層間すべりを考慮した円管介在物または円柱介在物を有する極異方性弾性体の応力・変位解析*

平 島 健 一^{*1}, 宮 田 俊 邦^{*2}
平 野 猛 也^{*3}, 藤 井 義 隆^{*4}

Stresses and Displacements Analysis for Cylindrically Anisotropic Elastic Medium with Circular Hollow or Solid Inclusion under Sliding Interfacial Boundary Conditions

Ken-ichi HIRASHIMA, Toshikuni MIYATA,
Takeya HIRANO and Yoshitaka FUJII

Analyses of cylindrically anisotropic elastic bodies with circular opening or circular ring reinforcement have been performed for cases of in-plane loading at infinity. We present the closed-form stress and displacement solutions for circular hollow or solid inclusion in a cylindrically anisotropic elastic medium with a shear sliding boundary at the interface under out-of-plane shear and in-plane loadings at infinity. Several numerical results are graphically represented.

Key Words: Cylindrical Anisotropy, Elasticity, Circular Hollow or Solid Inclusion, Perfect or Sliding Boundary, Out-of-Plane Shear Loading, In-Plane Loading

1. 緒 言

繊維補強複合材料の、重要な構造材としてらせん状ワインディングの円筒シリング等があり、また建設部門においてはトンネルライニングやトンネル周辺を合成樹脂、水ガラス、リグニン等によって補強した、いわゆる極異方性挙動が予測される構造体などが考えられる。

この種の問題に関する研究として、Hoff⁽¹⁾による面内荷重下での円孔を有する極異方性弾性体の応力集中の解析や Das & Hazan⁽²⁾ および Liu & Bert⁽³⁾ による補強円孔を有する面内荷重問題の理論解析などが挙げられる。

本論文では、それらの成果を一般化して、面内のみならず面外の無限遠荷重の作用下での円管介在物または円柱介在物を有する極異方性弾性体の応力、変位を求めるための閉じた形の解析理論を提示する。ここでの取扱いは、円形介在物と媒体は異なる弾性定数を

有する極異方性体であるとし、介在物と媒体の円形接合面において、ある種のすべり変形(せん断すべり)を許容する定式化が行われている。最後に、ここで得られた理論解に対する代表的な数値計算例が示される。

2. 基 礎 式

2-1 面外問題の場合 ここで対象としている面外問題では、図1に示すように等方性または極異方性の材料でできた柱体の母線に平行で、無限遠方から作

Fig.1 Analytical model of elastic medium with circular ring inclusion under applied stresses at infinity

* 原稿受付 1996 年 7 月 9 日.

^{*1} 正員, 山梨大学工学部 (〒400 甲府市武田 4-3-11).

^{*2} 山梨大学大学院.

^{*3} (株)サンボー (〒407-01 山梨県北巨摩郡双葉町竜地 4926-1).

^{*4} (株)土屋組 (〒503 大垣市神田町 2-55).

用する面外方向(z 方向)のせん断荷重 τ_{xz}^∞ , τ_{yz}^∞ によって円管介在物または円柱介在物を含む媒体に生じるせん断応力および変位を取扱う。ここで、媒体は無限に広がっており、奥行方向に直角な断面内の円形介在物および極異方性特性は一定であるとする。

この場合の応力 $\tau_{rz}^{(j)}$, $\tau_{\theta z}^{(j)}$, および変位 $w^{(j)}$ ($j=1, 2$) は面内座標系 (x, y) のみの関数である。極座標系 (r, θ) で表示した釣合い方程式において物体力を無視すれば、次式で与えられる。

$$\frac{\partial \tau_{rz}^{(j)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^{(j)}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}^{(j)}}{r} = 0. \quad (1)$$

ここに、上添字の j は $j=1$ のとき媒体側、 $j=2$ のとき円管または円柱介在物を表す。この釣合い式は次式のような応力関数 φ を導入すれば、恒等的に満足される。

$$\tau_{rz}^{(j)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial \theta}, \quad \tau_{\theta z}^{(j)} = - \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial r}. \quad (2)$$

次に、ひずみ-変位関係式および構成方程式はそれぞれ次式である。

$$\gamma_{rz}^{(j)} = \frac{\partial w^{(j)}}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta z}^{(j)} = \frac{1}{r} \frac{\partial w^{(j)}}{\partial \theta}. \quad (3)$$

$$\gamma_{rz}^{(j)} = S_{rz}^{(j)} \tau_{rz}^{(j)}, \quad \gamma_{\theta z}^{(j)} = S_{\theta z}^{(j)} \tau_{\theta z}^{(j)}. \quad (4)$$

ここで、 $S_{rz}^{(j)} = S_{\theta z}^{(j)} = 1/G^{(j)}$ とおけば等方性の材料のものに帰着する。式(3), (4)より得られる適合条件式に式(2)を代入し整理すれば、最終的に次式を得る。

$$S_{\theta z}^{(j)} \left(\frac{\partial^2 \varphi^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial r} \right) + \frac{S_{rz}^{(j)}}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(j)}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (5)$$

ここで、 $\alpha^{(j)} = \sqrt{S_{rz}^{(j)}/S_{\theta z}^{(j)}} = \sqrt{G_{\theta z}^{(j)}/G_{rz}^{(j)}}$ とし、無限遠での一樣荷重の条件を考慮すれば、応力関数 $\varphi^{(j)}$ に関する一般解が次式で与えられる。

$$\varphi^{(j)}(r, \theta) = (A_1^{(j)} r^{\alpha^{(j)}} + A_2^{(j)} r^{-\alpha^{(j)}}) \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

上式を式(2), (3), (4)に代入すれば、応力・変位の式として次式が求められる。

$$\tau_{rz}^{(j)} = (A_1^{(j)} r^{\alpha^{(j)-1}} + A_2^{(j)} r^{-\alpha^{(j)-1}}) \cos \theta. \quad (7)$$

$$\tau_{\theta z}^{(j)} = -\alpha^{(j)} (A_1^{(j)} r^{\alpha^{(j)-1}} - A_2^{(j)} r^{-\alpha^{(j)-1}}) \sin \theta. \quad (8)$$

$$w^{(j)} = \frac{S_{rz}^{(j)}}{\alpha^{(j)}} (A_1^{(j)} r^{\alpha^{(j)}} - A_2^{(j)} r^{-\alpha^{(j)}}) \cos \theta. \quad (9)$$

2・1・1 円管介在物の場合 R_2 を円管と空孔の内側境界までの半径、 R_1 を円管と媒体の境界までの半径とすれば、境界条件式は図1に示した図を参考にして、以下のように与えられる。

$r=R_2$ のとき

$$\tau_{rz}^{(2)} = 0. \quad (10)$$

$r=R_1$ のとき

$$\tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = -\frac{c_1 G_{rz}^{(1)}}{R_1} (w^{(1)} - w^{(2)}). \quad (11)$$

$r=\infty$ のとき

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz}^{(1)} &= \tau_{xz}^\infty \cos \theta + \tau_{yz}^\infty \sin \theta, \\ \tau_{\theta z}^{(1)} &= -\tau_{xz}^\infty \sin \theta + \tau_{yz}^\infty \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに、添字1は媒体側を、また添字2は円管側を表し、 c_1 はすべり係数であり、境界上の z 軸方向すべりを表す変位差の大きさに比例して面外せん断応力が生じることを意味している。したがって、 $c_1=0$ のとき $\tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = 0$ となり、完全すべり (Perfect Sliding) になり、 $c_1 \rightarrow \infty$ のとき $w^{(1)} = w^{(2)}$ となり、完全結合 (Perfect Bonding) の境界条件に一致する。したがって、 c_1 の値として有限な値を設定すれば、完全すべりから完全結合までの中間的な挙動を表すことができる。

この境界条件式(10)~(12)に応力関数 $\varphi^{(j)}$ の解(6)を代入すれば、未知係数 $A_1^{(j)}$, $A_2^{(j)}$ ($j=1, 2$) に関する4元の連立1次方程式が得られるが、これを解き式(7)~(9)に代入すれば円管側、媒体側それぞれの応力および変位を求めることができる。

2・1・2 円柱介在物の場合 この場合には、中実の介在物 (i.e. $R_2=0$) であることから、座標系の原点、すなわち0点に領域が存在することになる。このことから、式(7), (8)に $r=0$ を代入したときに応力が発散しないための条件として、 r の負のべき乗になる項の係数を零に設定すればよい。その他の境界条件式(11), (12)はそのまま成立する。したがって、この場合も未知数の数と条件式の数が一致して、応力および変位を求めることができる。

2・2 面内問題の場合 2・1・2項の場合と同様に、円管介在物を極異方性弾性体とすると、物体力を無視した場合の円筒座標系における面内での釣合い方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^{(j)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(j)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r^{(j)} - \sigma_\theta^{(j)}) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(j)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^{(j)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^{(j)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここに、上添字の j は $j=1$ のとき媒体側、 $j=2$ のとき円管介在物を表す。また、奥行方向(z 軸)に対する平面条件の下で極異方性弾性体の応力-ひずみ関係式(構成方程式)は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r^{(j)} \\ \varepsilon_\theta^{(j)} \\ \gamma_{r\theta}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{rr}^{(j)} & S_{r\theta}^{(j)} & 0 \\ S_{r\theta}^{(j)} & S_{\theta\theta}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{\theta\theta}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r^{(j)} \\ \sigma_\theta^{(j)} \\ \tau_{r\theta}^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

ここに、 $S_{kl}^{(j)}$ は弾性コンプライアンスであり、平面応力条件の場合には次のような値をとる。

$$\left. \begin{aligned} S_{rr}^{(j)} &= \frac{1}{E_r^{(j)}}, & S_{\theta\theta}^{(j)} &= \frac{1}{E_\theta^{(j)}}, \\ S_{r\theta}^{(j)} &= -\frac{\nu_{r\theta}^{(j)}}{E_\theta^{(j)}}, & S_{\theta r}^{(j)} &= \frac{1}{G_{r\theta}^{(j)}}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

また、平面ひずみ条件の場合には、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} S_{rr}^{(j)} &= \frac{1 - \nu_{rz}^{(j)} \nu_{zr}^{(j)}}{E_r^{(j)}}, & S_{\theta\theta}^{(j)} &= \frac{1 - \nu_{\theta z}^{(j)} \nu_{z\theta}^{(j)}}{E_\theta^{(j)}}, \\ S_{r\theta}^{(j)} &= -\frac{\nu_{r\theta}^{(j)} + \nu_{zr}^{(j)} \nu_{\theta z}^{(j)}}{E_\theta^{(j)}}, & S_{\theta r}^{(j)} &= \frac{1}{G_{r\theta}^{(j)}}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

上式において、 $E_r^{(j)}$ 、 $E_\theta^{(j)}$ はそれぞれ半径方向および円周方向の弾性係数であり、 $G_{r\theta}^{(j)}$ は (r, θ) 面内のせん断弾性係数、 $\nu_k^{(j)}$ は k 方向に応力を受けたときのひずみに対する l 方向のひずみの比に関連するポアソン比を意味する。

次に応力成分は次式の Airy の応力関数 $\phi^{(j)}$ を導入すれば、式(13)が自動的に満足されることになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(j)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi^{(j)}}{\partial \theta^2}, & \sigma_\theta^{(j)} &= \frac{\partial^2 \phi^{(j)}}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta}^{(j)} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

一方、ひずみ-変位関係式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r^{(j)} &= \frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial r}, & \varepsilon_\theta^{(j)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(j)}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(j)}}{r}, \\ \gamma_{r\theta}^{(j)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(j)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(j)}}{r}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

さらに、ひずみ成分 $\varepsilon_r^{(j)}$ 、 $\varepsilon_\theta^{(j)}$ 、 $\gamma_{r\theta}^{(j)}$ は次式の適合条件式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \gamma_{r\theta}^{(j)}}{\partial \theta} - r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta^{(j)}}{\partial r} \right) + r \frac{\partial \varepsilon_r^{(j)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varepsilon_r^{(j)}}{\partial \theta^2} = 0. \dots\dots\dots (19)$$

式(14)、(17)を式(19)に代入することにより次の支配方程式が得られる。

$$\begin{aligned} S_{\theta\theta}^{(j)} \left(\frac{\partial^4 \phi^{(j)}}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \phi^{(j)}}{\partial r^3} \right) - S_{rr}^{(j)} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi^{(j)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial r} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \phi^{(j)}}{\partial \theta^4} \right) \\ + \left(2S_{r\theta}^{(j)} + S_{\theta r}^{(j)} \right) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \phi^{(j)}}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \phi^{(j)}}{\partial r \partial \theta^2} \right) + (2S_{r\theta}^{(j)} + S_{\theta r}^{(j)} + 2S_{rr}^{(j)}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 \phi^{(j)}}{\partial \theta^2} = 0. \end{aligned} \dots\dots\dots (20)$$

式(20)の一般解は次のように与えられる。

$$\phi^{(j)}(r, \theta) = C_0^{(j)} \theta + C_1^{(j)} r \theta \sin \theta + C_2^{(j)} r \theta \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} [R_n^{(j)}(r) \cos n\theta + \hat{R}_n^{(j)}(r) \sin n\theta]. \dots\dots\dots (21)$$

上式中の $R_n^{(j)}(r)$ および $\hat{R}_n^{(j)}(r)$ は r についてのフーリエ係数である。なお、式(21)の右辺の第3項まではすべて変位の食違いまたは合応力の不釣合いを表示するものであるのに対し、第4項の級数和の部分は変位の一価連続性および釣合い合応力を保障するものである。しかるに、ここで対象とする問題の作用荷重は無限遠での一様分布荷重であることから、式(21)は最終的に次式のように求められる。

$$\phi^{(j)}(r, \theta) = \delta_{j1} B_0^{(j)} + B_1^{(j)} r^{1+k_p^{(j)}} + B_2^{(j)} r^{1-k_p^{(j)}} + \{ B_3^{(j)} r^{1+\alpha^{(j)}} + B_4^{(j)} r^{1+\beta^{(j)}} + B_5^{(j)} r^{1-\alpha^{(j)}} + B_6^{(j)} r^{1-\beta^{(j)}} \} \cos 2\theta. \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 δ_{jk} は Kronecker のデルタ、係数 $B_k^{(j)}$ は境界条件から決定される積分定数であり、さらに $k_p^{(j)}$ 、 $\alpha^{(j)}$ 、 $\beta^{(j)}$ は上式を式(20)に代入して求められる次式に示す定数である。

$$\left. \begin{aligned} k_p^{(j)} &= \sqrt{\frac{S_{rr}^{(j)}}{S_{\theta\theta}^{(j)}}}, \\ \left[\frac{\alpha^{(j)^2}}{\beta^{(j)^2}} \right] &= \frac{1}{2S_{\theta\theta}^{(j)}} \left\{ (S_{rr}^{(j)} + S_{\theta\theta}^{(j)} + 8S_{r\theta}^{(j)} + 4S_{\theta r}^{(j)}) \pm \sqrt{(S_{rr}^{(j)} + S_{\theta\theta}^{(j)} + 8S_{r\theta}^{(j)} + 4S_{\theta r}^{(j)})^2 - 36S_{rr}^{(j)} S_{\theta\theta}^{(j)}} \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

式(22)を式(17)に代入すれば応力が、さらに応力-ひずみ、ひずみ-変位関係式から変位が求められ、それらの結果は最終的に次式のようになる。

$$\sigma_r^{(j)} = B_1^{(j)} k_{p2}^{(j)} r^{k_{p1}^{(j)}} - B_2^{(j)} k_{p1}^{(j)} r^{-k_{p2}^{(j)}} + \{ B_3^{(j)} \alpha_3^{(j)} r^{\alpha_1^{(j)}} + B_4^{(j)} \beta_3^{(j)} r^{\beta_1^{(j)}} - B_5^{(j)} \alpha_4^{(j)} r^{-\alpha_2^{(j)}} - B_6^{(j)} \beta_4^{(j)} r^{-\beta_2^{(j)}} \} \cos 2\theta. \dots\dots\dots (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(j)} &= B_1^{(j)} k_{p2}^{(j)} k_p^{(j)} r^{k_{p1}^{(j)}} + B_2^{(j)} k_{p1}^{(j)} k_p^{(j)} r^{-k_{p2}^{(j)}} + \{ B_3^{(j)} \alpha_2^{(j)} \alpha^{(j)} r^{\alpha_1^{(j)}} + B_4^{(j)} \beta_2^{(j)} \beta^{(j)} r^{\beta_1^{(j)}} \\ &\quad + B_5^{(j)} \alpha_1^{(j)} \alpha^{(j)} r^{-\alpha_2^{(j)}} + B_6^{(j)} \beta_1^{(j)} \beta^{(j)} r^{-\beta_2^{(j)}} \} \cos 2\theta. \end{aligned} \dots\dots\dots (25)$$

$$\tau_{r\theta}^{(j)} = 2 \{ B_3^{(j)} \alpha^{(j)} r^{\alpha_1^{(j)}} + B_4^{(j)} \beta^{(j)} r^{\beta_1^{(j)}} - B_5^{(j)} \alpha^{(j)} r^{-\alpha_2^{(j)}} - B_6^{(j)} \beta^{(j)} r^{-\beta_2^{(j)}} \} \sin 2\theta. \dots\dots\dots (26)$$

$$\begin{aligned} u_r^{(j)} &= B_1^{(j)} k_{p2}^{(j)} \frac{S_{rr}^{(j)} + S_{\theta\theta}^{(j)} k_p^{(j)}}{k_p^{(j)}} r^{k_{p1}^{(j)}} + B_2^{(j)} k_{p1}^{(j)} \frac{S_{rr}^{(j)} - S_{\theta\theta}^{(j)} k_p^{(j)}}{k_p^{(j)}} r^{-k_{p2}^{(j)}} + \left[\frac{B_3^{(j)}}{\alpha^{(j)}} \{ S_{rr}^{(j)} \alpha_3^{(j)} + S_{r\theta}^{(j)} \alpha^{(j)} \alpha_2^{(j)} \} r^{\alpha_1^{(j)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_5^{(j)}}{\alpha^{(j)}} \{ S_{rr}^{(j)} \alpha_4^{(j)} - S_{r\theta}^{(j)} \alpha^{(j)} \alpha_1^{(j)} \} r^{-\alpha_2^{(j)}} + \frac{B_4^{(j)}}{\beta^{(j)}} \{ S_{rr}^{(j)} \beta_3^{(j)} + S_{r\theta}^{(j)} \beta^{(j)} \beta_2^{(j)} \} r^{\beta_1^{(j)}} \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{B_6^{(j)}}{\beta^{(j)}} \{ S_{rr}^{(j)} \beta_4^{(j)} - S_{r\theta}^{(j)} \beta^{(j)} \beta_1^{(j)} \} r^{-\beta^{(j)}} \} \cos 2\theta. \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\begin{aligned} \phi_\theta^{(j)} = & \frac{1}{2} \left[\frac{B_3^{(j)}}{\alpha^{(j)}} \{ -4S_{r\theta}^{(j)} \alpha^{(j)} + S_{\theta\theta}^{(j)} [\alpha^{(j)}]^2 \alpha_2^{(j)} - S_{rr}^{(j)} \alpha_3^{(j)} \} r^{\alpha^{(j)}} + \frac{B_5^{(j)}}{\alpha^{(j)}} \{ -4S_{r\theta}^{(j)} \alpha^{(j)} + S_{\theta\theta}^{(j)} [\alpha^{(j)}]^2 \alpha_1^{(j)} - S_{rr}^{(j)} \alpha_4^{(j)} \} r^{-\alpha^{(j)}} \right. \\ & \left. + \frac{B_4^{(j)}}{\beta^{(j)}} \{ -4S_{r\theta}^{(j)} \beta^{(j)} + S_{\theta\theta}^{(j)} [\beta^{(j)}]^2 \beta_2^{(j)} - S_{rr}^{(j)} \beta_3^{(j)} \} r^{\beta^{(j)}} + \frac{B_6^{(j)}}{\beta^{(j)}} \{ -4S_{r\theta}^{(j)} \beta^{(j)} + S_{\theta\theta}^{(j)} [\beta^{(j)}]^2 \beta_1^{(j)} - S_{rr}^{(j)} \beta_4^{(j)} \} r^{-\beta^{(j)}} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} k_{p1}^{(j)} &= k_p^{(j)} - 1, \quad k_{p2}^{(j)} = k_p^{(j)} + 1, \\ \alpha_1^{(j)} &= \alpha^{(j)} - 1, \quad \alpha_2^{(j)} = \alpha^{(j)} + 1, \\ \alpha_3^{(j)} &= \alpha^{(j)} - 3, \quad \alpha_4^{(j)} = \alpha^{(j)} + 3, \\ \beta_1^{(j)} &= \beta^{(j)} - 1, \quad \beta_2^{(j)} = \beta^{(j)} + 1, \\ \beta_3^{(j)} &= \beta^{(j)} - 3, \quad \beta_4^{(j)} = \beta^{(j)} + 3. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

2・2・1 円管介在物の場合 境界条件式は図1より次式で与えられる.

$$r=R_2 \text{ のとき} \quad \sigma_r^{(2)}=0, \quad \tau_{r\theta}^{(2)}=0. \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$r=R_1 \text{ のとき} \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \sigma_r^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \\ \tau_{r\theta}^{(1)} &= \tau_{r\theta}^{(2)} = \frac{c_2 E_r^{(1)}}{R_1} (u_\theta^{(2)} - u_\theta^{(1)}). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$r=\infty \text{ のとき} \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty + \sigma_x^\infty) - \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty + \sigma_x^\infty) + \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta}^{(1)} &= \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここに, 添字1は媒体側を, また添字2は円管側を表し, c_2 はすべり係数であり, 境界上の接線方向のすべりを表す変位差の大きさに比例してせん断応力が生じることを意味している. したがって, $c_2=0$ のとき $\tau_{r\theta}^{(1)}=\tau_{r\theta}^{(2)}=0$ となり, 完全すべり (Perfect Sliding) の

場合を表し, $c_2 \rightarrow \infty$ のとき $u_\theta^{(1)}=u_\theta^{(2)}$ となり完全結合 (Perfect Bonding) の境界条件の場合に一致することになる.

なお, 前述の面外問題の場合とは異なり, $c_2=0$ の完全すべりとしても, 式(31)の連続条件式があることから, 円管介在物にはなんらかの応力, 変位が発生する. すなわち, 境界である種のすべりを許容するものの, 円管介在物内は媒体にとって補強効果を発揮することができる.

境界条件式(30)~(32)に式(24)~(28)を代入すれば, 未知係数 $B_1^{(j)}, B_2^{(j)}, \dots, B_6^{(j)} (j=1, 2)$ に関する12元の連立1次方程式が得られる. これを解けば, 円管側, 媒体側それぞれの応力・変位が式(24)~(28)によって計算できることになる. このことから, c_2 の値として有限な値を設定すれば, 完全すべりから完全結合までの中間的な挙動を表すことができる.

2・2・2 円柱介在物の場合 この場合には, 中実の介在物であることから, 座標系の原点, すなわち0点に領域が存在することになる. このことから, 式(24)~(26)に $r=0$ を代入したときに応力が発散しないための条件として, r の負のべき乗になる項の係数を零に設定すればよい. その他の境界条件式(31), (32)はそのまま成立する. したがって, この場合も未知数の数と条件式の数一致して, 応力および変位を求めることができる.

3. 数値計算例

3・1 面外問題の数値計算例 この場合のせん断弾性係数および円管(または円柱)介在物の形状比を以下のように設定した.

$$\left. \begin{aligned} G_{\theta z}^{(1)} / G_{rz}^{(1)} &= 2.3, \quad G_{\theta z}^{(2)} / G_{rz}^{(2)} = 9.0, \\ G_{rz}^{(2)} / G_{rz}^{(1)} &= 1.0, \quad R_2 / R_1 = 0.5, \text{ (または } R_2 = 0). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

なお, 無限遠からの荷重として面外せん断応力 τ_{rz}^∞ が作用する場合を対象とした. この円管(または円柱)介在物の場合, 式(11)のすべり係数 c_1 を約 10^5 程度以上にすれば完全結合の場合の条件と一致することが確認されている.

図2は, $R_2/R_1=0.5$ の場合で, 媒体側の $r=R_1$ の接

Fig. 2 Distribution of normalized stresses $\tau_{rz}^{(1)}/\tau_{rz}^\infty$ and $\tau_{\theta z}^{(1)}/\tau_{rz}^\infty$ at the interface $r=R_1$ under applied stress τ_{rz}^∞

合面での $\tau_{rz}^{(1)}$ および $\tau_{\theta z}^{(1)}$ の計算例であるが、これから、完全すべり結合 ($c_1=0$) の場合には $r=R_1$ の円周上で $\tau_{rz}^{(1)}$ が零になる。この場合には、円管介在物の効果は当然のことながら、なんら発揮されないことから、媒体側応力 $\tau_{rz}^{(1)}$ は増大するとともに図3にみるように、 $w^{(1)}$ が最も大きくなっている。このことより、完全すべり結合の場合は、 $\tau_{rz}^{(1)} (= \tau_{rz}^{(2)})$ が部分的に解放される

Fig. 3 Distribution of normalized displacements $w^{(1)}$ $G_{rz}^{(1)}/R_1\tau_{xz}^\infty$ and $w^{(2)}$ $G_{rz}^{(2)}/R_1\tau_{xz}^\infty$ at the interface $r=R_1$ under applied stress τ_{xz}^∞

Fig. 4 Distribution of normalized maximum shear stress $\tau_{\max}/\tau_{xz}^\infty$ under applied stress τ_{xz}^∞

Fig. 5 Distribution of normalized maximum shear stress $\tau_{\max}/\tau_{xz}^\infty$ under applied stress τ_{xz}^∞ for the case of solid inclusion ($R_2=0$)

のを補償するために、 $\tau_{\theta z}^{(1)}$ ならびに変位 $w^{(1)}$ は増大していくことが観察される。

図3は媒体側および円管側それぞれの $r=R_1$ の接合面での変位 $w^{(j)}$ の計算例であるが、これらの結果は、すべりのため $w^{(j)}$ にずれが生じていることを示している。

図4は図の左半分が完全結合の場合、および図の右半分が完全結合と完全すべり結合の中間的な有限すべりの場合の最大せん断応力 $\tau_{\max}/\tau_{xz}^\infty$ の計算例であるが、これから、完全結合に近づくほど、円管側の等高線の間隔が密になり媒体との一体化が増大していることが観察される。

次に、図5は円柱介在物 ($R_2=0$) の場合の最大せん断応力 $\tau_{\max}/\tau_{xz}^\infty$ の計算例である。図の左半分が完全結合、および右半分が有限すべりの場合のものであるが、この場合も、完全結合に近づくほど、円柱介在物側の等高線の間隔が密になっている。

3.2 面内問題の数値計算例 この場合の弾性係数、ポアソン比および円管(または円柱)介在物の形状比を以下のように設定した。

Fig. 6 Distribution of normalized stresses $\tau_r^{(1)}/\sigma_x^\infty$ and $\sigma_r^{(1)}/\sigma_x^\infty$ at the interface $r=R_1$ under applied stress σ_x^∞

Fig. 7 Distribution of normalized displacements $u_\theta^{(1)}E_r^{(1)}/R_1\sigma_x^\infty$ and $u_\theta^{(2)}E_r^{(1)}/R_1\sigma_x^\infty$ at the interface $r=R_1$ under applied stress σ_x^∞

Fig. 8 Distribution of normalized maximum shear stress τ_{max}/τ_x^∞ under applied stress σ_x^∞

$$\left. \begin{aligned} E_r^{(1)} &= 5.70 \times 10^5 \text{ [kgf/cm}^2\text{]}, \\ E_\theta^{(1)} &= 1.41 \times 10^5 \text{ [kgf/cm}^2\text{]}, \\ E_r^{(2)} &= 3.82 \times 10^5 \text{ [kgf/cm}^2\text{]}, \\ E_\theta^{(2)} &= 4.96 \times 10^5 \text{ [kgf/cm}^2\text{]}, \\ \nu_{r\theta}^{(1)} &= 0.277, \nu_{\theta z}^{(1)} = 0.400, \nu_{rz}^{(1)} = 0.277, \\ \nu_{r\theta}^{(2)} &= 0.140, \nu_{\theta z}^{(2)} = 0.167, \nu_{rz}^{(2)} = 0.163, \\ R_2/R_1 &= 0.5, (\text{または } R_2 = 0). \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

なお、無限遠からの荷重として面内直応力 σ_x^∞ が作用する場合を対象とした。この円管(または円柱)介在物の場合、式(31)のすべり係数 c_2 を約 10^3 程度以上にすれば完全結合の場合の条件と一致することが確認されている。

図6は $R_2/R_1=0.5$ の場合で、媒体側の $r=R_1$ の接合面での $\tau_{\theta z}^{(1)}$ および $\sigma_r^{(1)}$ の計算例であるが、これから、完全すべり結合 ($c_2=0$) の場合には $r=R_1$ の円周上で $\tau_{\theta z}^{(1)}$ が零になるのに対し、図7をみるように、 $u_\theta^{(1)}$ は完全結合の場合および中間的な有限すべりの場合に比較して、完全すべり結合の場合のほうが大きな値を示している。このことは、面外の場合と同様に、完全すべり結合の場合には、応力 $\tau_{\theta z}^{(1)}$ が解放される分、変位 $u_\theta^{(1)}$ は大きくなり、また $u_\theta^{(2)}$ との差が大きくなっていることがわかる。

図8は図の左半分が完全結合の場合、および図の右半分が完全結合と完全すべり結合の中間的な有限すべりの場合の最大せん断応力 $\tau_{max}/\sigma_x^\infty$ の計算例であるが、これらから、有限すべりの場合のほうが、円管介在物の等高線の間隔が密になっている。

次に、図9は円柱介在物 ($R_2=0$) の場合の最大せん断応力分布の計算例であるが、図の左半分が完全結合の場合、および図の右半分が有限すべりの場合のもの

Fig. 9 Distribution of normalized maximum shear stress $\tau_{max}/\sigma_x^\infty$ under applied stress σ_x^∞ for the case of solid inclusion ($R_2=0$)

であり、有限すべりの場合のほうが、円柱介在物側の等高線の間隔が密になっている。

4. 結 言

本論文は奥行方向に一定断面の円管介在物または円柱介在物を有する極異方性弾性体の無限遠より面内・面外荷重が作用する問題の応力、変位を求めるための閉じた型の解析理論を提示した。ここでの取扱いでは介在物と媒体はお互い異なる弾性定数を有する極異方性であるとし、介在物と媒体の円形接合面において、ある種のすべり変形(せん断すべり)を許容しうる定式化がなされているが、その特殊な場合として完全結合とした場合も含まれるものとなっている。円形介在物を中実とした場合の介在物内の応力は等方性や直交異方性体の場合とは異なり、一定とはならず、介在物内の位置によって変動することが検証された。

ここでの理論は多層の円形リング介在物の問題や、極異方性の主軸が介在物の奥行方向の座標に対し、任意に傾斜している場合にも拡張可能なものであり、これらについては今後の課題として取扱う予定である。

文 献

- (1) Hoff, N. J., Stress concentration in cylindrically orthotropic composite plates with a circular hole, *J. Appl. Mech.*, **48** (1981), 563-569.
- (2) Das, Y. C. and Hazan, G. A., Cylindrically orthotropic medium with lined hole, *Journal of Engineering Mechanics, Proc. ASCE*, **112** (1986), 904-915.
- (3) Liu, K. Y. and Bert, C. W., Stress analysis of thick walled reinforced tunnel, *Journal of Engineering Mechanics, Proc. ASCE*, **112** (1986), 916-931.