ベローズの内圧によるクリープ変形挙動解析*

月 森 和 之^{*1}

Creep Deformation Analyses of Bellows under Internal Pressure

Kazuyuki TSUKIMORI

The use of bellows expansion joints is an effective method to rationalize various piping systems in industry. In the structural design, the requirements for preventing failures such as ratchetting, fatigue, and buckling should be satisfied. The mechanisms of some failure modes of bellows are different from those of vessels and piping components. It is a particularly unique characteristic that bellows buckle under internal pressure. In the case of hightemperature operation, the possibility of creep buckling should be considered. The author has proposed an evaluation method for column-type creep buckling of bellows under internal pressure. In this study, the creep deformation behaviors of bellows are investigated using finite element nonlinear analyses and the validity of the evaluation method is discussed.

Key Words: Bellows, Pressure, Internal Pressure, Buckling, Creep, Creep Buckling, FEM

1. 緒 言

ベローズ継手は機器、配管引回しのコンパクト化等に有効な手段であり、産業界で幅広く利用されている。ベローズには、通常、圧力と変位がかかるが、設計に際しては、他の配管や容器と同様、ラチェット、疲労、座屈などの破損形態に対して十分な強度を有するように配慮されなければならない。

比較的山数の多いベローズが内圧によって特徴的なコラム形の座屈を生じることはよく知られており、関係する研究等も多い^{(1)~(5)}。高温で稼動するプラントなどクリープの影響が無視できない領域でベローズが使用される場合、一定の内圧下でクリープ変形が促進される可能性がある。月森は、クリープ式に Norton 則を用い、子午線方向曲げ応力が支配的であると仮定し、ベローズ形状を忠実に扱って、内圧によるコラム形のクリープ座屈挙動の表式を理論的に求めている⁽⁶⁾。本報では、内圧によるベローズのクリープ変形挙動を有限要素法による詳細非線形解析によって分析するとともに、上述の理論式による評価結果と比較し

てその有用性を論じる。

2. ベローズのコラム形変形に関する考察

詳細有限要素解析の前に、解析の対象であるベローズのコラム形変形について若干考察しておきたい。

既報⁽⁶⁾の理論展開では、ベローズの初期のたわみがクリープによって進行することによって座屈に至る。また、理論展開の容易さから、初期たわみ形状は中央に関して対称で、中央と端部でたわみ角零、かつ中央と端部のあいだで1箇所変曲点を有すると仮定している。さらに、中央と端部の中点で変曲点を有する場合、端部から中央のたわみ形状はこの点に関して反対称となる。このときのたわみ形状は、初期たわみなしの両端固定ベローズの最低次の内圧座屈モードと一致すると考えられる。そこで本解析では、まず内圧による正規化された座屈固有モードを求め、これを初期最大たわみでスケーリングしたものを初期解析モデルとして一定の内圧を負荷したのち、保持する。なお、内圧を負荷する段階でベローズは変形してたわむが、内圧負荷後の全たわみをクリープ変形解析の初期たわみとする。この内圧負荷による変形も含めた初期たわみは、あまり大きくなければ理論的に簡単に評価できる(付

* 原稿受付 1997 年 1 月 8 日。

^{*1} 正員、動力炉・核燃料開発事業団大洗工学センター (〒311-13 茨城県東茨城郡大洗町成田町 4002)。

録参照)。

図1に上述のベローズのコラム変形を1/2長さについて模式的に示す。

図中、 L 、 d_p はベローズ両端の距離(近似的にはベローズ長さ)とピッチ径である。 w 、 θ 、 R 、 R_i 、 R_o は、それぞれ中央たわみ、変曲点でのたわみ角、ベローズ中心軸およびピッチ径位置での内側、外側の曲率半径を示す。既報⁽⁶⁾の理論展開においてクリープ変形は上述の境界条件等を維持しながら進行すると仮定しているが、ベローズの内圧による変形のメカニズムにかんがみると妥当と考えられる。ただし、通常のはり理論に基づいた定式化を行っているので、曲率が大きくなると正解から外れてくることが予想される。また、当然のことながら、たわみの増大に伴い、圧縮側でベローズのコンボリユーション同士が接触するような事態は考慮されていない。一般には、このような過大な変形を許容することはない。

図1の幾何学的な関係から、

$$R \sin \theta = \frac{L}{4}, \left(\theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 θ が $1/2\pi$ を超える場合、たわみ形状が Ω 状になるので除外した。この式を用いると、最大たわみは、次式で表される。

$$w = 2R \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{4R} \right)^2} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

なお、 $\theta = 1/2\pi$ のとき、 $w = L/2$ となる。

次に、圧縮側でベローズのコンボリユーション同士が接触する条件を考える。板厚や内圧によるコンボリユーションの膨らみを無視すると、U字形コンボリユーションの場合、ベローズのピッチが圧縮変形によって、もとの1/2になった時点で接触したとみなせる。つまり、

$$R_i \theta = \left(R - \frac{d_p}{2} \right) \theta = \frac{L}{8} \dots \dots \dots (3)$$

ここで、 $\sin \theta \approx \theta$ を仮定すると式(1)と式(3)から、

$$R \approx d_p \dots \dots \dots (4)$$

Fig. 1 Column type deformation of 1/2 bellows

となり、式(2)は、

$$w = \frac{L^2}{8d_p \left\{ 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{L}{4d_p} \right)^2} \right\}} \dots \dots \dots (5)$$

なお、式(1)、式(3)から、 $\theta = 1/2\pi$ として長さとピッチ径の関係を求めると、 $L/d_p \approx 2.93$ となり、この値を超える細長いベローズでは、中央がU字状にたわんだ状態でもコンボリユーションの接触は生じないことになる。

さらに、仮想的に極限的な状態として曲率半径 R_i が零の場合を考える。式(3)の右辺を零とおくと式(2)は次式のようになる。

$$w = \frac{L^2}{4d_p \left\{ 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{L}{2d_p} \right)^2} \right\}}, (L \leq d_p) \dots \dots \dots (6)$$

以下の解析結果の評価においては、式(5)で表される、隣接するコンボリユーションが近似的に接触を生じるたわみを対象とするベローズのクリープ変形の上限とみなす。

3. 有限要素法による詳細解析

3.1 問題の設定 解析するベローズの仕様等は次のとおりである。

(1) 形状・寸法

- ・ピッチ： $q = 50$ mm
- ・山 高： $H = 60$ mm
- ・板 厚： $h = 1.935$ mm
- ・ピッチ径： $d_p = 1\ 160$ mm
- ・山 数： $N = 20/40$

(2) 材料特性

- ・ヤング率： $E = 1.506 \times 10^5$ MPa
- ・ポアソン比： $\nu = 0.310$
- ・Norton則パラメータ： (n, k) (表1参照)

$$\dot{\epsilon} = k \sigma^n, \quad \dot{\epsilon} [1/h], \quad \sigma [\text{MPa}]$$

(3) 荷重条件等

- ・保持内圧： p (表1参照)
- ・初期たわみ： δ_i (表1参照)

後述のFEM解析において、形状不整をたわみで15 mmとして所定の圧力を負荷して求めた、保持を開始する時点でのたわみ。

解析ケースの一覧を既報⁽⁶⁾の方法によって求めた座屈時間 t_{cr} とともに表1に示す。

3.2 解析モデル等 変形追従形荷重を考慮した大変形解析によってベローズの内圧保持中のクリープ変形挙動を解析する。まず座屈固有値解析によって得られた一次のモード形状から最大たわみ15 mmの形状不整モデルを作る。このモデルに表1に示す内圧を

静的に負荷して初期たわみを求めるとともに、その状態で保持してクリープ解析を行う。以下に主な仕様を記す。

- (1) 使用プログラム：FINAS(v. 13.0)
- (2) 使用要素：4 節点四辺形シェル低減積分要素 (QFLA 4 RT)
- (3) 要素分割モデル：対称性から 1/4 モデル(1/2 長さ, 180° モデル)とする。
 - ・子午線方向：30 分割/山(端部直線は 5 分割)
 - ・周方向：12 分割(15° ピッチ)
- (4) 境界条件：端部は完全拘束。
- (5) 計算機：富士通 VPP-300 1 プロセッサ。

3・3 解析結果 ペローズの変形形状と時間・たわみ関係について解析結果を示す。

(1) ペローズの変形 図 2 に case 4-1 ($N=40$) の初期形状と保持によってクリープ変形が進行した後の形状を対比して示す。保持中にコラム形座屈の変形が進行していったことがわかる。また、軸心のたわみ形状については、既報⁽⁶⁾の定式化における仮定とほぼ符合することがわかる。

(2) 時間とたわみの関係 図 3(a)-(d)に各ケースについて有限要素解析から得られた時間と中央のたわみの関係を示す。図 3 には、既報⁽⁶⁾の理論にしたがって得られた結果と式(5)によるコンボリューション接触推定時点のたわみも示している。有限要素解と理論解を比較すると、初期において前者の変形速度が若干大きい、次第に後者が卓越し、たわみ量は逆転する傾向が観られる。有限要素解の変形の増加率はその後安定する傾向を呈し、理論解で求められるような座屈時間は得られない。なお、本有限要素解析では接触までは考慮していないため、接触が生じたと目される時間以降は実際の挙動とは若干異なることが予想される。

Table 1 Parameters of analysis cases

No.	N	p (MPa)	δ i (mm)	n	k ($\times 10^{-11}$)	tcr ($\times 10^3$ hr)
1-1	20	0.294	17.6	2.05	7.76	6.74
1-2	20	0.294	17.6	1.0	85.2	∞
1-3	20	0.294	17.6	3.05	0.791	0.612
1-4	20	0.294	17.6	2.05	3.85	13.6
2-1	20	0.490	19.8	2.05	7.76	2.09
2-2	20	0.490	19.8	1.0	85.2	∞
3-1	40	0.196	24.7	2.05	7.76	2.71
4-1	40	0.294	36.4	2.05	7.76	0.785

4. 考 察

4・1 時間とたわみの関係 時間とたわみの関係についての有限要素解と理論解の比較において、前者はある時間経過すると変形速度が鈍化すること、保持初期においては前者の変形速度が若干上回る傾向があることを指摘した。第一点については、理論のほうは微小変形はり理論に基づいた定式化を行っているために曲率が大きくなると正解から外れてくることによると考えられる。一方、有限要素法による大変形解析では刻々と座標を更新しながら変形を追いかけるので曲率が大きくなっても問題ない。このような両者の傾向は、図 4(付録)に示されるように静的に内圧を負荷していく場合にも観られる。

第二の点については、理論でははじめからクリープによって定常化した板厚断面内の応力分布を仮定して

FINAS

BELLOWS 1/4 MODEL CASE 4

(a) Initial shape

FINAS

BELLOWS 1/4 MODEL CASE 6 (40M.) 1080HR

(b) Deformed shape

Fig. 2 Creep deformation of bellows (case 4-1, $N=40$)

(a) Case 1-1 ~ 4

(b) Case 2-1, 2

(c) Case 3-1

(d) Case 4-1

Fig. 3 Time vs $W_{\max}$

いるのに対して、有限要素解のほうは保持開始時は線形の弾性応力分布であり、時間とともにクリープが卓越する非線形の応力分布に移行することによって考えられる。有限要素解のこのような初期の過渡的な領域では内外表面にはじめから高い応力が存在するので応力再配分により変形が速やかに進行するものと推察される。このことは、保持中の応力分布が線形となる $n=1.0$ の case1-2, case2-2 の場合、保持初期において両者の差異が現れていないことから裏付けられる。

4・2 クリープ時間について 有限要素解からはいわゆるクリープ座屈時間に当たるものは求められなかった。しかしながら変形は着実に進行しており、実用上はなんらかの歯止めが必要である。表2は、簡単のため式(5)で与えられるコンボリューション接触の変位で各ケースの時間を有限要素解(t_{FEM})、理論解(t_{Th})について評価したものである。なお、右の欄は理論によるクリープ座屈時間(t_{cr})である。 t_{FEM}/t_{cr} はほぼ1から2程度であり、使用時間がある指標のもとに、オーダ的あるいは相対的に測るうえでクリープ座屈時間(t_{cr})は有効であると考えられる。

4・3 計算時間 表3に有限要素解析に要した計算時間を示す。使用計算機は富士通 VPP-300 である。20山ペローズで1ステップ当たり約200s、40山では約400sである。詳細な挙動解析が可能であるも

Table 2 Comparison of critical times

No.	t_{FEM} ($\times 10^3$ hr)	t_{FEM}/t_{cr}	t_{Th} ($\times 10^3$ hr)	t_{Th}/t_{cr}	t_{cr} ($\times 10^3$ hr)
1-1	9.0	1.3	4.7	0.70	6.74
1-3	1.2	2.0	0.47	0.77	0.612
1-4	18.	1.3	9.4	0.69	13.6
2-1	2.0	0.96	1.4	0.67	2.09
3-1	3.1	1.1	2.4	0.89	2.71
4-1	0.63	0.80	0.67	0.85	0.785

Table 3 CPU time

No.	No. of unknown DOF	Total CPU ($\times 10^4$ sec)	No. of steps	CPU/step (sec)
1-1	21923	7.066	356	198.5
1-2	21923	4.052	206	196.7
1-3	21923	21.49	1068	201.2
1-4	21923	5.564	281	198.0
2-1	21923	5.797	293	197.8
2-2	21923	5.108	259	197.2
3-1	43523	6.664	170	392.0
4-1	43523	6.166	139	443.6

の、相当な計算コストを要する。設計サーベイ等では、本報で比較した理論的な評価法など計算時間をほとんど要しない手法と組合せて効率化を図るのが得策と考えられる。

5. 結 言

ペローズの内圧によるクリープ変形挙動について、有限要素法による詳細解析を実施するとともに、既報⁽⁶⁾による評価結果と比較・分析し、以下の結論を得た。

(1) 弾性クリープ大変形解析の場合、既報⁽⁶⁾の評価に比べて保持初期において比較的速やかに変形が進行するが次第に後者が卓越し、顕著な座屈は呈しなかった。

(2) 既報⁽⁶⁾による評価は、広い範囲で有限要素解と一致するとは言えないが、解析した各ケースを相対的に評価するうえでは有限要素解とよく符合した。

(3) 許容される保持時間を量るうえで、一例としてコンポリューションの接触を条件として、推定されるたわみから、各ケースについて保持時間を評価した結果、既報⁽⁶⁾による座屈時間の約1~2倍となった。このことからなんらかの指標で許容される保持時間をオーダ的に簡易に評価するうえで既報⁽⁶⁾による座屈時間は有効である。

(4) 有限要素法による解析は詳細挙動について評価できるものの、かなりの計算時間を要する。設計サーベイ等では、(3)の点も踏まえて簡便な評価手法と組合せて効率化を図るのが得策である。

付 録

軸心の初期たわみを有する弾性ペローズの内圧によるたわみを求める。釣合いを表す微分方程式は文献⁽³⁾を参考にすると次式で与えられることがわかる。

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} + \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \cdots \cdots (7 \cdot a)$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi r^2 L^2}{EI} p \quad \cdots \cdots (7 \cdot b)$$

ここで、 w_1 , w , x はそれぞれペローズの変形による正味のたわみ、全たわみおよび軸方向座標である。また、 r , L , E , I はそれぞれペローズのピッチ半径、有効長さ、ヤング率および断面二次モーメントである。 p は内圧である。

初期のたわみを w_0 とすると、

$$w_1(x) = w(x) - w_0(x) \quad \cdots \cdots (8)$$

式(8)を用いると、式(7)は、

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^4 w_0}{dx^4} \quad \cdots \cdots (9)$$

この式を2回積分すると、

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 w = \frac{d^2 w_0}{dx^2} + C_1 x + C_2 \quad \cdots \cdots (10)$$

ここで、 C_1 , C_2 は積分定数である。この式は2階の非同次微分方程式であるから、解は同次式の一般解と非同次式の特解の和となる。それぞれを $\tilde{w}$, $\tilde{\tilde{w}}$ で表すと、

$$\tilde{w} = A \sin \frac{\lambda x}{L} + B \cos \frac{\lambda x}{L} \quad \cdots \cdots (11 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{w}} = & \frac{L}{\lambda} \left\{ \sin \frac{\lambda x}{L} \int \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + C_1 x + C_2 \right) \cos \frac{\lambda x}{L} dx \right. \\ & \left. - \cos \frac{\lambda x}{L} \int \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + C_1 x + C_2 \right) \sin \frac{\lambda x}{L} dx \right\} \\ & \cdots \cdots (11 \cdot b) \end{aligned}$$

初期たわみとして、端部および中央でたわみ角零、端部から $1/4L$ で変曲し、しかも中央のたわみ w_{m0} の $1/2$ となる次の関数を採用する。

$$w_0(x) = w_{m0} \sin^2 \frac{\pi x}{L} \quad \cdots \cdots (12)$$

式(11)に式(12)を用いると、

$$\begin{aligned} w(x) = & A \sin \frac{\lambda x}{L} + B \cos \frac{\lambda x}{L} + C_1 x + C_2 \\ & + \frac{w_{m0}}{2} \frac{\mu}{1-\mu} \cos \frac{2\pi x}{L} \quad \cdots \cdots (13 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\mu = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \quad \cdots \cdots (13 \cdot b)$$

上式を両端固定(端部でたわみおよびたわみ角零)の条件で解くと、

$$w(x) = \frac{w_{m0}}{1 - \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2} \frac{1 - \cos \frac{2\pi x}{L}}{2} \quad \cdots \cdots (14)$$

ここで、式(7・b)の λ は次のように表される。

$$\lambda^2 = \frac{2\pi N^2 q}{f_{iu}} \left(1 + \frac{2H}{d_p} \right) p \quad \cdots \cdots (15)$$

N , q , H , d_p , f_{iu} はそれぞれペローズの山数、ピッチ、山高、ピッチ径およびひと山当たりの軸方向ばね定数である。

たわみが最大となる中央での値は、

$$w_{\max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{w_{m0}}{1 - \frac{N^2 q}{2\pi f_{iu}} \left(1 + \frac{2H}{d_p} \right) p} \quad \cdots \cdots (16)$$

計算例 本文中で扱ったペローズと同じ条件で最大たわみを計算する。ただし、初期たわみ関数についてはFEMが一次の座屈モードに基づいて設定しており、式(12)と厳密に一致しているとはいえない。

$$q = 50 \text{ [mm]}, H = 60 \text{ [mm]}, d_p = 1\,160 \text{ [mm]}$$

$$l_p = 1.935 \text{ [mm]}, C_f = 1.55$$

Fig. 4 Normalized pressure vs $w_{\max}$

$$E = 1.506 \times 10^5 \text{ [MPa]}$$

$$f_{iu} = 1.7 \frac{d_p E t_p^3}{H^3 C_f} = 6.422 \times 10^6 \text{ [N/mm]}$$

$$\frac{w_{\max}}{w_{m0}} = \frac{1}{1 - p/p_b}, \quad p_b = \frac{7.30 \times 10^2}{N^2} \text{ [MPa]}$$

ここで,

$$w_{m0} = 15.0 \text{ [mm]}, \quad N = 20, \quad p_b = 1.825 \text{ [MPa]}$$

とした場合の式(16)とFEM解の比較を図4に示す。
横軸は p_b で無次元化した圧力, 最大たわみである。

文 献

- (1) Haringx, J. A., The Instability of Bellows Subjected to Internal Pressure, *Phillips Research Report*, **7** (1952), 189-196.
- (2) *Standard of the Expansion Joint Manufacturers Association*, 5th ed., (1980), Inc. (EJMA).
- (3) Tsukimori, K., ほか4名, A Simplified Analysis Method for Buckling of Bellows under Internal Pressure and its Validation Tests, *Pressure Vessel Technol.*, **1** (1988), 663-670.
- (4) Tsukimori, K. and Iwata, K., The Buckling Behavior of U-Shaped Bellows under Pressure Loads, *Int. J. Pres. Ves. Piping*, **44** (1990), 365-380.
- (5) Iwata, K., Tsukimori, K. and Kubo, F., A Symmetric Load-Stiffness Matrix for Buckling Analysis of Shell Structures under Pressure Loads, *Int. J. Pres. Ves. Piping*, **45** (1991), 101-120.
- (6) 月森和之, ベローズの内圧クリープ座屈評価法の提案(理論展開と定式化), *機論*, **62** 596, A (1996), 1071-1077.