塑性変形を受ける二次元構造物の最適設計*

(第2報, 数値例)

弓削 康平^{*1}, 菊池 昇^{*2}, 岩井 信弘^{*3}

Optimal Design of a Two-Dimensional Structure Subjected to a Plastic Deformation (2nd Report, Numerical Examples)

Kohei YUGE, Noboru KIKUCHI and Nobuhiro IWAI

In the previous report, we presented an optimization algorithm of two-dimensional structure subjected to a plastic deformation, where an admissible domain is assumed to be composed of microstructures with regular triangular cavities and the local cavitation size and rotation angle of the microstructure are determined so as to minimize the work done by the applied load. In this paper, several numerical examples are presented to demonstrate the validity of the algorithm. It is shown that the obtained material distribution is different from that obtained by the elastic analysis especially when a plastic hinge takes place by bending. Optimization analysis using microstructures with square cavities is also conducted to examine the effect of the shape of the microstructure, where the ultimate obtained strength increases slightly while material distribution remains essentially the same.

Key Words: Optimum Design, Computer-Aided Design, Finite-Element Method, Plasticity, Non-linear Problem

1. 序

著者らは前報⁽¹⁾において塑性変形を受ける二次元構造物の最適化アルゴリズムを示した。このアルゴリズムは, Bendsøe と Kikuchi⁽²⁾, Suzuki と Kikuchi⁽³⁾らにより提案された一般化レイアウト最適法を弾塑性問題に拡張したものであり, 許容設計領域に一定量の物質を最適に配置することにより構造物の形状およびトポロジーの最適化を行う。手続きの概要は以下のとおりである。はじめに, 初期状態では許容設計領域が, 一様な多孔質材料からなっていると仮定する。このとき密な領域の総和は定められた物質に等しいものとする。この許容設計領域を有限要素に分割し, 与えられた荷重値に達するまで増分法による弾塑性解析を行う。弾塑性解析に必要な多孔質材料の弾塑性の応力・ひずみ関係は均質化法⁽⁴⁾⁻⁽⁷⁾によって求める。得られた結果より, 外力のなす仕事量が小さくなる方向, すなわち構造物が剛になる方向へ, 各要素を構成する多孔質材料の空隙の大きさを変化させる。以上のような

弾塑性解析と空隙の大きさの変更を解が収束するまで繰り返す。なお, 多孔質材料として図1に示す正三角形の空隙を有するマイクロストラクチャを採用し, 任意の空隙の大きさに対して弾塑性の応力・ひずみ関係式を簡便に得るため, 応力・ひずみ関係のデータベースを作成することとした。すなわち, サンプル点として, 孔の大きさ a については 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1 の5点を, また, マイクロストラクチャの全体座標に対する傾き θ は 0, $\pi/6$ を選び, さまざまな主応力の比で応力・ひずみ関係式を求める。任意の応力状態での応力・ひずみ関係は, このサンプル点の応

Fig. 1 Microstructures with regular triangle cavities

* 原稿受付 1996年2月9日.

^{*1} 正員, 成蹊大学工学部 (〒180 武蔵野市吉祥寺北町3).^{*2} The University of Michigan (Ann Arbor, MI 48109, USA).^{*3} 正員, 成蹊大学大学院.

力・ひずみ関係のデータベースより、内挿によって求める。

一般化レイアウト最適法では、長方形の空隙が設定されることが多いが、ここで正三角形の空隙を用いたのは、長方形の2辺の比を考慮しないですむぶん、データベースの作成が容易となるためである。

前報では、データベースによる弾塑性解析が微小変形の解析であれば十分な精度を有することも数値例によって示した。本報では、前報で示した最適化アルゴリズムの有用性を数値例によって検証する。また、正方形の空隙を有するマイクロストラクチャを用いた最適化も実施し、マイクロストラクチャの形状の影響を調べる。

Fig. 2 A cantilever subjected to a concentrated load

Fig. 3 History of the load-displacement curve of a cantilever

Fig. 4 History of the external work ratio of a cantilever

2. 数 値 例

本論文において示す解析は、すべて、荷重条件として強制変位を与える。変位が規定されている場合、構造物が剛となればなるほど、荷重は上がり、外力のなす仕事も増す。

2.1 集中荷重を受ける片持ちはり 最初の数値例として図2に示す集中荷重を受ける片持ちはりの解析を実施した。はり内部を 20×8 要素に分割し、先端肉厚方向中央部に 2 mm の強制変位を与えた。物質の総量 Ω_0 は許容設計領域内(すなわちはり内部)面積 Ω に対して 60% とした。最適化収束計算に伴う荷重・変位曲線の変化を図3に示す。図中の n は収束計算の回数を表す。構造物内部に塑性域が生じるため、変形の進行とともに次第に一定荷重に近づいていく。また、最適化の収束計算が進むのに従い、構造物の強度が増加していき、収束時には初期状態に比し荷重が4倍近くに達した。この片持ちはりの $\Omega_0/\Omega=1$ の塑性崩壊荷重は $P=(2/L)\int_0^{h/2}\sigma_y x t dx$ で与えられ、294 N となる。ただし、 $L=100$ mm (はりの長さ)、 $h=20$ mm (はりの幅)、 $\sigma_y=294$ MN (降伏応力)、 $t=1$

(a) The optimal design for elasto-plastic deformations

(b) The optimal design for elastic deformations

Fig. 5 Optimal designs of a cantilever

(a) The Optimal design for elasto-plastic deformations

(b) The optimal design for elastic deformations

Fig. 6 Optimal designs with beam elements ($\Omega_0/\Omega=0.5$)⁽¹⁰⁾

mm(板厚)である。はりのアスペクト比が低いため、 P は実際の塑性崩壊荷重よりも低い値を与えていると考えられるが、最適化により、少ない材料で、中実材料の塑性崩壊荷重に近い荷重を得ていることがわかる。図4には目的関数である外力のなす仕事量の履歴を示す。仕事量は、初期状態に外力のなす仕事で無次元化してある。また、参考のため、弾性条件のもとに最適化した場合の履歴も併せて示す。最適化のための収束計算はOptimality Criteria法⁽⁸⁾を用いているが、塑性変形の場合は非線形性がかなり強いので、解にやや振動が見られる。しかし、このような振動は、Optimality Criteria法のパラメータ(前報で示した解の移動量制限パラメータ ξ や緩和係数 η)を変更することによって抑えることが可能である。本例では ξ 、 η として0.25, 0.8を用いている。

得られた最適デザインを図5に示す。図中、黒に近いほど要素は物質が密に配置されている。ここでも参考のため弾性の最適デザインと比較して示す。両者を比較すると塑性変形を受けるはりの場合は、塑性ヒンジが発生する固定端付近に、より多くの物質が配置されていることがわかる。最適化に用いたマイクロストラクチャは圧縮時と引張り時の強度が等しいため、圧

Fig. 7 A beam with fixed ends

Fig. 8 Optimal designs for a beam with fixed ends

縮側と引張り側に対称に物質が配置されることも確認できる。図6には、著者らが別研究⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾で実施した片持ちはりの最適デザインを示す。この最適化では、せん断変形に抵抗する必要最小限の物質が、あらかじめ、はり内部に分布していると仮定し、軸方向応力のみを最適化の対象としている。また、解析には低次のTimoshenkoはり要素を用いている。はりの寸法は異なるが、二次元構造の最適物質配置と顕著な相違は見られない。また、両者の比較によって二次元構造の最適設計で灰色で示されている領域は、主としてせん断変形に抵抗するため配置された物質であると考えられることができる。

2.2 集中荷重を受ける両端固定はり 第2の解析例として図7に示す両端固定はりの解析を実施した。幾何学的な対称性より1/2解析とし、はり中央部の表面に2mmの強制変位を与えた。物質の総量は $\Omega_0/\Omega=0.5$ と0.7を仮定した。得られたデザインを弾性での最適結果と比較して図8に示す。図中、左側が

Fig. 9 History of the yielded area at $w=2$ mm

(a) $\Omega_0/\Omega=0.5$

(b) $\Omega_0/\Omega=0.7$

Fig. 10 History of the load-displacement curve of a beam with fixed ends

Fig. 11 History of the external work ratio of a beam with fixed ends ($\Omega_0/\Omega=0.5$)

固定端、右側が荷重のかかる中央部である。弾性変形を仮定したデザインでは応力の高い端部と中央部の表面付近に物質が配置される。また、上下の表面を連結する斜め部材が形成されている。一方、弾塑性の最適化では塑性ヒンジが形成されるため左右両端(固定端と中央部)は肉厚方向中央部付近まで物質が配置されてくる。図9は、最適化収束計算に伴う解析終了時の内部の塑性域の変化を示している。図9中の n は収束計算の回数を表す。孔の大きさによって異なる降伏応力値で無次元化しており、黒いほど応力が降伏応力に近いことを表している。初期状態では、両端に塑性域が生じているが、最適化収束計算が進むにつれ、塑性域は内部全体に広がっていくことがわかる。この様子は、 $\Omega_0/\Omega=0.5$ の場合も、 0.7 の場合も同じである。以上のように本最適化アルゴリズムでは、許容設計領域全体に塑性域が広がるように物質が分布されることがわかる。図10には荷重・変位曲線の履歴を示す。最適化によって塑性崩壊荷重が4倍程度まで上がっていることがわかる。図11には $\Omega_0/\Omega=0.5$ について外力のなす仕事量の履歴を示す。2・1節の結果より、解の振動を抑えるため、弾塑性変形の最適化計算においては、前述の ξ の値を 0.05 とした。パラメータの変更によって解の振動はなくなっている。収束解に至る過程は弾性の最適化と弾塑性の最適化では異なっているが、どちらもほぼ良好な収束特性を示している。 $\Omega_0/\Omega=0.7$ の場合は、さらに収束性はよく、弾塑性最適化は19回の計算で収束した。収束計算回数を除けば、収束の様子は $\Omega_0/\Omega=0.5$ の場合と比較して顕著な相違は見られなかった。

2・3 集中荷重を受ける二次元領域の最適化

次に図12に示すように許容設計領域の一部が制限されている場合の解析を実施した。問題の対称性より2分の1解析とした。また、図中に示すように中央部上端より 2.5 mm の位置に強制変位 $w=1\text{ mm}$ を与えた。物質の総量を $\Omega_0/\Omega=0.5$ にした場合の外力のなす仕

Fig. 12 Optimization of a two dimensional structure

事の履歴および荷重・変位曲線の履歴を図13, 図14に示す。また、得られた最適物質分布を弾性解析の結果と比較し図15に示す。図16には解析終了時の塑性域の履歴を示す。初期状態では荷重点付近など限られた領域で変形が発生する。このため、荷重変位曲線も、弾性域とその後の塑性状態が2直線で近似できるような形となる。しかし、最適化が進むにつれて、より広い領域で順次塑性化が進行するようになるため、荷重変位曲線は、徐々にこう配が小さくなっていく形となる。得られた最適物質配置はこの解析では弾性条件で得られた結果と大きな差は見られない。ただし、広く物質が許容設計領域に拡散する傾向が見られる。これは、局所的な変形が、体積不変という塑性変形の拘束によって広い領域に影響を与えるためだと思われる。図17には $\Omega_0/\Omega=0.3$ とした場合の最適物質配置を示す。前述の理由によってこちらも物質がやや拡散する傾向が見られる。より明確なトポロジーや形状を得たい場合は、最適解を得た後、許容設計領域を狭めて再

解析を行うなどの方法が考えられる。

ここまでで示した数値例より、弾性変形の最適化と弾塑性変形の最適化で明確な物質配置の相違が見られるのは、曲げによる塑性ヒンジが発生する場合であることがわかる。逆に単純な圧縮や引張りで荷重を支えることができるような条件が与えられる場合は、両者の間に顕著な相違は見られないであろう。

これらの数値例では、各要素のガウス積分点ごとにデータベースより応力・ひずみ関係を内挿し要素剛性を作成する過程と、それを解くのに、ほぼ同等程度の計算時間を要した。感度解析でも荷重増分に要したステップ数と同じ増分ステップ数を用いて、データベースより内力のなす仕事量を算定したため、計算時間を要した。計算時間の短縮化には次数低減積分法の導入が望ましい。

その他の注意点として、2・1節で述べたように Optimality Criteria 法のパラメータは弾性変形の最適化より、弾塑性変形の最適化のほうが大きな影響を与える。特に、1回の最適化収束計算で許す解の移動

Fig. 13 History of the external work ratio of a two dimensional structure ($\Omega_0/\Omega=0.5$)

Fig. 14 History of the load-displacement curve of a two dimensional structure ($\Omega_0/\Omega=0.5$)

(a) Elasto-plastic analysis (b) Elastic analysis

Fig. 15 Obtained optimal material layout ($\Omega_0/\Omega=0.5$)

Fig. 16 History of the yielded area at $w=1$ mm ($\Omega_0/\Omega=0.5$)

(a) Elasto-plastic analysis (b) Elastic analysis

Fig. 17 Obtained optimal material layout ($\Omega_0/\Omega=0.3$)

量(ξ)を大きく取ると、解が振動したり、解析の続行が困難になることがあった。

3. マイクロストラクチャの形状の影響

マイクロストラクチャの形状による影響を考慮するため、図18に示す正方形の空隙を有するマイクロストラクチャによる最適化を実施した。本マイクロストラクチャは、ここまでの定式化、および、数値例で用いた図1の正三角形の空隙を有するマイクロストラクチャとは異なり、弾性時においても異方性を示す。しかし、前報で示した応力・ひずみ関係のデータベース作成法、および、最適化手法をそのまま適用することができ、設計変数の数も変わらない。データベース作成におけるサンプリング点として、孔の大きさ a とマイクロストラクチャの傾き θ に関しては、それぞれ、 $a=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, $\theta=-\pi/4, \theta=-\pi/8, 0, \theta=\pi/8$ を選んだ。また、主応力の比は正三角形と同様、9とおりを仮定した。

図19に、 $\theta=0$, $a=0.2$ のマイクロストラクチャに対して計算された降伏応力と応力の関係を示す。図中の σ_{y1} と σ_{y2} はマイクロストラクチャ内の座標系 y_1 および y_2 の方向の主応力を表す。前報図7に示した

Fig. 18 Microstructures with square cavities

Fig. 19 Calculated yield line ($a=0.2$, $\theta=0$, square cavity type)

同等物質密度の正三角形の空隙を有するマイクロストラクチャを用いた場合の降伏応力と比較すると、 $\sigma_{y1} = \sigma_{y2}$ では等しく、それ以外のときは、本マイクロストラクチャが高めの降伏応力を与えていることがわかる。

正方形の空隙を有するマイクロストラクチャを用いて、2・1節の図2に示す集中荷重を受ける片持ちはりの最適化計算を再び実施した。Optimality Criteria法のパラメータを $\xi=0.1$, $\eta=0.8$, 全体に占める物質の総量を $\Omega_0/\Omega=0.6$ とし、その他の解析条件は前解析例と一致させた。

図20に最適化による荷重・変位曲線の変化を示す。 n は収束計算の回数を表す。収束計算の進展に伴い終局強度が高くなり、収束計算終了時には初期状態の3倍程度の終局強度を有する構造物が得られた。また、この荷重値は、図3に示した正三角形の空隙を有するマイクロストラクチャによる最適化後の荷重値よりも約1割高い。これは、前述のように正方形の空隙を有するマイクロストラクチャが高めの降伏応力を有しているためと考えられる。図21には外力のなす仕事の履歴を示す。比較的小さな ξ , η を採用したため、弾塑性解析および弾性解析のどちらもなめらかに収束していくことがわかる。図22(a)には得られた最適物質配置を示す。図22(b)は弾性解析を用いた最適化による物質配置を表す。正三角形の空隙を用いた図5の結果と比較すると、端部付近に、より物質が配置されていることがわかる。本マイクロストラクチャは正三角形の空隙を有するマイクロストラクチャに比し、より少ない物質量で、はりに作用するせん断力を受け持てるためと思われる。

続いて、図7に示す両端固定はりの最適化を正方形のマイクロストラクチャを用いて実施した。物質の総

Fig. 20 History of the load-displacement curves of a cantilever 2 ($\Omega_0/\Omega=0.6$)

Fig. 21 History of the external work ratio of a cantilever 2 ($Q_0/Q=0.6$)

(a) Elasto-plastic analysis

(b) Elastic analysis

Fig. 22 Optimal design of a cantilever 2 ($Q_0/Q=0.6$)

Fig. 23 History of the load-displacement curves of a beam with fixed ends 2 ($Q_0/Q=0.7$)

量は、 $Q_0/Q=0.7$ とした。収束計算に伴う荷重変位曲線の履歴を図23に示す。本解析の収束計算後の終局強度も、図10の終局強度に比して、1割程度高くなった。図24には外力のなす仕事の履歴を示す。本図から、収束計算が、ほぼ安定して行われたことがわかる。図25(a)に弾塑性解析の最適物質配置を示す。図25(b)は弾性の最適化による物質配置を表す。先の解析と同様、正三角形の空隙を用いた最適結果に比べ、

Fig. 24 History of the external work ratio of a beam with fixed ends 2 ($Q_0/Q=0.7$)

(a) Elasto-plastic optimization

(b) Elastic optimization

Fig. 25 Optimal design of a beam with fixed ends 2 ($Q_0/Q=0.7$)

両端部に、より物質が集中している。

以上のように正方形の空隙を有するマイクロストラクチャを用いた最適化では、同等物質密度の正三角形の空隙を有するマイクロストラクチャよりもやや強度が高く、同じ荷重ならば、より少ない物質密度で荷重を支えることができる。また、物質は、より塑性ヒンジ付近に集中して配置される傾向がある。ただし、弾性問題と弾塑性問題の塑性ヒンジ付近の物質配置がそれぞれ異なる点は、両マイクロストラクチャに共通している。

4. 結 論

本研究では、前報で示した塑性変形を受ける二次元構造物の最適化アルゴリズムの妥当性を数値例によって検証した。本アルゴリズムでは、許容設計領域が多孔質材料からなると仮定し、孔の大きさ、傾きを局所的に変化させることにより、許容設計領域内に最適に物質を分布させる。最適化過程で必要となる多孔質材料の弾塑性応力・ひずみ関係式は、均質化法によって作成したデータベースより得た。

数値例によって得られた知見を以下に要約する。

- (1) 本アルゴリズムによって、塑性変形に対する

最適な物質分布を決定することができる。

(2) 塑性域が許容設計領域全体に広がるように物質は分布する。

(3) 曲げ変形によって塑性ヒンジが形成される場合には、弾性変形の最適デザインとの相違は特に明瞭になる。

(4) 正方形の空隙を有するマイクロストラクチャを用いて最適化を行った場合は、正三角形の空隙を有するマイクロストラクチャによって最適化を行った場合よりも若干強度は高くなる。ただし物質分布に顕著な相違はない。

今後の研究課題として、次数低減積分の導入による計算時間の短縮、有限変形問題やシェル、三次元問題への拡張が挙げられる。

文 献

- (1) 弓削康平・菊池昇, 塑性変形を受ける二次元構造物の最適設計(第一報, 定式化), 機論, **62**-600, A(1996), 1910-1917.
- (2) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **71**(1988), 197-224.
- (3) Suzuki, K. and Kikuchi, N., A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **92**(1991), 291-318.
- (4) Lions, J. L., *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control*, (1981), Science Press.
- (5) Guedes, J. M. and Kikuchi, N., *Preprocessing and Postprocessing for Materials Based on the Homogenization Method with Adaptive Finit Element Methods*, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **83**(1990), 143-198.
- (6) 寺田賢二郎・弓削康平・菊池昇, 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析(第一報, 定式化), 機論, **61**-590, A, (1995), 2199-2205.
- (7) 寺田賢二郎・弓削康平・菊池昇, 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析(第二報, 数値解析), 機論, **62**-601, A (1996), 2072-2079.
- (8) Berke, L. and Venkayya, V. B., Review of Optimality Criteria Approaches to Stuctural Optimization, *Structural Optimization Symposium*, ed. by Schmit, L. A., New York, (1974), 23-34.
- (9) 弓削康平・菊池昇, 塑性変形を受ける骨組み構造物の物質最適化(第一報, 最適化アルゴリズム), 機論, **62**-593, A (1996), 269-273.
- (10) 弓削康平・菊池昇, 塑性変形を受ける骨組み構造物の物質最適化(第二報, 数値例によるアルゴリズムの検証), 機論, **62**-593, A(1996), 274-279.