特殊直交群 SO(3) を含んだ有限要素法定式化*
(第 2 報, 梁要素の剛性要素の導出)石 原 昌 文*¹Finite Element Formulation with Special Orthogonal Group SO(3)
(2nd Report, Stiffness Elements of Beam Elements)

Masabumi ISHIHARA

In the previous paper, the relationship between the stress rate and the tangent stiffness was derived using the special orthogonal group SO(3) in the finite element formulation. The stress rates used are the Truesdell stress rate, the Jaumann stress rate, the Neo-Green stress rate and the Ishihara stress rate. In this work, the stiffness elements of the tangent stiffnesses of beam elements with SO(3) are given. These elements include material stiffness $\Delta\delta\Pi_m$, geometric stiffness of rigid rotation $\Delta\delta\Pi_{rg}$, geometric stiffness of stretch to stress direction $\Delta\delta\Pi_{sg, stress}$, geometric stiffness of stretch perpendicular to area $\Delta\delta\Pi_{sg, area}$ and geometric stiffness of stretch to deformation rate $\Delta\delta\Pi_{sg, deform}$. In a future paper, the tangent stiffness of these stress rates of a beam element will be given.

Key Words: Finite Element Method, Finite Deformation Theory, Nonlinear Problem, Special Orthogonal Group, Finite Element Formulation, Objective Stress Rate, Tangent Stiffness

1. 序 論

1.1 第 1 報⁽³⁾の研究 著者の第 1 報⁽³⁾では, 特殊直交群 SO(3) を含んだ有限要素の定式化のために, 4 種類の応力速度を使用したときの接線剛性を一般形で求め, 応力速度と接線剛性の関係を示した. なお, 本論文におけるテンソルの速度表示は変分量を使用する. また, 本論文で表示する応力テンソルは, 通常の表示と異なり, 左側の成分が応力の方向成分を, 右側の成分が面の法線方向成分を表すものとする.

(a) Truesdell 応力速度 Truesdell 応力速度は, 速度勾配テンソル ΔL と同じ変形の速度をもつ観測者から見た Cauchy 応力の速度である. Truesdell 応力速度は次の式で定義される.

$$\hat{\Delta A}_T = \Delta A - \Delta L A - A \Delta L^t + \text{tr}(\Delta L) A \quad \cdots (1)$$

Truesdell 応力速度を用いた場合の接線剛性 $\Delta\delta\Pi_T$ は次の式となる.

$$\Delta\delta\Pi_T = \Delta\delta\Pi_m + \Delta\delta\Pi_{rg} + \Delta\delta\Pi_{sg, stress} \quad \cdots (2)$$

ここで, 式(2)の右辺第 1 項の $\Delta\delta\Pi_m$ を物質剛性, 第 2 項の $\Delta\delta\Pi_{rg}$ を剛体回転の幾何剛性, 第 3 項の

$\Delta\delta\Pi_{sg, stress}$ を応力の方向のストレッチの幾何剛性と呼ぶ.

(b) Jaumann 応力速度 Jaumann 応力速度は, スピンテンソル ΔW と同量だけスピンする観測者からみた Cauchy 応力の速度である. Jaumann 応力速度は次の式で定義される.

$$\hat{\Delta A}_J = \Delta A - \Delta W A - A \Delta W^t + \text{tr}(\Delta L) A \quad \cdots (3)$$

Jaumann 応力速度を用いた場合の接線剛性 $\Delta\delta\Pi_J$ は次の式となる.

$$\Delta\delta\Pi_J = \Delta\delta\Pi_m + \Delta\delta\Pi_{rg} + \Delta\delta\Pi_{sg, stress} - \Delta\delta\Pi_{sg, deform} \quad \cdots (4)$$

ここで, 式(4)の右辺第 4 項の $\Delta\delta\Pi_{sg, deform}$ を変形速度のストレッチの幾何剛性と呼ぶ.

(c) Neo-Green 応力速度 Neo-Green 応力速度は, 剛体回転スピンテンソル $\Delta\Phi$ と同量だけスピンする観測者からみた Cauchy 応力の速度である. Neo-Green 応力速度は次の式で定義される.

$$\hat{\Delta A}_G = \Delta A - \Delta\Phi A - A \Delta\Phi^t + \text{tr}(\Delta L) A \quad \cdots (5)$$

Neo-Green 応力速度を用いた場合の接線剛性 $\Delta\delta\Pi_G$ は次の式となる.

$$\Delta\delta\Pi_G = \Delta\delta\Pi_m + \Delta\delta\Pi_{rg} - \Delta\delta\Pi_{sg, area} \quad \cdots (6)$$

* 原稿受付 1996 年 6 月 7 日.

*¹ 正員, 三菱自動車工業(株)乗用車開発本部 (〒444 岡崎市橋目町字中新切 1).

ここで、式(6)の右辺第3項の $\Delta\delta\Pi_{sg, area}$ を面の法線のストレッチの幾何剛性と呼ぶ。

(d) Ishihara 応力速度 Ishihara 応力速度は、面の法線方向には速度勾配テンソル $\Delta\mathbf{L}$ と同じ変形速度をもち、応力の方向には剛体回転スピテンソル $\Delta\Phi$ と同量だけスピンする観測者からみた Cauchy 応力の速度である。Ishihara 応力速度は次の式で定義される。

$$\hat{\Delta}\mathbf{A}_I = \Delta\mathbf{A} - \Delta\Phi\mathbf{A} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{L}^t + \text{tr}(\Delta\mathbf{L})\mathbf{A} \quad \dots\dots\dots (7)$$

Ishihara 応力速度を用いた場合の接線剛性 $\Delta\delta\Pi_I$ は次の式となる。

$$\Delta\delta\Pi_I = \Delta\delta\Pi_m + \Delta\delta\Pi_{rg} \quad \dots\dots\dots (8)$$

よって、Ishihara 応力速度を使った接線剛性は、物質剛性 $\Delta\delta\Pi_m$ と剛体回転の幾何剛性 $\Delta\delta\Pi_{rg}$ のみとなり、ストレッチに関する幾何剛性がなくなる。

1・2 本報の研究について 第1報⁽³⁾では、4種類の応力速度を使用したときの接線剛性を一般形で求めたが、本報では、その一般形の接線剛性をもとに、SO(3)を含んだはり要素の接線剛性を構成する剛性である、剛性要素を導出する。導出する剛性要素は、物質剛性 $\Delta\delta\Pi_m$ 、剛体回転の幾何剛性 $\Delta\delta\Pi_{rg}$ 、応力の方向のストレッチの幾何剛性 $\Delta\delta\Pi_{sg, stress}$ 、面の法線のストレッチの幾何剛性 $\Delta\delta\Pi_{sg, area}$ と変形速度のストレッチの幾何剛性 $\Delta\delta\Pi_{sg, deform}$ である。

記 号 表

Δ, δ : 変分(変化速度)を表す記号

$\hat{\Delta}$: Total Lagrangian 座標系での客観的な変化率(客観速度)を表す記号

$\hat{\Delta}$: Updated Lagrangian 座標系での客観的な変化率(客観速度)を表す記号

$\delta\Pi$: 内部仮想仕事(internal virtual work)

$\Delta\delta\Pi$: 接線剛性(tangent stiffness)

$\Delta\delta\Pi_T$: Truesdell 応力速度による接線剛性

$\Delta\delta\Pi_J$: Jaumann 応力速度による接線剛性

$\Delta\delta\Pi_G$: Neo-Green 応力速度による接線剛性

$\Delta\delta\Pi_I$: Ishihara 応力速度による接線剛性

$\Delta\delta\Pi_m$: 物質剛性

$\Delta\delta\Pi_{rg}$: 剛体回転の幾何剛性

$\Delta\delta\Pi_{sg, stress}$: 応力の方向のストレッチの幾何剛性

$\Delta\delta\Pi_{sg, area}$: 面の法線のストレッチの幾何剛性

$\Delta\delta\Pi_{sg, deform}$: 変形速度のストレッチの幾何剛性

$\mathbf{F}$: 変形勾配テンソル(deformation gradient tensor)

$\mathbf{T}$: 断面の剛体回転の変換マトリックス、

SO(3)

$\mathbf{F}_M$: 断面の剛体回転前の変形勾配テンソル、中間配置における変形勾配テンソル

$\Delta\mathbf{u}$: 変位の変分のベクトル

$\Delta\phi$: 回転の変分のベクトル

$\Delta\mathbf{L}$: 速度勾配テンソル(velocity gradient tensor)

$\Delta\mathbf{D}$: 変形速度テンソル(deformation rate tensor)

$\Delta\mathbf{W}$: スピテンソル(spin tensor)

$\Delta\bar{\mathbf{L}}$: ストレッチ速度テンソル(stretch rate tensor)

$\Delta\Phi$: 剛体回転スピテンソル(rigid body spin tensor)

$\mathbf{P}$: 第1ピオラ-キルヒホッフ応力テンソル(first Piola-Kirchhoff stress tensor)

$\mathbf{S}$: 第2ピオラ-キルヒホッフ応力テンソル(second Piola-Kirchhoff stress tensor)

$\mathbf{A}$: コーシー応力テンソル(Cauchy stress tensor)

$\Delta\mathbf{S}$: 第2ピオラ-キルヒホッフ応力の速度テンソル

$\hat{\Delta}\mathbf{A}_T$: Truesdell 応力速度

$\hat{\Delta}\mathbf{A}_J$: Jaumann 応力速度

$\hat{\Delta}\mathbf{A}_G$: Neo-Green 応力速度

$\hat{\Delta}\mathbf{A}_I$: Ishihara 応力速度

$\mathbf{E}_I, I=1, 2, 3$: 基準配置での直交座標系のベースベクトル

$\mathbf{t}_I, I=1, 2, 3$: 現在配置での直交座標系のベースベクトル

$\xi_\alpha, \alpha=1, 2$: 断面内の座標

S : 基準配置での中心線座標

s : 現在配置での中心線座標

V : 基準配置での体積

v : 現在配置での体積

A : 基準配置での面積

a : 現在配置での面積

L : 基準配置での全長

l : 現在配置での全長

J : 基準配置から現在配置までの体積増加率

2. 梁 モ デ ル

2・1 運動の仮定 J. C. Simo, L. Vu-Quoc ら⁽¹⁾⁽²⁾

の Moving Frame による梁モデルは、梁の現在配置が、梁の基準配置からの中心線の位置と Moving Frame で定義される断面の向きで表現される。その

中心線の位置は曲線 $\mathbf{x}_0: (0, L) \rightarrow \mathbb{R}^3$ で表され、断面の向きは回転群を構成する変換マトリックス $\mathbf{T}: (0, L) \rightarrow \text{SO}(3)$ で表される。それより、現在配置における直交単位ベクトルを $\mathbf{t}_{I, I=1,2,3}$ とし、基準配置における直交単位ベクトルを $\mathbf{E}_{I, I=1,2,3}$ とすると、次の式が成り立つ。

$$\mathbf{t}_I = \mathbf{T} \mathbf{E}_I, \quad I=1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (9)$$

そして、配置空間 C は梁のすべての可能な配置の集合であり、次の式で表される積空間 $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ となる。

$$C \equiv \{\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_0, \mathbf{T}) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

そして、梁の許容配置は、次のような形となる。

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, S) \equiv \mathbf{x}_0(S) + \xi_a \mathbf{t}_a(S), \quad a=1, 2 \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、パラメータ $S \in (0, L)$ は、基準配置の中心線の弧の長さを表す。ここでは、単純化のために、基準配置の梁の中心線を直線であると仮定する。また、梁のせん断変形のため、現在配置において断面は梁の中心線に垂直にはならない。式(11)の仮定の幾何学的な意味を図1に示す。

2.2 変形勾配テンソル 梁の変形勾配テンソルは、運動の仮定である式(11)より、次の式で定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\xi_1, \xi_2, S) &\equiv \frac{d\mathbf{x}}{d\xi_1} \otimes \mathbf{E}_1 + \frac{d\mathbf{x}}{d\xi_2} \otimes \mathbf{E}_2 + \frac{d\mathbf{x}}{dS} \otimes \mathbf{E}_3 \\ &= \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \left[\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial S} + \frac{d(\xi_a \mathbf{t}_a)}{dS} \right] \otimes \mathbf{E}_3 \\ &= \mathbf{t}_a \otimes \mathbf{E}_a + \left[\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial S} + \boldsymbol{\omega} \times (\xi_a \mathbf{t}_a) \right] \otimes \mathbf{E}_3 \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここで、 $\boldsymbol{\omega}$ は反対称テンソルである曲率テンソル $\boldsymbol{\Omega} \equiv d\mathbf{T}/dS \cdot \mathbf{T}^t$ の軸性ベクトル(axial vector)であり、次の式で定義される。

$$\frac{d}{dS} \mathbf{t}_I = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}_I, \quad I=1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (13)$$

Fig. 1 Beam model by moving frame

添字に使われるアルファベットは1, 2, 3を、ギリシャ文字は1, 2を暗黙に示すこととする。さて、式(12)を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{t}_I \otimes \mathbf{E}_I + \left[\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial S} - \mathbf{t}_3 + \boldsymbol{\omega} \times (\xi_a \mathbf{t}_a) \right] \otimes \mathbf{E}_3 \\ &= \mathbf{T} [\mathbf{I} + \{ \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\kappa} \times (\xi_a \mathbf{E}_a) \} \otimes \mathbf{E}_3] \\ &= \mathbf{T} \mathbf{F}_M \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{T}$ は断面の剛体回転の変換マトリックスであり、 $\mathbf{F}_M$ は断面の剛体回転前の中間配置における変形勾配テンソルである。ただし、この分解は、右極分解とは厳密には異なる。ここで、 $\mathbf{F}_M$ を次の式で表示する。

$$\mathbf{F}_M = \mathbf{I} + \{ \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\kappa} \times (\xi_a \mathbf{E}_a) \} \otimes \mathbf{E}_3 \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、次の記号を定義する。

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{T}^t \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{T}^t \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial S} - \mathbf{E}_3 \quad \dots\dots\dots (16 \cdot a)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial S} - \mathbf{t}_3 \quad \dots\dots\dots (16 \cdot b)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{T}^t \boldsymbol{\omega} \quad \dots\dots\dots (16 \cdot c)$$

梁の任意の配置 $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_0, \mathbf{T}) \in C$ を考える。また、反対称テンソルのリー代数(Lie algebra)を $\mathfrak{so}(3)$ で表す。そして、反対称テンソル $\Delta \boldsymbol{\Phi} \in \mathfrak{so}(3)$ に関する軸性ベクトルを $\Delta \boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3$ とする。そして、ベクトル $\Delta \mathbf{u}$ を中心線の微小変位、ベクトル $\Delta \boldsymbol{\phi}$ を微小回転とすると、 $\Delta \mathbf{x} \equiv (\Delta \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ は許容変分(admissible variations)として定義できる。 $\Delta \mathbf{x}$ の集合を次の式で表示する。

$$T_x C \equiv \{ \Delta \mathbf{x} \equiv (\Delta \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \} \quad \dots\dots\dots (17)$$

幾何学的用語で、 $T_x C$ は配置空間 C 上での接空間(tangent space)と呼ぶ。

次に、変形勾配テンソルの変分を求める。式(14)の変分を実行する。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F} &= \Delta(\mathbf{T} \mathbf{F}_M) = \Delta \mathbf{T} \mathbf{F}_M + \mathbf{T} \Delta \mathbf{F}_M \\ &= \Delta \mathbf{T} \mathbf{T}^t \mathbf{T} \mathbf{F}_M + \mathbf{T} \Delta \mathbf{F}_M = \Delta \boldsymbol{\Phi} \mathbf{F} + \mathbf{T} \Delta \mathbf{F}_M \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

ここで、

$$\Delta \boldsymbol{\Phi} \equiv \Delta \mathbf{T} \mathbf{T}^t = \Delta \boldsymbol{\phi} \times \quad \dots\dots\dots (19 \cdot a)$$

$$\Delta \mathbf{F}_M \equiv [\Delta \boldsymbol{\Gamma} + \Delta \boldsymbol{\kappa} \times (\xi_a \mathbf{E}_a)] \otimes \mathbf{E}_3 \quad \dots\dots\dots (19 \cdot b)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{F}} \equiv \mathbf{T} \Delta \mathbf{F}_M = [\Delta \boldsymbol{\gamma} + \Delta \boldsymbol{\omega} \times (\xi_a \mathbf{t}_a)] \otimes \mathbf{E}_3 \quad \dots\dots\dots (19 \cdot c)$$

$$\Delta \boldsymbol{\Gamma} \equiv \mathbf{T}^t \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial S} - \Delta \boldsymbol{\phi} \times \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial S} \right] \quad \dots\dots\dots (19 \cdot d)$$

$$\Delta \boldsymbol{\kappa} \equiv \mathbf{T}^t \frac{d \Delta \boldsymbol{\phi}}{dS} \quad \dots\dots\dots (19 \cdot e)$$

$$\Delta \boldsymbol{\gamma} \equiv \mathbf{T} \Delta \boldsymbol{\Gamma} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial S} - \Delta \boldsymbol{\phi} \times \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial S} \quad \dots\dots\dots (19 \cdot f)$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{T} \Delta \boldsymbol{\kappa} = \frac{d \Delta \boldsymbol{\phi}}{dS} \quad \dots\dots\dots (19 \cdot g)$$

である。

2・3 速度勾配テンソル 断面の剛体回転前の変形勾配テンソル F_M は式(15)で与えられているが、さらに、次の形で表示することができる。

$$F_M = G_I \otimes E_I, \quad G_a = E_a, \\ G_3 = T^t \frac{\partial x_0}{\partial S} + \boldsymbol{\kappa} \times (\xi_a E_a) \dots\dots\dots (20)$$

そうすると、 F_M の逆テンソル F_M^{-1} は、定義 $F_M^{-1} F_M = I$ により次の式となる。

$$F_M^{-1} = E_I \otimes G^I \\ = E_a \otimes G^a + E_3 \otimes \left[T^t \frac{\partial x_0}{\partial S} + \boldsymbol{\kappa} \times (\xi_a E_a) \right]^{-1} E_3 \\ \approx E_a \otimes E_a + E_3 \otimes \left(\frac{dS}{ds} \right)^{-1} (1 - \kappa_1 \xi_2 \lambda^{-1} \\ + \kappa_2 \xi_1 \lambda^{-1}) E_3 \\ \approx E_a \otimes E_a + E_3 \otimes \left(\frac{dS}{ds} \right)^{-1} E_3 \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 $\lambda = ds/dS$ であり、また、数値のオーダーの大きさと、以降の数式の展開の単純化を考えて、 F_M^{-1} を式(21)のように近似した。さて、式(21)で F_M^{-1} が示されたので、 F^{-1} を次の式で表示する。

$$F^{-1} = (TF_M)^{-1} = F_M^{-1} T^t \dots\dots\dots (22)$$

次に、速度勾配テンソル ΔL を定義により次の式で表示する。

$$\Delta L = \Delta F F^{-1} = (\Delta \Phi F + \Delta \bar{F}) F^{-1} \\ = \Delta \Phi + \Delta \bar{F} F^{-1} = \Delta \Phi + \Delta \bar{L} \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $\Delta \Phi$ は式(19・a)で定義された剛体スピテンソル、 $\Delta \bar{L}$ は次の式で表示されるストレッチ速度テンソルである。

$$\Delta \bar{L} = \Delta \bar{F} F^{-1} \\ = [\{\Delta \boldsymbol{\gamma} + \Delta \boldsymbol{\omega} \times (\xi_a t_a)\} \otimes E_3] \\ \times \left[E_a \otimes E_a + E_3 \otimes \left(\frac{dS}{ds} \right) E_3 \right] T^t \\ = \left(\frac{dS}{ds} \right) \{\Delta \boldsymbol{\gamma} + \Delta \boldsymbol{\omega} \times (\xi_a t_a)\} \otimes t_3 \\ = \{\Delta \boldsymbol{\gamma} + \Delta \boldsymbol{\omega} \times (\xi_a t_a)\} \otimes t_3 \dots\dots\dots (24)$$

ここで、

$$\Delta \boldsymbol{\gamma} \equiv \frac{d\Delta \mathbf{u}}{ds} - \Delta \boldsymbol{\phi} \times \frac{dx_0}{ds} \dots\dots\dots (25 \cdot a)$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{d\Delta \boldsymbol{\phi}}{ds} \dots\dots\dots (25 \cdot b)$$

である。

次に、式(19・c)の変分記号を Δ から δ に入れ替えたテンソル $\delta \bar{F}$ は、特殊直交群 SO(3) を含んでいるため、その第2変分 $\Delta \delta \bar{F}$ が存在する。

$$\Delta \delta \bar{F} = \left[-\delta \boldsymbol{\phi} \times \frac{d\Delta \mathbf{u}}{ds} + \delta \boldsymbol{\omega} \times \{\Delta \boldsymbol{\phi} \times (\xi_a t_a)\} \right] \otimes E_3 \\ \dots\dots\dots (26)$$

$\Delta \delta \bar{F}$ を使って、ストレッチ速度テンソル $\delta \bar{L}$ の第2

変分 $\Delta \delta \bar{L}$ を求める。

$$\Delta \delta \bar{L} \equiv \Delta \delta \bar{F} F^{-1} \\ = \left[\left[-\delta \boldsymbol{\phi} \times \frac{d\Delta \mathbf{u}}{ds} + \delta \boldsymbol{\omega} \times \{\Delta \boldsymbol{\phi} \times (\xi_a t_a)\} \right] \otimes E_3 \right] \\ \times \left[E_a \otimes E_a + E_3 \otimes \left(\frac{dS}{ds} \right) E_3 \right] T^t \\ = \left[-\delta \boldsymbol{\phi} \times \frac{d\Delta \mathbf{u}}{ds} + \delta \boldsymbol{\omega} \times \{\Delta \boldsymbol{\phi} \times (\xi_a t_a)\} \right] \otimes t_3 \\ \dots\dots\dots (27)$$

これを、速度勾配テンソルの第2変分 $\Delta \delta L$ とする。

次に、式(23)を使って、変形速度テンソル ΔD とスピテンソル ΔW を求める。

$$\Delta D = \frac{1}{2} [\Delta L + \Delta L^t] \\ = \frac{1}{2} [(\Delta \Phi + \Delta \bar{L}) + (\Delta \Phi + \Delta \bar{L})^t] \\ = \frac{1}{2} [\Delta \bar{L} + \Delta \bar{L}^t] \dots\dots\dots (28)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} [\Delta L - \Delta L^t] \\ = \frac{1}{2} [(\Delta \Phi + \Delta \bar{L}) - (\Delta \Phi + \Delta \bar{L})^t] \\ = \Delta \Phi + \frac{1}{2} [\Delta \bar{L} - \Delta \bar{L}^t] \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $\Delta \Phi$ は反対称テンソルであり、その性質 $\Delta \Phi^t = -\Delta \Phi$ を使っている。

3. 物質剛性

3・1 構成方程式 任意の応力速度を使った構成方程式を次の式で定義する。

$$\Delta A_X = C : \Delta D \dots\dots\dots (30)$$

ここで、 ΔA_X は任意の客観性をもった応力速度、 ΔD は変形速度テンソル、 C は現在配置の弾性係数テンソルである。そして、 C は次の式で定義する。

$$C = C_{IJKL} t_I \otimes t_J \otimes t_K \otimes t_L \dots\dots\dots (31)$$

ここで、 C は I, J に関して、また、 K, L に関して対称であるとする。さらに、 (I, J) の組と (K, L) の組に関して対称であるとする。そうすると、 ΔD と $\Delta \bar{L}$ の定義式(24)、(28)とその対称性を利用して、以下の式の展開を行うことができる。

$$\Delta A_X = C : \Delta D \\ = C : \frac{1}{2} (\Delta \bar{L} + \Delta \bar{L}^t) \\ = C : \Delta \bar{L} \\ = C : \{\Delta \boldsymbol{\gamma} + \Delta \boldsymbol{\omega} \times (\xi_a t_a)\} \otimes t_3 \\ = C_{IJK3} t_I \otimes t_J \otimes t_K \cdot \{\Delta \boldsymbol{\gamma} + \Delta \boldsymbol{\omega} \times (\xi_a t_a)\} \\ \dots\dots\dots (32)$$

この結果を使って、さらに、次の式を求める。

$$\Delta A_X : \delta \bar{L}$$

$$\begin{aligned}
&= [C_{IJK3} t_I \otimes t_J \otimes t_K \cdot \{\bar{\Delta} \gamma + \bar{\Delta} \omega \times (\xi_a t_a)\}] \\
&: [\{\bar{\delta} \gamma + \bar{\delta} \omega \times (\xi_\beta t_\beta)\} \otimes t_3] \\
&= \{\bar{\delta} \gamma + \bar{\delta} \omega \times (\xi_\beta t_\beta)\} \cdot C_{IJK3} t_I \otimes t_J \cdot \{\bar{\Delta} \gamma \\
&+ \bar{\Delta} \omega \times (\xi_a t_a)\} \\
&= \{\bar{\delta} \gamma + \bar{\delta} \omega \times (\xi_\beta t_\beta)\} \cdot c_{33} \{\bar{\Delta} \gamma + \bar{\Delta} \omega \times (\xi_a t_a)\} \\
&\dots\dots\dots (33)
\end{aligned}$$

ここで, c_{33} は現在配置における断面内の弾性係数テンソルであり, 次の式で定義する.

$$c_{33} = C_{IJK3} t_I \otimes t_J \otimes t_K \dots\dots\dots (34)$$

ここでは, c_{33} を次の式で仮定する.

$$c_{33} = \text{Diag} [G, G, E] \dots\dots\dots (35)$$

3・2 物質剛性 接線剛性のなかで, 物質剛性 $\Delta \delta \Pi_m$ を次の式で定義する.

$$\Delta \delta \Pi_m = \int_V \bar{\Delta} A_X : \bar{\delta} \bar{L} dV \dots\dots\dots (36)$$

式(33)を使って物質剛性を求める.

$$\begin{aligned}
\Delta \delta \Pi_m &= \int_V \{\bar{\delta} \gamma + \bar{\delta} \omega \times (\xi_\beta t_\beta)\} \\
&\times c_{33} \{\bar{\Delta} \gamma + \bar{\Delta} \omega \times (\xi_a t_a)\} dV \\
&= \int_V [\bar{\delta} \gamma \cdot c_{33} \bar{\Delta} \gamma + \bar{\delta} \omega \times (\xi_\beta t_\beta) \\
&\times c_{33} \bar{\Delta} \omega \times (\xi_a t_a)] dV \\
&= \int_V [\bar{\delta} \gamma \cdot c_{33} \bar{\Delta} \gamma + \bar{\delta} \omega \cdot \{-(\xi_\beta t_\beta) \times c_{33} \\
&\times (\xi_a t_a)\} \cdot \bar{\Delta} \omega] dV \\
&= \int_{[0, l]} [\bar{\delta} \gamma \cdot c_{33a} \bar{\Delta} \gamma + \bar{\delta} \omega \cdot c_{33b} \bar{\Delta} \omega] ds \dots\dots\dots (37)
\end{aligned}$$

ここで,

$$c_{33a} = \int_a c_{33} da \dots\dots\dots (38 \cdot a)$$

$$c_{33b} = \int_a \{-(\xi_\beta t_\beta) \times c_{33} \times (\xi_a t_a)\} da \dots\dots\dots (38 \cdot b)$$

である. また, 簡単化のために断面一次モーメントと慣性乗積は, $\int_a \xi_a da = 0$, (not summed), $\int_a \xi_1 \xi_2 da = 0$ を仮定している.

物質剛性を変分 $(\Delta u, \Delta \phi)$, $(\delta u, \delta \phi)$ で表示する.

$$\Delta \delta \Pi_m = \int_{[0, l]} \left\{ \frac{\delta u}{\delta \phi} \right\} \cdot b^t c b \left\{ \frac{\Delta u}{\Delta \phi} \right\} ds \dots\dots\dots (39)$$

ここで, 式(39)中のテンソルを以下の式で定義する.

$$b \equiv \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} \mathbf{1} & \left[\frac{d \mathbf{x}_0}{ds} \times \right] \\ \mathbf{0} & \frac{d}{ds} \mathbf{1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (40)$$

$$\mathbf{1} \equiv \text{diag} [1, 1, 1] \dots\dots\dots (41 \cdot a)$$

$$\frac{d}{ds} \mathbf{1} \equiv \text{diag} \left[\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds}, \frac{d}{ds} \right] \dots\dots\dots (41 \cdot b)$$

$$c \equiv \text{diag} [GA_1, GA_2, EA, EI_1, EI_2, GJ] \dots\dots\dots (42)$$

また, A_a は剪断補正係数 k_a を含んだ断面積, I_a は断

面二次モーメント, J は振り定数を表す. そして, A_a と I_a は次の式で定義される.

$$A_a \equiv k_a \int_a da \dots\dots\dots (43)$$

$$I_1 \equiv \int_a \xi_2^2 da \dots\dots\dots (44 \cdot a)$$

$$I_2 \equiv \int_a \xi_1^2 da \dots\dots\dots (44 \cdot b)$$

また, 式(39)は対称である.

4. 幾何剛性

4・1 剛体回転の幾何剛性 接線剛性のうち, 剛体回転の幾何剛性 $\Delta \delta \Pi_{rg}$ を次の式で定義する.

$$\Delta \delta \Pi_{rg} = \int_V [\bar{\Delta} \Phi A : \bar{\delta} \bar{L} + A : \bar{\Delta} \delta \bar{L}] dV \dots\dots\dots (45)$$

コーシー応力 A は次の式で表示することができる.

$$A = A_1 \otimes t_1 + A_2 \otimes t_2 + A_3 \otimes t_3 \dots\dots\dots (46)$$

ここで, A_3 は断面内の応力ベクトルである. 次に, 剛体スピンテンソル $\bar{\Delta} \Phi$ の式(19・a)とストレッチ速度テンソル $\bar{\delta} \bar{L}$ の式(24)から, 式(45)の積分記号のなかの第1項を求める.

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} \Phi A : \bar{\delta} \bar{L} &= \bar{\Delta} \phi \times A : \{\bar{\delta} \gamma + \bar{\delta} \omega \times (\xi_a t_a)\} \otimes t_3 \\
&= \bar{\Delta} \phi \times A_3 : \{\bar{\delta} \gamma + \bar{\delta} \omega \times (\xi_a t_a)\} \dots\dots\dots (47)
\end{aligned}$$

次に, ストレッチ速度テンソルの第2変分 $\bar{\Delta} \delta \bar{L}$ の式から, 式(45)の積分記号のなかの第2項を求める.

$$\begin{aligned}
A : \bar{\Delta} \delta \bar{L} &= A : \left[-\bar{\delta} \phi \times \frac{d \Delta u}{ds} + \bar{\delta} \omega \times \{\bar{\Delta} \phi \times (\xi_a t_a)\} \right] \otimes t_3 \\
&= A_3 : \left[-\bar{\delta} \phi \times \frac{d \Delta u}{ds} + \bar{\delta} \omega \times \{\bar{\Delta} \phi \times (\xi_a t_a)\} \right] \\
&\dots\dots\dots (48)
\end{aligned}$$

さて, テンソル解析には次に示す公式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
(a \times b) \cdot (c \times d) &= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) - (a \cdot d) \cdot (b \cdot c) \\
&= a \cdot \{(b \cdot d) - d \otimes b\} \cdot c \dots\dots\dots (49)
\end{aligned}$$

ここで, 式(47)の $\bar{\delta} \gamma$ の項と式(48)の $\bar{\delta} \phi (d \Delta u / ds)$ の項を, 式(49)の公式を使って, 次の展開を行う.

$$\begin{aligned}
&\bar{\Delta} \phi \times A_3 \cdot \bar{\delta} \gamma + A_3 \cdot \left(-\bar{\delta} \phi \times \frac{d \Delta u}{ds} \right) \\
&= \bar{\Delta} \phi \times A_3 \cdot \left(\frac{d \delta u}{ds} - \bar{\delta} \phi \times \frac{d x_0}{ds} \right) \\
&+ A_3 \cdot \left(-\bar{\delta} \phi \times \frac{d \Delta u}{ds} \right) \\
&= \bar{\delta} \phi \cdot A_3 \times \frac{d \Delta u}{ds} - \frac{d \delta u}{ds} \cdot A_3 \times \bar{\Delta} \phi \\
&+ \bar{\delta} \phi \cdot \left\{ A_3 \otimes \frac{d x_0}{ds} - \left(A_3 \cdot \frac{d x_0}{ds} \right) \mathbf{1} \right\} \cdot \bar{\Delta} \phi \dots\dots\dots (50)
\end{aligned}$$

また, テンソル解析には次に示す公式が成り立つ.

$$b \times (a \times c) - c \times (a \times b) = a \times (b \times c) \dots\dots\dots (51)$$

ここで、式(47)と式(48)の残りの項を、式(51)を使って、次の展開を行う。

$$\begin{aligned} \Delta\phi \times A_3 \cdot \{\delta\omega \times (\xi_a t_a)\} + A_3 \cdot [\delta\omega \times \{\Delta\phi \times (\xi_a t_a)\}] \\ = [(\xi_a t_a) \times (\Delta\phi \times A_3) - A_3 \times \{\Delta\phi \times (\xi_a t_a)\}] \cdot \delta\omega \\ = \Delta\phi \times \{(\xi_a t_a) \times A_3\} \cdot \delta\omega \\ = \Delta\phi \times \{(\xi_a t_a) \times A_3\} \cdot \frac{d\Delta\phi}{ds} \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

ここで、現在配置における曲率テンソルの変分の式(25・b)を使っている。

次に、合応力 n と合モーメント m を次の式で定義する。

$$n = \int_a A_3 da \dots\dots\dots (53)$$

$$m = \int_a (\xi_a t_a) \times A_3 da \dots\dots\dots (54)$$

式(50)と式(52)から、式(53)、(54)を使って、剛体回転の幾何剛性 $\Delta\delta\pi_{rg}$ を求める。

$$\begin{aligned} \Delta\delta\pi_{rg} = \int_v \left[\delta\phi \cdot A_3 \times \frac{d\Delta u}{ds} - \frac{d\delta u}{ds} \cdot A_3 \times \Delta\phi \right. \\ \left. + \delta\phi \cdot \left\{ A_3 \otimes \frac{dx_0}{ds} - \left(A_3 \cdot \frac{dx_0}{ds} \right) \mathbf{1} \right\} \cdot \Delta\phi \right. \\ \left. + \Delta\phi \times \{(\xi_a t_a) \times A_3\} \cdot \frac{d\Delta\phi}{ds} \right] dv \\ = \int_{[0,1]} \left[\delta\phi \cdot n \times \frac{d\Delta u}{ds} - \frac{d\delta u}{ds} \cdot n \times \Delta\phi \right. \\ \left. + \delta\phi \cdot \left\{ n \otimes \frac{dx_0}{ds} - \left(n \cdot \frac{dx_0}{ds} \right) \mathbf{1} \right\} \cdot \Delta\phi \right. \\ \left. + \Delta\phi \times m \cdot \frac{d\Delta\phi}{ds} \right] ds \\ = \int_{[0,1]} \left\{ \frac{\delta u}{\delta\phi} \right\} \cdot g^t fg \left\{ \frac{\Delta u}{\Delta\phi} \right\} ds \dots\dots\dots (55) \end{aligned}$$

ここで、式(55)のなかのテンソルを以下の式で定義する。

$$\begin{aligned} g = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \frac{d}{ds} \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (56) \\ f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & [-n \times] \\ 0 & 0 & [-m \times] \\ [n \times] & 0 & \left\{ n \otimes \frac{dx_0}{ds} - \left(n \cdot \frac{dx_0}{ds} \right) \mathbf{1} \right\} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (57) \end{aligned}$$

また、著者は今後の研究で、剛体回転の幾何剛性 $\Delta\delta\pi_{rg}$ は対称化しても、Newton-Raphson 法による収束率は二次が保たれることを示す。よって、この剛性は対称化可能となる。

4・2 応力の方向のストレッチの幾何剛性 接線剛性のうち、応力の方向のストレッチの幾何剛性 $\Delta\delta\pi_{sg, stress}$ を次の式で定義する。

$$\Delta\delta\pi_{sg, stress} = \int_v \Delta\bar{L}A : \delta\bar{L} dv \dots\dots\dots (58)$$

次に、ストレッチ速度テンソル $\delta\bar{L}$ の式(24)から、式(58)の積分記号のなかを求める。

$$\begin{aligned} \Delta\bar{L}A : \delta\bar{L} = [\{\bar{\Delta}\gamma + \bar{\Delta}\omega \times (\xi_a t_a)\} \otimes t_3] A \\ : [\{\delta\gamma + \delta\omega \times (\xi_\beta t_\beta)\} \otimes t_3] \\ = [\{\bar{\Delta}\gamma + \bar{\Delta}\omega \times (\xi_a t_a)\} \otimes t_3] A_3 \cdot \{\delta\gamma \\ + \delta\omega \times (\xi_\beta t_\beta)\} \\ = \{\bar{\Delta}\gamma + \bar{\Delta}\omega \times (\xi_a t_a)\} A_{33} \cdot \{\delta\gamma + \delta\omega \times (\xi_\beta t_\beta)\} \\ = \delta\gamma \cdot A_{33} \bar{\Delta}\gamma - \delta\gamma \cdot (\xi_a t_a) A_{33} \times \bar{\Delta}\omega \\ + \delta\omega \cdot (\xi_\beta t_\beta) A_{33} \times \bar{\Delta}\gamma \\ + \{\delta\omega \times (\xi_\beta t_\beta)\} \cdot A_{33} \{\bar{\Delta}\omega \times (\xi_a t_a)\} \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

さて、テンソル解析には公式(49)が成り立つので、それを使って、式(59)の最終式の第4項を次の式で示す。

$$\begin{aligned} \{\delta\omega \times (\xi_\beta t_\beta)\} \cdot A_{33} \{\bar{\Delta}\omega \times (\xi_a t_a)\} \\ = \delta\omega \cdot \{(\xi_\beta t_\beta) \cdot (\xi_a t_a)\} A_{33} \mathbf{1} \cdot \bar{\Delta}\omega \\ - \delta\omega \cdot \{(\xi_\beta t_\beta) \otimes (\xi_a t_a)\} A_{33} \cdot \bar{\Delta}\omega \dots\dots\dots (60) \end{aligned}$$

ここで、次の合応力成分と合モーメント成分を定義する。

$$n_3 = \int_a A_{33} da \dots\dots\dots (61)$$

$$\varepsilon_{a\beta} m_\beta t_a = - \int_a (\xi_a t_a) A_{33} da \dots\dots\dots (62)$$

式(59)に式(60)～(62)を使って、応力の方向のストレッチの幾何剛性 $\Delta\delta\pi_{sg, stress}$ を次の式で表示する。

$$\begin{aligned} \Delta\delta\pi_{sg, stress} = \int_v \Delta\bar{L}A : \delta\bar{L} dv \\ = \int_{[0,1]} [\delta\gamma \cdot n_3 \bar{\Delta}\gamma + \delta\gamma \cdot \varepsilon_{a\beta} m_\beta t_a \times \bar{\Delta}\omega \\ - \delta\omega \cdot \varepsilon_{a\beta} m_\beta t_a \times \bar{\Delta}\gamma + \delta\omega \cdot n_3 r \cdot \bar{\Delta}\omega] ds \\ = \int_{[0,1]} \left\{ \frac{\delta u}{\delta\phi} \right\} \cdot b' q b \left\{ \frac{\Delta u}{\Delta\phi} \right\} ds \dots\dots\dots (63) \end{aligned}$$

ここで、式(63)中のテンソルを以下の式で定義する。

$$q = \begin{bmatrix} n_3 \mathbf{1} & \varepsilon_{a\beta} m_\beta t_a \times \\ -\varepsilon_{a\beta} m_\beta t_a \times & n_3 r \end{bmatrix} \dots\dots\dots (64)$$

$$\begin{aligned} r = \frac{1}{a} \int_a [\{(\xi_\beta t_\beta) \cdot (\xi_a t_a)\} \mathbf{1} - \{(\xi_\beta t_\beta) \otimes (\xi_a t_a)\}] da \\ = \frac{1}{a} \text{Diag} [I_1, I_2, I_P] \dots\dots\dots (65) \end{aligned}$$

$$I_P \equiv I_1 + I_2 \dots\dots\dots (66)$$

また、式(63)は対称である。

4・3 面の法線のストレッチの幾何剛性 接線剛性のうち、面の法線のストレッチの幾何剛性 $\Delta\delta\pi_{sg, area}$ を次の式で定義する。

$$\Delta\delta\pi_{sg, area} = \int_v A \Delta\bar{L}' : \delta\bar{L} dv \dots\dots\dots (67)$$

次に、ストレッチ速度テンソル $\delta\bar{L}$ の式(24)から、式(67)の積分記号のなかの式を求める。

$$\begin{aligned}
& A\Delta\bar{L}^t:\delta\bar{L} \\
&= A[\{\Delta\gamma + \Delta\omega \times (\xi_a t_a)\} \otimes t_3]^t \\
&: [\{\delta\gamma + \delta\omega \times (\xi_a t_a)\} \otimes t_3] \\
&= [A_3 \otimes \{\Delta\gamma + \Delta\omega \times (\xi_a t_a)\}] \\
&: [\{\delta\gamma + \delta\omega \times (\xi_a t_a)\} \otimes t_3] \\
&= [A_3 \cdot \{\delta\gamma + \delta\omega \times (\xi_a t_a)\}] [\{\Delta\gamma \\
&+ \Delta\omega \times (\xi_a t_a)\} \cdot t_3] \\
&= \{\delta\gamma + \delta\omega \times (\xi_a t_a)\} \cdot (A_3 \otimes t_3) \{\Delta\gamma \\
&+ \Delta\omega \times (\xi_a t_a)\} \\
&= \delta\gamma \cdot (A_3 \otimes t_3) \cdot \Delta\gamma + \delta\omega \\
&\times (\xi_a t_a) \cdot (A_3 \otimes t_3) \cdot \Delta\gamma \\
&+ \delta\gamma \cdot (A_3 \otimes t_3) \cdot \Delta\omega \times (\xi_a t_a) \\
&+ \delta\omega \times (\xi_a t_a) \cdot (A_3 \otimes t_3) \cdot \Delta\omega \times (\xi_a t_a) \dots (68)
\end{aligned}$$

式(68)の最後の式の各項を積分する.

$$\begin{aligned}
& \int_V [\delta\gamma \cdot (A_3 \otimes t_3) \cdot \Delta\gamma] dV \\
&= \int_{[0,l]} [\delta\gamma \cdot (n \otimes t_3) \cdot \Delta\gamma] ds \dots (69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_V [\delta\omega \times (\xi_a t_a) \cdot (A_3 \otimes t_3) \cdot \Delta\gamma] dV \\
&= \int_V [\delta\omega \cdot (\xi_a t_a) (A_3 \otimes t_3) \cdot \Delta\gamma] dV \\
&= \int_{[0,l]} [\delta\omega \cdot (m \otimes t_3) \cdot \Delta\gamma] ds \dots (70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_V [\delta\gamma \cdot (A_3 \otimes t_3) \cdot \Delta\omega \times (\xi_a t_a)] dV \\
&= \int_V [\delta\gamma \cdot \{-(A_3 \otimes t_3) \times (\xi_a t_a)\} \cdot \Delta\omega] dV \\
&= \int_{[0,l]} [\delta\gamma \cdot y_1 \cdot \Delta\omega] ds \dots (71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_V [\delta\omega \times (\xi_a t_a) \cdot (A_3 \otimes t_3) \cdot \Delta\omega \times (\xi_a t_a)] dV \\
&= \int_V [\delta\omega \cdot \{-(\xi_a t_a) \times (A_3 \otimes t_3) \\
&\times (\xi_a t_a)\} \cdot \Delta\omega] dV \\
&= \int_{[0,l]} [\delta\omega \cdot y_2 \cdot \Delta\omega] ds \dots (72)
\end{aligned}$$

ここで, テンソル y_1, y_2 を次の式で定義する.

$$\begin{aligned}
y_1 &\equiv \int_a \{-(A_3 \otimes t_3) \times (\xi_a t_a)\} da \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{I_1}{I_P} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_2}{I_P} m_3 & 0 \\ m_1 & m_2 & 0 \end{bmatrix} \dots (73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &\equiv \int_a \{-(\xi_a t_a) \times (A_3 \otimes t_3) \times (\xi_a t_a)\} da \\
&= \frac{1}{a} \begin{bmatrix} I_1 n_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 n_3 & 0 \\ -I_1 n_1 & -I_2 n_2 & 0 \end{bmatrix} \dots (74)
\end{aligned}$$

$$n_i \equiv \int_a A_{i3} da \dots (75)$$

$$m_K \equiv \int_a \varepsilon_{ijk} \xi_i A_{j3} da \dots (76)$$

式(67)~(76)より, 面の法線のストレッチの幾何剛性 $\Delta\delta\Pi_{sg, area}$ を次の式で表示する.

$$\Delta\delta\Pi_{sg, area} = \int_{[0,l]} \left\{ \frac{\delta u}{\delta \phi} \right\} \cdot b^t y b \left\{ \frac{\Delta u}{\Delta \phi} \right\} ds \dots (77)$$

$$y = \begin{bmatrix} n \otimes t_3 & y_1 \\ m \otimes t_3 & y_2 \end{bmatrix} \dots (78)$$

また, 式(77)は非対称である.

4.4 変形速度のストレッチの幾何剛性 接線剛性
のうち, 変形速度のストレッチの幾何剛性 $\Delta\delta\Pi_{sg, deform}$ を次の式で定義する.

$$\Delta\delta\Pi_{sg, deform} = \int_V [\Delta DA + A\Delta D] : \delta\bar{L} dV \dots (79)$$

次に, 式(79)の積分記号のなかの式を, 次のように展開する.

$$\begin{aligned}
& [\Delta DA + A\Delta D] : \delta\bar{L} = \Delta DA : \delta\bar{L} + A\Delta D : \delta\bar{L} \\
&= A\Delta D : \delta\bar{L}^t + A\Delta D : \delta\bar{L} \\
&= 2A\Delta D : \delta D \\
&= 2A : \delta D \Delta D \dots (80)
\end{aligned}$$

ここで, 変形速度テンソル ΔD の式(28)より, 式(80)の最後の式に以下の展開をする.

$$\begin{aligned}
2A : \delta D \Delta D &= 2 \operatorname{tr} [A \Delta D \delta D] \\
&= 2 \operatorname{tr} \left[A \frac{1}{2} (\Delta\bar{L} + \Delta\bar{L}^t) \frac{1}{2} (\delta\bar{L} + \delta\bar{L}^t) \right] \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tr} [A (\Delta\bar{L} \delta\bar{L} + \Delta\bar{L} \delta\bar{L}^t \\
&+ \Delta\bar{L}^t \delta\bar{L} + \Delta\bar{L}^t \delta\bar{L}^t)] \\
&= \frac{1}{2} [A \delta\bar{L}^t : \Delta\bar{L} + A \Delta\bar{L} : \delta\bar{L} \\
&+ \Delta\bar{L} A : \delta\bar{L} + A \Delta\bar{L}^t : \delta\bar{L}] \dots (81)
\end{aligned}$$

式(81)の第1項より次の式を得る.

$$\begin{aligned}
& \int_V A \delta\bar{L}^t : \Delta\bar{L} dV = \Delta\delta\Pi_{sg, area} \\
&= \int_{[0,l]} \left\{ \frac{\delta u}{\delta \phi} \right\} \cdot b^t y^t b \left\{ \frac{\Delta u}{\Delta \phi} \right\} ds \dots (82)
\end{aligned}$$

式(81)の第2項より次の式を得る.

$$\begin{aligned}
& \int_V \Delta\bar{L} A : \delta\bar{L} dV = \Delta\delta\Pi_{sg, stress} \\
&= \int_{[0,l]} \left\{ \frac{\delta u}{\delta \phi} \right\} \cdot b^t \rho b \left\{ \frac{\Delta u}{\Delta \phi} \right\} ds \dots (83)
\end{aligned}$$

式(81)の第4項より次の式を得る.

$$\begin{aligned}
& \int_V A \Delta\bar{L}^t : \delta\bar{L} dV = \Delta\delta\Pi_{sg, stress} \\
&= \int_{[0,l]} \left\{ \frac{\delta u}{\delta \phi} \right\} \cdot b^t y b \left\{ \frac{\Delta u}{\Delta \phi} \right\} ds \dots (84)
\end{aligned}$$

式(81)の第3項は以下の展開を行う.

$$A \Delta\bar{L} : \delta\bar{L}$$

$$\begin{aligned}
&= \{\bar{\delta}\gamma + \bar{\delta}\omega \times (\xi_\beta t_\beta)\} \cdot A \cdot \{\bar{\Delta}\gamma + \bar{\Delta}\omega \times (\xi_\alpha t_\alpha)\} \\
&= \bar{\delta}\gamma \cdot A \cdot \bar{\Delta}\gamma + \bar{\delta}\omega \times (\xi_\beta t_\beta) \cdot A \cdot \bar{\Delta}\gamma \\
&\quad + \bar{\delta}\gamma \cdot A \cdot \bar{\Delta}\omega \times (\xi_\alpha t_\alpha) \\
&\quad + \bar{\delta}\omega \times (\xi_\beta t_\beta) \cdot A \cdot \bar{\Delta}\omega \times (\xi_\alpha t_\alpha) \\
&= \bar{\delta}\gamma \cdot A \cdot \bar{\Delta}\gamma + \bar{\delta}\omega \cdot (\xi_\alpha t_\alpha) \times A \cdot \bar{\Delta}\gamma \\
&\quad + \bar{\delta}\gamma \cdot \{(\xi_\alpha t_\alpha) \times A\}^t \cdot \bar{\Delta}\omega \\
&\quad + \bar{\delta}\omega \cdot \{-(\xi_\beta t_\beta) \times A \times (\xi_\alpha t_\alpha)\} \cdot \bar{\Delta}\omega \cdots \cdots (85)
\end{aligned}$$

よって、次の式を得る。

$$\int_V A \bar{\Delta} \bar{L} : \bar{\delta} \bar{L} dV = \Delta \delta \Pi_{sg, deform}$$

$$= \int_{[0, l]} \left\{ \frac{\delta u}{\delta \phi} \right\} \cdot b^t z b \left\{ \frac{\Delta u}{\Delta \phi} \right\} ds \cdots \cdots (86)$$

$$z \equiv \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2^t & z_3 \end{bmatrix} \cdots \cdots (87)$$

$$z_1 \equiv \int_a A da$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_2 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \cdots \cdots (88)$$

$$z_2 \equiv \int_a (\xi_\alpha t_\alpha) \times A da$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{I_1}{I_p} m_3 & 0 & m_1 \\ 0 & -\frac{I_2}{I_p} m_3 & m_2 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \cdots \cdots (89)$$

$$z_3 \equiv \int_a \{-(\xi_\beta t_\beta) \times A \times (\xi_\alpha t_\alpha)\} da$$

$$= \frac{1}{a} \begin{bmatrix} I_1 n_3 & 0 & -I_1 n_1 \\ 0 & I_2 n_3 & -I_2 n_2 \\ -I_1 n_1 & -I_2 n_2 & 0 \end{bmatrix} \cdots \cdots (90)$$

以上より、変形速度のストレッチの幾何剛性 $\Delta \delta \Pi_{sg, deform}$ として次の式を得る。

$$\Delta \delta \Pi_{sg, deform} = \frac{1}{2} [\Delta \delta \Pi_{sg, stress} + \Delta \delta \Pi_{sg, area} + \delta \Delta \Pi_{sg, area} + \Delta \delta \Pi_{sg, deform}] \cdots \cdots (91)$$

また、式(91)は対称である。

5. 結 論

第1報⁽³⁾では、4種類の応力速度を使用したときの

接線剛性を一般形で求めたが、本報では、その一般形の接線剛性をもとに、SO(3)を含んだ梁要素の接線剛性を構成する剛性である、剛性要素を導出した。導出した剛性要素は、

- ・物質剛性： $\Delta \delta \Pi_m$
- ・剛体回転の幾何剛性： $\Delta \delta \Pi_{rg}$
- ・応力の方向のストレッチの幾何剛性： $\Delta \delta \Pi_{sg, stress}$
- ・面の法線のストレッチの幾何剛性： $\Delta \delta \Pi_{sg, area}$
- ・変形速度のストレッチの幾何剛性： $\Delta \delta \Pi_{sg, deform}$

である。

6. 今後の研究予定

(a) 本報で求めた梁要素の剛性要素のうち、剛体回転の幾何剛性を対称化しても、Newton-Raphson法による収束率は二次が保たれることを示す。よって、この剛性は対称化可能となる。

(b) 第1報⁽³⁾で求めた4種類の応力速度による一般形の接線剛性に、本報で求めたSO(3)を含んだ梁要素の剛性要素を代入し、SO(3)を含んだ梁要素の接線剛性を求める。そして、それらの梁要素を使って、梁の座屈解析および座屈後解析を行い、解析結果を比較する。

(c) SO(3)を含んだ定式化では、回転を有限回転として扱うため、回転を微小回転として扱った従来の三次元弾性論における接線剛性の式の一部が、速度勾配テンソルの第2変分を含んだ式に置き換わることを示す。

文 献

- (1) Simo, J. C., A finite strain beam formulation. The three dimensional dynamic problem. part I, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, **49**(1985), 55-70.
- (2) Simo, J. C. and Vu Quoc, L., A three dimensional finite strain rod model. part II. Computational aspects, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, **58**(1986), 79-116.
- (3) 石原昌文, 特殊直交群 SO(3) を含んだ有限要素法定式化 第1報: 応力速度と接線剛性の関係, *機論*, **62**-599, A (1996), 168-173.