定常点熱源に対する無限横等方性弾性体のグリーン関数*

小林 雅 隆^{*1}, 古口 日出男^{*2}, 近 藤 俊 美^{*1}Green's Functions for a Steady State Heat Source in
an Infinite Transversely Isotropic Elastic Solid

Masataka KOBAYASHI, Hideo KOGUCHI and Toshimi KONDO

In this paper, we present the Green's functions for a steady state heat source in a transversely isotropic thermoelastic solid by means of a displacement function method when the functions are expressed as the Cartesian coordinates. The solutions for the solid can be classified into five cases corresponding to the roots of our characteristic equation, which shows the relationship between the elastic constants and the coefficients of thermal conductivity. The solution for the isotropic solid is included as a special case which corresponds to a triple root of our characteristic equation. Furthermore it is noted that the solutions for the double root in our characteristic equation include the solution in which there is a relationship between the coefficients of thermal conductivity and the elastic constants. Finally, the numerical results are given.

Key Words: Anisotropy, Elasticity, Thermal Stress, Green's Function, Thermoelasticity, Transverse Isotropy, Three-Dimensional Problem, Cartesian Coordinates, Composite Material

1. 緒 言

近年, 著しい科学技術の進歩に伴い, 異方性材料および複合材料を使用した工業製品が製作されている。異方性材料の中で, 工業製品に広く用いられている一方向繊維強化複合材料⁽¹⁾をはじめ, チタンやマグネシウムのような金属材料は, 横等方性を有している。そして, これらの工業製品は耐熱, 軽量などの特色を生かして, 様々な過酷な環境で使用されることが多い。したがって, これら材料を用いた機械部品あるいは構造物の熱応力を解析することは機械設計の観点からきわめて重要である。現在, 熱応力を求める数値解法として有限要素法や境界要素法があるが, ここでは境界要素法で中心的な役割をするグリーン関数を導出する。

さて, 熱負荷のない横等方性弾性体のグリーン関数はこれまで多く報告されている⁽²⁾⁻⁽¹³⁾。しかし, 直角座標系を用いた最近の論文は比較的少なく, 六面体応力ベクトル表現を用いた欠陥による横等方性弾性体のグリーン関数⁽¹⁴⁾と, 著者等の一人による二相横等方性弾性体の基本解⁽¹⁵⁾が注目される。文献(15)は重根を考慮した一般解で, Kelvin⁽¹⁶⁾, Mindlin⁽¹⁷⁾, Hetenyi⁽¹⁸⁾, Rongved⁽¹⁹⁾の解を包含するものであり, その応用例も報告している⁽²⁰⁾。

他方, 熱負荷を考慮した⁽²¹⁾⁻⁽²⁸⁾三次元横等方性弾性問題のグリーン関数はいくつか示されている⁽²⁹⁾⁻⁽³³⁾。

しかし, その多くは軸対称問題に対するものである。Mossakowska & Nowackiは横等方性弾性体のグリーン関数を導出しているが⁽³⁴⁾, 直角座標系の基礎式を軸対称の式に変換した式からの軸対称解の誘導のみである。また, 最近芦田・野田らは熱弾性変位ポテンシャルを用いて横等方性弾性体の一般解を直角座標系で表した⁽³⁵⁾。しかし, グリーン関数の具体的な解は導いていない。このように, 集中点熱源に対する三次元横等方性弾性体のグリーン関数を直角座標系で表した論文は見あたらない。

本研究は, 先の著者等の研究を熱発生のある場合に一般化し, 定常点熱源に対する無限横等方性弾性体の変位と応力のグリーン関数を, 三次元直角座標系を用いて求めたものである。最初に, Mossakowska & Nowacki⁽³⁴⁾と類似な手法で解析に必要な変位関数を定義する。次に, その関数が古口等⁽¹⁵⁾あるいはPan-Chou等⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾のポテンシャル関数を, 熱を含む場合に一般化したものであることを示す。さらに, 本論文のグリーン関数は, 芦田・野田⁽³⁵⁾が指摘したのと同様な材料定数の関係から, 五つの場合に分類されることを示す。しかし, その内容は異なり, 両者の相違点についても考察する。解は単根, 二重根及び三重根の場合があり, 等方性熱弾性体の解は三重根の特別な場合に対応する。

最後に, チタンを例に数値計算を行い, 本来横等方性を示すチタンを等方性及び横等方性として, 変位及

* 原稿受付 1996年11月22日。

^{*1} 正員, 長岡工業高等専門学校 (〒940 長岡市西片貝町888)。^{*2} 正員, 長岡技術科学大学工学部 (〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)。

び応力分布の違いを数値的に明らかにする。

2. 横等方性熱弾性体の基礎式と変位関数

準静的な場合の直交異方性弾性体の主軸に関して、変位で表わした平衡方程式および熱伝導方程式は次式になる。

$$\left. \begin{aligned} C_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + C_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial u_2}{\partial y} + (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial u_3}{\partial z} \right\} - \beta_1 \frac{\partial T}{\partial x} = -b_1, \\ C_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial u_3}{\partial z} \right\} - \beta_2 \frac{\partial T}{\partial y} = -b_2, \\ C_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + C_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right\} - \beta_3 \frac{\partial T}{\partial z} = -b_3, \\ \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -b_4. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 C_{ij} は弾性Voigt定数、 b_i は物体力、 λ_i は熱伝導率、 $\beta_i = C_{ij}\alpha_j$ (j は1, 2, 3の和)、 α_i は線膨張係数、 c は定容比熱、 ρ は密度、 b_4 は単位体積・単位時間当たりの熱発生量である。

さて、ここでの横等方性弾性体では添え字1, 2が x, y 座標で等方向とし、添え字3を対称軸の z 方向とする。このとき、式(1)で次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} C_{22} = C_{11}, \quad C_{55} = C_{44}, \quad C_{23} = C_{13}, \\ \lambda_2 = \lambda_1, \quad \beta_2 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(2)を式(1)に代入し、マトリックス表示する。このとき、 $u_4 = T$ と置いて一般化変位 u_i の係数微分演算子の行列式を Δ と置き、次式を満たす χ_i を変位関数と定義することにする。

$$\Delta \cdot \chi_i = -b_i, \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Delta = & \lambda_1 C_{11} C_{44} C_{66} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \\ & \times \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} v_1 = & \sqrt{\frac{(C_C - C_{13})(C_C + C_{13} + 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}} \\ & + \sqrt{\frac{(C_C + C_{13})(C_C - C_{13} - 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}}, \quad z_1 = v_1 z, \\ v_2 = & \sqrt{\frac{(C_C - C_{13})(C_C + C_{13} + 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sqrt{\frac{(C_C + C_{13})(C_C - C_{13} - 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}}, \quad z_2 = v_2 z, \\ z_3 = v_3 z = & \sqrt{\frac{C_{66}}{C_{44}}} \cdot z, \quad z_4 = v_4 z = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}} \cdot z, \\ C_C = & \sqrt{C_{11}C_{33}}, \quad \tau = \frac{\lambda_1}{c\rho} t, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

上の変位関数 χ_i を用いれば、一般化変位の解は次のように書ける。

$$u_i = Q_{i1}\chi_1 + Q_{i2}\chi_2 + Q_{i3}\chi_3 + Q_{i4}\chi_4, \quad (i=1 \sim 4). \quad \dots\dots\dots (6)$$

Q_{ij} は係数微分演算子であり、詳細は付録A.1に記す。

さて、Hu⁽³⁾等あるいは古口等⁽¹⁵⁾が横等方性弾性体に対して用いたポテンシャル関数と本論文の変位関数との関係について考察する。彼等の関数は次のように定義されている。

$$\left. \begin{aligned} u_1 = & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ u_2 = & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ u_3 = & -\frac{C_{11}}{C_{13} + C_{44}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi - \frac{C_{44}}{C_{13} + C_{44}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

関数 ϕ および ψ は、次式の準重調和および準調和方程式を満たす関数である。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \phi = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \psi = 0. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

本報告の変位関数を用いて表わせば、

$$\begin{aligned} \phi = & -\lambda_1 C_{66} (C_{13} + C_{44}) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \chi_3 \\ & \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi = & \lambda_1 C_{44} (C_{11} - C_{66}) \left(\nabla^2 + w \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \chi_1 \\ & \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\text{ここで、} \quad w = \frac{C_{33}}{C_{44}} - \frac{(C_{13} + C_{44})^2}{C_{44}(C_{11} - C_{66})} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし χ_1 は次式を満たすものとする。

$$\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \chi_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

したがって、関数 ψ および ϕ は χ_1, χ_3 に対応している。対称性から χ_1 は χ_2 としても同じである。ここでの変位関数 χ_i はポテンシャル関数 ϕ および ψ 等の包含形となっており、熱を含む形に一般化した関数であることがわかる。結局種々の熱に関する χ_4 を求めれば、横等方性熱弾性体の一般的な解析が可能になる。次に、基本となる定常点熱源に対応する χ_4 関数を求める。

3. 定常点熱源に対する横等方性熱弾性体の基本解

3.1 定常点熱源に対する変位関数の一般形式

(3) の λ_4 を求めるため、式(6)および付録の Q_4 を考慮すると次式の ψ_1 を用いてよいことがわかる。

$$\psi_1 = \beta_1 C_{44} C_{66} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \chi_4 \quad \dots\dots\dots (13)$$

基礎式は、点熱源を δ 関数を用いて表わし、次式のように与える。

$$\frac{\lambda_3 C_{33}}{\beta_1} \left(\nu_1^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\nu_2^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\nu_4^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_1 = -b_4 \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z-z_0) \quad \dots\dots\dots (14)$$

この特解を次のフーリエ・ハンケル積分形で表わす。

$$\psi_{1p} = \int_0^\infty \int_0^\infty A(\alpha, \gamma) J_0(\alpha r) \cos \gamma(z-z_0) d\alpha d\gamma \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(14)に代入して特解を求めると次式になる。

$$\psi_{1p} = \frac{\beta_1 b_4}{2\pi^2 \lambda_3 C_{33}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha r) \cos \gamma(z-z_0) d\alpha d\gamma}{(\nu_1^2 \alpha^2 + \gamma^2)(\nu_2^2 \alpha^2 + \gamma^2)(\nu_4^2 \alpha^2 + \gamma^2)} \quad \dots\dots\dots (16)$$

この分母を部分分数に展開し、フーリエ変換公式を用いれば、 γ に関する積分を閉じた形にできる。その結果特解は次式で与えられる。

$$\psi_{1p} = \frac{\beta_1 b_4}{4\pi \lambda_3 C_{33}} \sum_{j=1,2,4} D_{jj} \int_0^\infty \alpha^{-4} J_0(\alpha r) e^{-\alpha \nu_j(z-z_0)} d\alpha \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、

$$D_{jj} = \frac{\pm 1}{\nu_j (\nu_j^2 - \nu_i^2) (\nu_j^2 - \nu_\ell^2)} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 $\begin{cases} z-z_0 > 0, & +\text{側 } i, j, \ell = 1, 2, 4, (i \neq j \neq \ell) \\ z-z_0 < 0, & -\text{側かつ } \nu_j \rightarrow -\nu_j \text{ と置く。} \end{cases}$

この特性式(18)から解るように、 i, j, ℓ の間に等値関係があると解が求まらない。その場合は、式(16)に戻って重根の部分分数展開を行わなければならない。このとき、次の五種類の場合が存在することがわかる。

- (1) ν_1, ν_2, ν_4 が単根で独立な場合
 - (2) $\nu_1 = \nu_2$ の場合 (二重根)
 - (3) $\nu_1 = \nu_4$ の場合 (二重根)
 - (4) $\nu_2 = \nu_4$ の場合 (二重根)
 - (5) $\nu_1 = \nu_2 = \nu_4$ の場合 (三重根)
- (2)~(4)の三つの場合は、添え字が異なるのみであるので、以下では仮に(2)の場合を記すが、添え字を入れ替えるだけで(3)および(4)の場合になる。(3)と(4)の場合には $\nu_4 = \lambda_4/\lambda_3$ が熱伝導率比であることから、弾性定数比と熱伝導率比の関係によっても重根に対応する解が得られることが明らかである。ここでは、 ν_4 がキャンセルして現れていないが、芦田・野田の五つの場合は ν_4 を ν_2 で置き換えたものに相当するので、もう三つの場合が存在することになる。
- もう一つの χ_3 に対応する変位関数 ϕ_1 を次式で定義するものとする。

$$\phi_1 = \lambda_1 C_{44} C_{66} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \chi_3 \quad \dots\dots\dots (19)$$

次に、これらの特解が求まったとき、変位と応力を求めるのに必要な変位関数表示を求めておく。

3.2 変位と応力を求める公式

上の ψ_1, ϕ_1 を用いて変位と応力を x, y, z 座標系で表わすための変位関数表示式は以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_1 - \frac{(C_{13} + C_{44})}{C_{44}} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial z}, \\ u_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_1 - \frac{(C_{13} + C_{44})}{C_{44}} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y \partial z}, \\ u_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(b \nabla^2 + k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_1 + \left(\frac{C_{11}}{C_{44}} \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_1, \\ T = u_4 &= \frac{C_{33}}{\beta_1} \left(\nu_1^2 \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\nu_2^2 \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_1, \\ \sigma_{xx} &= C_{33} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(d \nabla^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - q \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\nabla^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \psi_1 \\ &\quad - C_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left(a_1 \nabla^2 - b_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_1, \\ \sigma_{yy} &= C_{33} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(d \nabla^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\nabla^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \psi_1 \\ &\quad - C_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left(a_1 \nabla^2 - b_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_1, \\ \sigma_{zz} &= C_{33} \nabla^2 \left(d \nabla^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_1 + C_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left(p \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_1, \\ \sigma_{yz} &= -C_{33} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(d \nabla^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_1 \\ &\quad + C_{33} \frac{\partial}{\partial y} \left(a_1 \nabla^2 - f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_1, \\ \sigma_{zx} &= -C_{33} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(d \nabla^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_1 \\ &\quad + C_{33} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1 \nabla^2 - f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_1, \\ \sigma_{xy} &= C_{33} q \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\nabla^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_1 - C_{33} b_1 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x \partial y \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

関数 ψ_1 が r と z のみの関数の場合、次の微分演算子の変換を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \nabla_r^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{2x^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \nabla_r^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{2y^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r}, \\ \text{ただし,} \quad \nabla^2 &= \nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

また、式(20)、(21)中の無次元定数は次式である。

$$\begin{aligned} a &= \frac{C_{33}}{C_{44}} - k \left(1 + \frac{C_{13}}{C_{44}} \right), \quad b = k \frac{C_{11}}{C_{44}} - \left(1 + \frac{C_{13}}{C_{44}} \right), \\ q &= \frac{2C_{66}}{C_{33}}, \quad d = \frac{(C_{13} - kC_{11})}{C_{33}}, \quad e = \frac{kC_{13}}{C_{33}} - 1, \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad b_1 = \frac{2C_{66}(C_{13} + C_{44})}{C_{33}C_{44}}, \quad f = \frac{C_{13}}{C_{33}},$$

$$k = \frac{\beta_3}{\beta_1}, \quad p = \frac{C_{33}C_{11} - C_{13}^2 + C_{13}C_{44}}{C_{33}C_{44}}. \quad \dots\dots\dots (23)$$

以下では、これらを用いて式 (20), (21) の一般化変位と応力を計算する。

3.3 単根の場合に対応する解 式 (17), (18) を式 (20) に代入し、式 (22) を考慮して一般化変位を計算した後、ハンケル積分の閉形公式を用いれば、グリーン関数は次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 = u_x &= C_u \sum_{j=1,2,4} D_{jj} (1 - av_j^2) \frac{x}{R_j^*}, \\ u_2 = u_y &= C_u \sum_{j=1,2,4} D_{jj} (1 - av_j^2) \frac{y}{R_j^*}, \\ u_3 = u_z &= C_u \sum_{j=1,2,4} D_{jj} (b - kv_j^2) v_j \ln \frac{1}{R_j^*}, \\ u_4 = T &= C_T \frac{1}{R_4}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

式 (21) より応力を求めて、同じく閉形表現すれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -C_\sigma \sum_{j=1,2,4} D_{jj} \left[\left\{ v_j^2 (d - ev_j^2) + q(1 - av_j^2) \frac{y^2}{r^2} \right\} \frac{1}{R_j} \right. \\ &\quad \left. + q(1 - av_j^2) \frac{x^2 - y^2}{r^2} \frac{1}{R_j^*} \right], \\ \sigma_{yy} &= -C_\sigma \sum_{j=1,2,4} D_{jj} \left[\left\{ v_j^2 (d - ev_j^2) + q(1 - av_j^2) \frac{x^2}{r^2} \right\} \frac{1}{R_j} \right. \\ &\quad \left. + q(1 - av_j^2) \frac{y^2 - x^2}{r^2} \frac{1}{R_j^*} \right], \\ \sigma_{zz} &= C_\sigma \sum_{j=1,2,4} D_{jj} (d - ev_j^2) \frac{1}{R_j}, \\ \sigma_{yz} &= C_\sigma \sum_{j=1,2,4} D_{jj} v_j (d - ev_j^2) \frac{y}{R_j R_j^*}, \\ \sigma_{zx} &= C_\sigma \sum_{j=1,2,4} D_{jj} v_j (d - ev_j^2) \frac{x}{R_j R_j^*}, \\ \sigma_{xy} &= C_\sigma \sum_{j=1,2,4} D_{jj} q (1 - av_j^2) \frac{(-xy)}{R_j R_j^*}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここで、次の表現を用いた。

$$R_j = \sqrt{r^2 + v_j^2 (z - z_0)^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad Z_j = v_j (z - z_0),$$

$$R_j^* = R_j + Z_j = \sqrt{r^2 + v_j^2 (z - z_0)^2} + v_j (z - z_0). \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$C_u = \frac{\beta_1 b_4}{4\pi \lambda_3 C_{33}}, \quad C_T = \frac{b_4}{4\pi \lambda_3 v_4}, \quad C_\sigma = \frac{\beta_1 b_4}{4\pi \lambda_3}. \quad \dots\dots\dots (27)$$

3.4 二重根の場合に対応する解 前述のように、 $v_1 = v_2$ の場合に付いて記すが、その添え字を換えれば $v_1 = v_4$ の場合および $v_2 = v_4$ の場合となる。この二重根の場合は、式 (16) に戻って分母の部分分数展開をやり直す必要がある。その後で、フーリエ変換公式により、積分を一回閉形表現すると次式になる。ただし、 $z - z_0 > 0$ とする。

$$\psi_1 = C_u \int_0^\infty \left[\left\{ \frac{-1}{v_1(v_1^2 - v_4^2)^2} + \frac{-1 + (-v_1\alpha)(z - z_0)}{2v_1^3(v_1^2 - v_4^2)} \right\} \right.$$

$$\left. \times e^{-v_1\alpha(z - z_0)} + \frac{e^{-v_4\alpha(z - z_0)}}{v_4(v_1^2 - v_4^2)^2} \right] \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^4} d\alpha \quad \dots\dots\dots (28)$$

{ } の第二項が二重根に特有な項である。この変位関数を用いて、前節と同様に式 (20), (21) の一般化変位と応力を計算する。前と同様に閉形公式を用いて閉形表現でき、一般化変位は次式のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= C_u \left\{ \left(a_{11} + b_{11} \frac{Z_1}{R_1} \right) \frac{x}{R_1^*} + c_{11} \frac{x}{R_4^*} \right\}, \\ u_z &= C_u \left\{ a_{21} \ln \frac{1}{R_1^*} + b_{21} \frac{Z_1}{R_1} + c_{21} \frac{1}{R_4^*} \right\}, \\ T = u_4 &= C_T \frac{1}{R_4}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

u_y は u_x で x を y に置き換えたものである。また、応力は次式のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_\sigma \left\{ \left(a_{31} + b_{31} \frac{y^2}{r^2} \right) \frac{1}{R_1} + c_{31} \left(1 - \frac{2y^2}{r^2} \right) \frac{1}{R_1^*} \right. \\ &\quad \left. + d_{31} \left(1 - \frac{2y^2}{r^2} \right) \frac{Z_1}{R_1 R_1^*} + \left(e_{31} + f_{31} \frac{y^2}{r^2} \right) \frac{Z_1^2}{R_1^3} \right. \\ &\quad \left. + \left(g_{31} + h_{31} \frac{y^2}{r^2} \right) \frac{1}{R_4} + i_{31} \left(1 - \frac{2y^2}{r^2} \right) \frac{1}{R_4^*} \right\}, \\ \sigma_{zz} &= C_\sigma \left\{ a_{41} \frac{1}{R_1} + b_{41} \frac{Z_1^2}{R_1^3} + c_{41} \frac{1}{R_4} \right\}, \\ \sigma_{yz} &= C_\sigma \left\{ a_{51} \frac{y}{r^2} \left(\frac{Z_1}{R_1} - \frac{Z_4}{R_4} \right) + b_{51} \frac{y Z_1}{R_1^3} \right\}, \\ \sigma_{xy} &= C_\sigma \frac{xy}{r^2} \left\{ a_{61} \frac{1}{R_1} + b_{61} \frac{1}{R_1^*} + c_{61} \frac{Z_1^2}{R_1^3} + d_{61} \left(\frac{1}{R_4} - \frac{2}{R_4^*} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

σ_{yy} は σ_{xx} で y を x に、 σ_{xz} は σ_{yz} で y を x に置換したものである。係数の詳細は付録A. 2 に記す。

3.5 三重根の場合に対応する解 この場合は、式 (16) の分母が三乗となる。これをフーリエ変換公式により、積分を一回閉形表現すると次式になる。ただし、 $v_1 = v_2 = v_4$ と置き、 $z - z_0 > 0$ とする。

$$\psi_1 = C_u \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha r) d\alpha}{v_4^5 \alpha^5} \left\{ 3 + 3v_4\alpha(z - z_0) \right. \\ \left. + v_4^2 \alpha^2 (z - z_0)^2 \right\} e^{-v_4\alpha(z - z_0)} \quad \dots\dots\dots (31)$$

これを用いて、式 (20) の一般化変位を計算して、閉形公式を用いて整理すると、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{C_u}{8v_4^5} \left\{ 4 - (1 - av_4^2) \frac{r^2}{R_4^2} \right\} \frac{x}{R_4}, \\ u_z &= \frac{C_u}{8v_4^4} \left\{ (b + 3kv_4^2) + (b - kv_4^2) \frac{Z_4^2}{R_4^2} \right\} \frac{Z_4}{R_4}, \\ T = u_4 &= C_T \frac{1}{R_4}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

u_y は u_x で x を y と置いたものである。また、式 (21) から応力を求めれば次式になる。

$$\sigma_{xx} = \frac{C_\sigma}{8v_4^5} \left[v_4^2 \left\{ 4d - 3(d - ev_4^2) \frac{r^2}{R_4^2} \right\} \frac{r^2}{R_4^3} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & -q \left\{ \frac{4}{R_4} - \frac{4y^2}{R_4^3} - (1 - \alpha\nu_4^2) \left(\frac{x^2}{R_4^3} + \frac{3y^2 Z_4^2}{R_4^5} \right) \right\}, \\ & \sigma_{zz} = \frac{C_{\sigma}}{8\nu_4^2} \left\{ 4d \left(\frac{1}{R_4} + \frac{Z_4^2}{R_4^3} \right) - (d - e\nu_4^2) \left(\frac{1}{R_4} + \frac{2Z_4^2}{R_4^3} - \frac{3Z_4^4}{R_4^5} \right) \right\}, \\ & \sigma_{yz} = \frac{C_{\sigma}}{8\nu_4^2} \left\{ (d + 3e\nu_4^2) \frac{yZ_4}{R_4^3} + 3(d - e\nu_4^2) \frac{yZ_4^3}{R_4^5} \right\}, \\ & \sigma_{xy} = \frac{C_{\sigma} q}{8\nu_4^2} \frac{xy}{r^2} \left\{ -(3 + \alpha\nu_4^2) \frac{1}{R_4} + 4\alpha\nu_4^2 \frac{Z_4^2}{R_4^3} + 3(1 - \alpha\nu_4^2) \frac{Z_4^4}{R_4^5} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (33)$$

σ_{yy} は σ_{xx} で x と y を交換, σ_{xz} は σ_{yz} で y を x で置換する.

3.6 等方性熱弾性体の解 特に, 等方性熱弾性体の場合の解は, 上の熱弾性定数および無次元定数を次のように置くだけで得られる.

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \alpha = b = k = 1, \\ 1 - \alpha\nu_4^2 = b - k\nu_4^2 = d - e\nu_4^2 = 0, \quad d = e = -q = \frac{2\nu - 1}{1 - \nu}, \\ \beta_3 = \beta_1 = \frac{E\alpha}{1 - 2\nu}, \quad \lambda_3 = \lambda_1, \quad C_{33} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

また後の数値計算を考慮し, 得られた解の全ての座標値を熱源の座標値 z_0 で割り, 例えば $x/z_0 \rightarrow x, R_4/z_0 \rightarrow R_4$ 等に置き換えた無次元化座標の式を $\rightarrow$ として右側に記す. 全ての解は, 同様にして無次元化が可能である.

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\beta_1 b_4}{8\pi\lambda_3 C_{33}} \frac{x}{R_4} \rightarrow \frac{\alpha b_4 (1 + \nu)}{8\pi\lambda_3 (1 - \nu)} \frac{x}{R_4}, \\ u_z &= \frac{\beta_1 b_4}{8\pi\lambda_3 C_{33}} \frac{(z - z_0)}{R_4} \rightarrow \frac{\alpha b_4 (1 + \nu)}{8\pi\lambda_3 (1 - \nu)} \frac{(z - 1)}{R_4}, \\ T &= \frac{b_4}{8\pi\lambda_3} \frac{1}{R_4} \rightarrow \frac{b_4}{8\pi\lambda_3 z_0} \frac{1}{R_4}, \\ \sigma_{xx} &\rightarrow -\frac{\alpha E b_4}{8\pi\lambda_3 (1 - \nu) z_0} \left(\frac{1}{R_4} + \frac{x^2}{R_4^3} \right), \\ \sigma_{zz} &\rightarrow -\frac{\alpha E b_4}{8\pi\lambda_3 (1 - \nu) z_0} \left(\frac{1}{R_4} + \frac{(z - 1)^2}{R_4^3} \right), \\ \sigma_{xz} &\rightarrow -\frac{\alpha E b_4}{8\pi\lambda_3 (1 - \nu) z_0} \frac{x(z - 1)}{R_4^3}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (35)$$

u_y は u_x で x を y に置いたものであり, σ_{yy} は σ_{xx} で y を x に, σ_{yz} は σ_{xz} で x を y に置換したものである.

4. 数値計算例

横等方性弾性を示すチタンの場合を例に, 変位と応力の数値計算例を示す. それに用いた横等方性チタンの熱弾性材料特性は以下の表1と表2に示す通りである. ただし, 熱的には等方として計算した. また, 比較のためチタンが等方性を示す場合の計算も行ったが, それに使用した弾性定数を表3に示す. 表2の材料定数は同一とする. 計算に当たって, 全ての量は等方性熱弾性体の解の前に付く定係数, 例えば u_x 及び σ_{xx} それぞれを次の定係数で割って無次元化した値を示す.

$$\frac{\alpha b_4 (1 + \nu)}{8\pi\lambda_3 (1 - \nu)} \quad \text{及び} \quad \frac{\alpha E b_4}{8\pi\lambda_3 (1 - \nu) z_0}.$$

Table 1. Elastic constants of transversely isotropic titanium

Voigt elastic constants [GPa]					
C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	C_{66}
162	92	69	181	46.7	35.2

Table 2. The other material properties of titanium

Thermal conductivity λ [W/(m·K)]	3.7
Coefficient of linear thermal expansion α [1/K]	8.7×10^{-6}
Specific heat c [J/(kg·K)]	125
Mass density ρ [kg/m ³]	4.51×10^3

Table 3. Elastic constants of isotropic titanium

Young's modulus E [GPa]	117.6
Shear modulus G [GPa]	44.1

チタンが等方性を示す場合及び横等方性を示す場合の数値計算結果は, 比較のために同じ図の上に示す. 図1と図2は無次元 z 座標を変化させた場合の無次元変位と応力であり, 図3と図4は無次元 x 座標を変化させた場合の無次元変位と応力を表わしている. 当然ながら, 応力は全て圧縮応力であり, 無限遠で消える条件を満足している. また, 温度は無限遠での温度からの増加温度を表わしており, 等方と横等方で共通である. このチタンの例は異方性の度合いが小さい方であるが, 等方性の解に比べて図1の u_x は3.5%大きく, u_z は12.7%小さい. 図2の σ_{xx} は5%小さく, σ_{zz} は2.4%大きい. また, 図3の u_x, u_z は等方性の解に比べ, それぞれ3.4%大及び12.6%小であり, 図4の σ_{xx}, σ_{zz} はそれぞれ20.5%小及び2.8%大である. 応力によってはこの程度の横等方性でも無視できない大きさになることがわかる.

5. 結 言

無限横等方性弾性体中に定常点熱源のある場合の変位と応力のグリーン関数を, 変位関数法を用いて閉形表現で求めた. 解は熱弾性定数の間の特別な関係により, 単根の場合, 二重根の場合および三重根の場合の3種類の場合に分けられる. また本解は等方性の解を含み, それは三重根の解の特別な場合である. ただし, 重根の場合の解には熱伝導率比と弾性定数の関係が含まれている点に注意する必要がある. 従来の熱弾性ポテンシャルを用いる手法では, 熱伝導率比は陽な形で表面に現れなかった. しかし, 本手法では熱伝導率

Fig.1 Nondimensional generalized displacements at the section $y=0$, $x=0.1$, due to a unit heat source at $(0,0,1)$ in titanium.

Fig.2 Nondimensional stresses at the section $y=0$, $x=0.1$, due to a unit heat source at $(0,0,1)$ in titanium.

Fig.3 Nondimensional generalized displacements at the section $y=0$, $z=0.1$, due to a unit heat source at $(0,0,1)$ in titanium.

Fig.4 Nondimensional stresses at the section $y=0$, $z=0.1$, due to a unit heat source at $(0,0,1)$ in titanium.

程式も陽な形で連成させて解いた結果、表面に現れてきたものと考えられる。したがって、横等方性弾性体の定常点熱源による解は、芦田・野田が指摘したと同じ五つの場合に分類されるが、その内容は異なっている。すなわち、解は上述のように熱伝導率比と弾性定数の間の関係の影響も含んでいる。このことから、より一般的な熱と力の作用を含む問題では、本報告の考察によりもう三種類の場合が加わることが明らかになった。

最後に、チタンについて数値計算を行い、本来横等方性弾性を示すチタンを横等方性と等方性として、数

値的に比較検討し、応力によっては無視できないなど、その相違点と大きさを明らかにした。

付 録

A.1 式(6)の Q_{ij} の具体形 以下では、 Q_{ij} の添え字 i は u_i 成分のまた j は x_j 成分の係数を表す。

$$Q_{11} = \lambda_1 C_{44} C_{66} \left[\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) + \frac{C_{11} - C_{66}}{C_{66}} \left(\nabla^2 + w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right),$$

$$Q_{12} = -\lambda_1 C_{44} (C_{11} - C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\nabla^2 + w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right),$$

$$\begin{aligned}
Q_{13} &= -\lambda_1 C_{66} (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \\
Q_{14} &= \beta_1 C_{44} C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\nabla^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \\
Q_{21} &= -\lambda_1 C_{44} (C_{11} - C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\nabla^2 + w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \\
Q_{22} &= \lambda_1 C_{44} C_{66} \left[\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_5^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_{11} - C_{66}}{C_{66}} \left(\nabla^2 + w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \\
Q_{23} &= -\lambda_1 C_{66} (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \\
Q_{24} &= \beta_1 C_{44} C_{66} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\nabla^2 + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \\
Q_{31} &= -\lambda_1 C_{66} (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \\
Q_{32} &= -\lambda_1 C_{66} (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \\
Q_{33} &= \lambda_1 C_{11} C_{66} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_6^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_4^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \\
Q_{34} &= \beta_1 C_{44} C_{66} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(b \nabla^2 + k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \\
Q_{41} &= Q_{42} = Q_{43} = 0, \\
Q_{44} &= C_{11} C_{44} C_{66} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \dots \quad (37)
\end{aligned}$$

ここで、定数は式(5), (11), (23), (26)の他に、次式のように置いた。

$$z_5 = v_5 z = \sqrt{\frac{C_{44}}{C_{33}}} \cdot z, \quad z_6 = v_6 z = \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{44}}} \cdot z \dots \dots \dots (38)$$

A. 2 3.4 節の係数の詳細 係数の具体形を以下に記す。

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{1 - a v_1^2}{v_1(v_1^2 - v_4^2)} \left(\frac{1}{v_1^2 - v_4^2} + \frac{1}{2 v_1^2} + \frac{a}{1 - a v_1^2} \right), \\
b_{11} &= -\frac{1 - a v_1^2}{2 v_1^3(v_1^2 - v_4^2)}, \quad c_{11} = \frac{(1 - a v_4^2)}{v_4(v_4^2 - v_1^2)^2}, \\
a_{21} &= -\frac{(b - k v_1^2)}{(v_1^2 - v_4^2)} \left(\frac{1}{v_1^2 - v_4^2} + \frac{1}{2 v_1^2} \right) + \frac{(b - 3 k v_1^2)}{2 v_1^2(v_1^2 - v_4^2)}, \\
b_{21} &= -\frac{(b - k v_1^2)}{2 v_1^2(v_1^2 - v_4^2)}, \quad c_{21} = \frac{(b - k v_4^2)}{(v_4^2 - v_1^2)^2}, \\
a_{31} &= \left\{ \frac{v_1(d - e v_1^2)}{(v_1^2 - v_4^2)^2} + \frac{(d - e v_1^2)}{2 v_1(v_1^2 - v_4^2)} + \frac{-d + 2 e v_1^2}{v_1(v_1^2 - v_4^2)} \right\}, \\
b_{31} &= q \left\{ \frac{1 - a v_1^2}{v_1(v_1^2 - v_4^2)^2} + \frac{1 - a v_1^2}{2 v_1^3(v_1^2 - v_4^2)} + \frac{a}{v_1(v_1^2 - v_4^2)} \right\}, \\
c_{31} &= q \left\{ \frac{(1 - a v_1^2)}{v_1(v_1^2 - v_4^2)^2} + \frac{(1 + a v_1^2)}{2 v_1^3(v_1^2 - v_4^2)} \right\}, \quad d_{31} = q \frac{(1 - a v_1^2)}{2 v_1^3(v_1^2 - v_4^2)}, \\
e_{31} &= \frac{d - e v_1^2}{2 v_1(v_1^2 - v_4^2)}, \quad f_{31} = q \frac{1 - a v_1^2}{2 v_1^3(v_1^2 - v_4^2)}, \quad g_{31} = -\frac{v_4(d - e v_4^2)}{(v_1^2 - v_4^2)^2}, \\
h_{31} &= -q \frac{1 - a v_4^2}{v_4(v_1^2 - v_4^2)^2}, \quad i_{31} = -q \frac{1 - a v_4^2}{v_4(v_1^2 - v_4^2)^2}, \\
a_{41} &= -\left\{ \frac{(d - e v_1^2)}{v_1(v_1^2 - v_4^2)^2} + \frac{(d + e v_1^2)}{2 v_1^3(v_1^2 - v_4^2)} \right\}, \quad b_{41} = -\frac{(d - e v_1^2)}{2 v_1^3(v_1^2 - v_4^2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{41} &= \frac{(d - e v_4^2)}{v_4(v_1^2 - v_4^2)^2}, \quad a_{51} = \frac{d - e v_4^2}{(v_1^2 - v_4^2)^2}, \quad b_{51} = -\frac{d - e v_4^2}{2 v_1^2(v_1^2 - v_4^2)}, \\
a_{61} &= q \left\{ \frac{-(1 - a v_1^2)}{v_1(v_1^2 - v_4^2)^2} + \frac{(1 - 3 a v_1^2)}{2 v_1^3(v_1^2 - v_4^2)} \right\}, \quad c_{61} = -q \frac{(1 - a v_1^2)}{2 v_1^3(v_1^2 - v_4^2)}, \\
b_{61} &= 2 q \left\{ \frac{(1 - a v_1^2)}{v_1(v_1^2 - v_4^2)^2} + \frac{a}{v_1(v_1^2 - v_4^2)} \right\}, \quad d_{61} = q \frac{(1 - a v_4^2)}{v_4(v_1^2 - v_4^2)^2}, \\
&\dots \dots \dots (39)
\end{aligned}$$

文 献

- (1) 林 毅編, 複合材料工学, (1979), 1262, 日科技連出版.
- (2) Elliott, H. A., *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 44 (1948), 522-533.
- (3) Hu Hai-chang, *Acta Scientia Sinica*, 11-2 (1953), 145-151.
- (4) Atumi, A. and Shindo, Y., *Int. J. Engng.*, 17 (1979), 1229-1236.
- (5) Pan, Y. C. & Chou, T. W., *J. Appl. Mech.*, 43 (1976), 608-612.
- (6) Pan, Y. C. & Chou, T. W., *Int. J. Engng Sci.*, 17 (1979), 545-551.
- (7) Pan, Y. C. & Chou, T. W., *J. Appl. Mech.*, 46 (1979), 551-556.
- (8) Falade, A., *Phil. Mag.*, A45 (1982), 791-802.
- (9) 石田・落合, 機論 A, 57-34 (1991), 322-327.
- (10) Yu, H. Y., Sanday, S. C. & Chang, C. I., *Proc. R. Soc. Lond.*, 444 (1994), 239-252.
- (11) Yu, H. Y. & Sanday, S. C., *Phil. Mag.*, A70 (1994), 725-738.
- (12) Martin L. Dunn, *Int. J. Engng Sci.*, 32-1 (1994), 119-131.
- (13) 長谷川・渡辺, 機論 A, 62-599 (1996-7), 1736-1740.
- (14) Yu, H. Y., Sanday, S. C., Rath, B. B. & Chang, C. I., *Proc. R. Soc. Lond.*, A449 (1995), 1-30.
- (15) 古口・大島・矢田, 機論 A, 56-521 (1991-1), 84-92.
- (16) Kelvin, Lord, *Cambridge and Dublin Math. J.*, (1848), *Mathematical and Physical papers, Cambridge Univ. Press*, 1 (1882).
- (17) Mindlin, R. D., *Physics*, (1936), 195-202.
- (18) Hetenyi, M. & Dundurs, J., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 29 (1962), 362-368.
- (19) Rongved, L., *Proc., 2nd Midwest Conf. Solid Mech.*, (1955), 1-13.
- (20) 古口・藤石・小林・矢田, 機論 A, 59-567 (1993-11), 2702-2708.
- (21) Kupradze, V. D., *Three-dimensional problem of elasticity and thermoelasticity*, (1979) 929, *North-Holland, Netherland*.
- (22) Nowacki, W. and Snedden, I. N., Editor, *Thermomechanics in solids*, (1977), *Springer Verlag, New York*.
- (23) Nowacki, W., *Thermoelasticity*, 2nd Edition, (1986) 566, *Pergamon Press Lond.*
- (24) Hetnarski, R. B., Editor, *Thermal Stresses I*, (1986) 547, *North-Holland, Netherland*.
- (25) Hetnarski, R. B., Editor, *Thermal Stresses II*, (1987) 441, *North-Holland, Netherland*.
- (26) Hetnarski, R. B., Editor, *Thermal Stresses III*, (1989), *North-Holland, Netherland*.
- (27) Mura, T., *Micromechanics of defects in solids*, 2nd Edn., (1987), *Dordrecht: Martinus-Nijhoff*.
- (28) 竹内著, 野田増補, 熱応力, (1989), 434, 日新出版.
- (29) Sharma, B., *J. Appl. Mech.*, 25-1 (1958), 86-88.
- (30) Sugano, Y., *Int. J. Engng Sci.*, 17 (1979), 927-939.
- (31) Noda, N. & Ashida, F., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 54 (1987), 854-860.
- (32) Noda, N., Ashida, F. & Tsuji, T., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 56 (1989), 791-797.
- (33) Birman, V., *Int. J. Engng Sci.*, 33-1 (1995), 95-103.
- (34) Mossakoska, Z. & Nowacki, W., *Arch. Mech. stas*, 4-10 (1958), 569-603.
- (35) 芦田・野田, 機論 A, 57-540 (1991-8), 1839-1846.