 or E_1/E_2

Fig. 4 Numerical calculation of circular boundary

 ($b/a=1, e_x=e_y=e, \nu_1=\nu_2=0.3$)

4. 結 論

楕円孔を持つ無限板[I]に楕円板[II]を接合する問題において、両者の境界上で(a)と(b)の不連続条件がある場合を考えた。

(a) [I]と[II]の材料は異材であり相互の機械的性質が異なる。すなわち、境界上で材質的に不連続である。

(b) [I]と[II]は接合前の単体の状態において、両者の楕円形境界には「くいちがい」が存在する。すなわち、[I]と[II]の初期境界は幾何学的に不連続である。

(a) Calculation model

 (b) (q_x, q_y) vs. E_2/E_1 or E_1/E_2

 (c) $(u_1, u_2; v_1, v_2)$ vs. E_2/E_1 or E_1/E_2

Fig. 5 Numerical calculation of elliptic boundary

 ($b/a=0.5, e_x=e_y=e, \nu_1=\nu_2=0.3$)

本研究によって次の結果を得た。

(1) [I]と[II]の境界を連続条件を満足させて連結するために必要な境界力 q_x, q_y を導出する計算式を求めた。この計算式は任意の楕円形状、任意の材料の組み合わせに対して適用することができる。

q_x, q_y を求める理論解析には Goursat の複素応力関数を用いて解析を行った。

(2) q_x, q_y を算出する理論計算式は Dundurs のパラメータを用いて表示した。これにより、本研究結果を異材接合体に関する他の問題の解析結果と対比、検討

することが可能である。

付 録

楕円孔上に境界力 q_x, q_y を加えたときの境界上の変位 (u, v) の解析の概要を以下に示す。

Goursat の応力関数を用いることにより、応力関数と変位の一般式は、式(A-1), (A-2)で表される。

$$F(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \psi'(z)] \quad \cdots(A-1)$$

$$u - iv = \frac{1}{2G} [\kappa \overline{\varphi(z)} - \{\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)\}] \quad \cdots(A-2)$$

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \cdots \text{平面応力} \\ 3-4\nu & \cdots \text{平面ひずみ} \end{cases}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \cdots \text{横弾性係数}$$

$$E, \nu \quad \cdots \text{縦弾性係数, ポアソン比}$$

孔のない無限平板に無限遠で一様外力 q_x, q_y が働くとき、応力関数と変位は次式で表される。

$$\varphi(z) = \frac{q_x + q_y}{4} z \quad \cdots(A-3)$$

$$\psi(z) = \frac{q_y - q_x}{2} z \quad \cdots(A-4)$$

$$u - iv = \frac{x}{2G} \left[\frac{\kappa+1}{4} q_x + \left(\frac{\kappa+1}{4} - 1 \right) q_y \right] - i \frac{y}{2G} \left[\left(\frac{\kappa+1}{4} - 1 \right) q_x + \frac{\kappa+1}{4} q_y \right] \quad \cdots(A-5)$$

更に、楕円孔上 (x_0, y_0) の変位 (u_0, v_0) は、

$$u_0 = \frac{x_0}{2G} \left[\frac{\kappa+1}{4} q_x + \left(\frac{\kappa+1}{4} - 1 \right) q_y \right] \quad \cdots(A-6)$$

$$v_0 = \frac{y_0}{2G} \left[\left(\frac{\kappa+1}{4} - 1 \right) q_x + \frac{\kappa+1}{4} q_y \right] \quad \cdots(A-7)$$

次に、楕円孔を持つ無限板において、無限遠で q_x, q_y の外力が働き、かつ楕円孔周辺上に q_x, q_y の境界力が働くとき、楕円孔周上の変位は、式(A-6), (A-7)とまったく同一である。したがって、変位は次式となる。

$$[u_0]_1 = \text{式}(A-6), [v_0]_1 = \text{式}(A-7) \quad \cdots(A-8)$$

更に、楕円孔を持つ無限板に無限遠で外力 q_x, q_y が働き、楕円孔周辺上に境界力が働かないときの解析には式(A-9)の写像関数を用いる。

$$z = \frac{R}{2} \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta} \quad \cdots(A-9)$$

$$\frac{R}{2} = (a+b), \quad a = \frac{R}{2}(1+m), \quad b = \frac{R}{2}(1-m)$$

応力関数は、式(A-10), (A-11)で表される。

$$\varphi(z) = \Phi(\zeta) = \frac{R}{2} \left[\frac{q_x + q_y}{2} \zeta - \left\{ \frac{m(q_x + q_y)}{4} + \frac{q_y - q_x}{2} \right\} \frac{1}{\zeta} \right] \quad \cdots(A-10)$$

$$\psi'(z) = \Psi'(\zeta) = \frac{R}{2} \left[\frac{q_y - q_x}{2} \zeta - \frac{q_x + q_y}{2} \frac{1}{\zeta} - \left\{ \frac{m(q_x + q_y)}{2} + \frac{q_y - q_x}{2} \right\} \frac{1+m\zeta^2}{\zeta(\zeta^2-m)} \right] \quad \cdots(A-11)$$

この場合の変位は式(A-2)を用いて、

$$u - iv = \frac{1}{2G} [\kappa \overline{\Phi(\zeta)} - \{\bar{Z}(\zeta)\Phi'(\zeta) + \Psi'(\zeta)\}] \quad (A-12)$$

また、境界上に働いている力の合力 P_x, P_y は一般に式(A-13)で表される。

$$-P_y - iP_x = \overline{\Phi(\zeta)} + \{\bar{Z}(\zeta)\Phi'(\zeta) + \Psi'(\zeta)\} \quad (A-13)$$

境界上 $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$ では、 $P_x = P_y = 0$ であるから、

$$[\overline{\Phi(\zeta)}]_\sigma = -[\bar{Z}(\zeta)\Phi'(\zeta) + \Psi'(\zeta)]_\sigma \quad \cdots(A-14)$$

この条件に対する境界変位は式(A-12)から、

$$[u_0]_2 - i[v_0]_2 = \frac{1}{2G} (\kappa+1) [\overline{\Phi(\zeta)}]_{\zeta=\sigma} \quad \cdots(A-15)$$

$$\begin{aligned} [u_0]_2 &= \frac{1}{2G} \frac{\kappa+1}{4} \left[\left\{ 1 + 2 \left(\frac{b}{a} \right) q_x - q_y \right\} x_0 \right] \\ [v_0]_2 &= \frac{1}{2G} \frac{\kappa+1}{4} \left[-q_x + \left\{ 1 + 2 \left(\frac{a}{b} \right) q_y \right\} y_0 \right] \end{aligned} \quad \cdots(A-16)$$

楕円孔を持つ無限板の楕円孔上に q_x, q_y の境界力が働き、無限遠で外力が働かない場合の楕円境界上の変位 (u, v) は次式によって求められる。

$$\begin{aligned} u &= [u_0]_1 - [u_0]_2 = \frac{x_0}{2G} \left[-\frac{\kappa+1}{2} \left(\frac{b}{a} \right) q_x + \left(\frac{\kappa+1}{2} - 1 \right) q_y \right] \\ v &= [v_0]_1 - [v_0]_2 = \frac{y_0}{2G} \left[\left(\frac{\kappa+1}{2} - 1 \right) q_x - \frac{\kappa+1}{2} \left(\frac{a}{b} \right) q_y \right] \end{aligned} \quad \cdots(A-17)$$

文 献

- (1) Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, (1953), 558-577, Noordhoff
- (2) 森口, 二次元弾性論, 岩波書店, (1957), 71-77
- (3) Bogy, D. B., *J. Appl. Mech.*, **38-2**, (1971), 377-386
- (4) Dundurs, J., *J. Appl. Mech.*, **36-3**, (1969), 650-652
- (5) 井上・占口・矢田, 機論, **59-564**, A (1993), 1949-1955