ホモロジー群による位相の表現とその構造最適化への応用*

(第 1 報, 抽象的な図形問題を例題としたホモロジー理論応用の可能性に関する検証)

中 西 康 彦^{*1}

Representation of Topology Using Homology Groups and its Application to Structural Optimization (1st Report, Verification of Applicability of Homology Theory in Abstract Problem of Closed Surface)

Yasuhiko NAKANISHI

In this paper, application of the homology theory, which is a field of mathematics concerned with topology, to structural optimization is attempted. A homology group, which is one of the Abelian groups, can represent the topology of a structure in a standardized way; that is, the canonical direct sum decomposition. Therefore, topological information of a structure can be described in the formulation using homology groups. An abstract combination problem of triangular elements is chosen as a numerical example to verify the generality of this method using the homology theory. Several of the triangular elements are combined into a structure. Under the topological constraint condition represented by homology groups, a structure which has the minimum sum of numbers of triangular elements, its sides, and its vertices, is found by genetic algorithm. Furthermore, homology groups are utilized to describe the fitness function in the genetic algorithm as another example.

Key Words: Optimum Design, Computational Mechanics, Numerical Analysis, Homology Group, Group of Cycles, Genetic Algorithm, Topology, Elementary Divisors

1. 緒 言

同じ位相(トポロジー)を有する構造が複数存在するとき、位相幾何学の用語ではそれらの位相空間の間に同相写像が存在するという。構造最適化の分野では従来、寸法や形状の最適化が中心であったので、同相写像の有無を考慮することは無意味であった。しかし優れた構造位相の最適化手法⁽¹⁾が種々提案されている近年においても、最適化の過程で現れる構造位相に対して同相写像を調べる、あるいは定式中に位相を陽に表記するなど、位相幾何学を直接応用する手法は極めて稀である。構造最適化問題に位相幾何学を応用する利点は現在のところ未知ではあるが、例えば最適な構造位相の必要条件が工学的見地から既知である場合、あるいは構造位相に対して設計上の制約が要求される場合など、それらの条件を位相制約条件として設定する応用例が挙げられる^{(2)~(4)}。

本報では位相幾何学の一分野である単体的ホモロジー理論^{(5)~(7)}(以降 ホモロジー理論と略す)に着目し、この理論が構造位相の最適化問題に適用可能であることを検証する。また数値計算例には、ホモロジー群を応用する本手法の一般性を示す

ため、意図的に抽象的な図形問題を取り上げる。複数の位相空間の間に同相写像の存在を示すことは一般に困難なので、ホモロジー理論では構造を単体的複体と呼ばれる有限要素の集合とみなし、同型写像の存在を示す方法が使われる。したがって有限要素解析が頻繁に利用される構造最適化の分野に対しては、位相幾何学の中でホモロジー理論が最も応用し易いと考えられる。またホモロジー理論の応用には構造位相をホモロジー群で統一的に記述可能であるという利点がある。本報の数値計算例では三角形要素を数個使用し、その頂点や辺を張り合わせて作られる構造を対象とする。ホモロジー群で表される位相制約条件の下、遺伝的アルゴリズム(genetic algorithm: GA)⁽⁸⁾により三角形要素とその辺および頂点の個数の総和を最小化する。以降、本報ではこの図形問題を三角形要素の組合せ問題と呼ぶこととする。またホモロジー群の応用が位相制約に限定されないことを示すため、ホモロジー群を評価関数に用いる例題も取り上げる。本手法を用いたラーメン構造の位相最適化など、より具体的な例題は次報で取り扱う。GA による位相最適化では、支持点と荷重点が連結されていない構造など、有限要素解析による評価値の算出が困難な構造が最適化の過程において多発する場合がある。次報ではこのような構造を無視せずにホモロジー群により評価値を与えることで、最適構造が得られる確率の向上を試みる。

* 原稿受付 1997 年 1 月 20 日。

^{*1} 正員、豊橋技術科学大学(〒441 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘 1-1)。

2. ホモロジー理論の概要

位相幾何学の起源は L. Euler が 1736 年に解が存在しないことを証明したケーニヒスベルグの橋渡りの問題であると一般にいられている。一方、ホモロジー理論は 1895 年 H. Poincaré により始められ、1930 年代にその基礎がほぼ完成している⁽⁹⁾。本章ではそのホモロジー理論の概要を簡単に述べる。

ホモロジー理論では単体の集合である単体的複体と呼ばれる構造を対象とする。単体は厳密には、ユークリッド単体⁽⁵⁾と抽象単体に分けられる。r 次元ユークリッド単体はユークリッド空間において次式を満たす点 a の集合である。

$$a = \lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1 + \cdots + \lambda^r a_r \quad (1)$$

ただし $\lambda^0 + \lambda^1 + \cdots + \lambda^r = 1$ かつ $\lambda^0 \geq 0, \lambda^1 \geq 0, \dots, \lambda^r \geq 0$ である。また a_i ($i = 0, \dots, r$) は独立な点であり、上式は r 次元ユークリッド単体が点 a_i を含む最小の凸集合であることを表す。すなわち 0, 1, 2 および 3 次元のユークリッド単体はそれぞれ点, 線分, 三角形および四面体に相当する。またユークリッド単体の集合 K が以下の 2 条件を満足するとき, K をユークリッド複体という。(1) K に属するユークリッド単体の任意の辺もまた K に属する。(2) K に属する 2 つのユークリッド単体の交わりが存在するとき, その交わりは 2 つのユークリッド単体に共通な辺であり, かつ K に属する。

以上がユークリッド単体とユークリッド複体の定義であるが、ホモロジー理論のように代数的理論で位相を取り扱う場合、単体がユークリッド空間内の凸集合であるというような幾何学的性質は不必要である。抽象単体、抽象複体はユークリッド単体、ユークリッド複体から頂点 a_i の組合せの情報のみを抽出した単体、複体である。また頂点の順序も考慮に入れた r 次元抽象単体 x^r を向き付けられた単体といい、次式で表す。

$$x^r = (a_0, a_1, \dots, a_r) \quad (2)$$

本報では以降、向き付けられた r 次元抽象単体を r-単体、抽象複体を複体と略す。

複体 K に属する m 個の r-単体を生成元とする自由アーベル群を K の r 次元鎖群 $C_r(K)$ という。その元である r-鎖 c^r は次式で表される。

$$c^r = t^1 x_1^r + t^2 x_2^r + \cdots + t^m x_m^r \quad (3)$$

ただし t^i ($i = 1, \dots, m$) は整数の係数、 x^r の右下の添字は m 個の x^r に割り付けられた番号である。次の二式で定められる準同型写像 $\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$ は境界作用素と呼ばれる。

$$\partial_r c^r = \sum_{i=0}^m t^i (\partial_r x_i^r) \quad (4)$$

$$\partial_r x^r = \sum_{i=0}^r (-1)^i (a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_r) \quad (5)$$

ただし $\hat{a}_i$ は頂点 a_i が欠けていることを表す。この境界作用素 ∂_r のカーネル $\text{Ker } \partial_r$ を r 次元輪体群 $Z_r(K)$ 、その元を r-輪

Fig. 1 Example of structure consisting of triangular elements

Fig. 2 Triangular element divided into 2-simplexes

体という。また境界作用素 ∂_{r+1} のイメージ $\text{Im } \partial_{r+1}$ を r 次元境界輪体群 $B_r(K)$ 、その元を境界 r-輪体という。

r 次元鎖群 $C_r(K)$ は自由アーベル群であるから、その部分群である r 次元輪体群 $Z_r(K)$ も自由アーベル群である。さらに $Z_r(K)$ の部分群である r 次元境界輪体群 $B_r(K)$ は正規、すなわち $Z_r(K)$ の任意の元 z に対して $z + B_r(K) = B_r(K) + z$ が成立する。ここで r-輪体 z_1 と z_2 に対して同値関係 $\sim$ を

$$z_1 \sim z_2 \iff z_1 - z_2 \in B_r(K) \quad (6)$$

と定義する。この同値関係を満足する z_1 と z_2 はホモログであるという。また z_1 とホモログである r-輪体の全体、すなわち z_1 の同値類を $[z_1]$ と書き、ホモロジー類という。r 次元境界輪体群 $B_r(K)$ は先に述べたように正規部分群であるから集合 $\{[z] | z \in Z_r(K)\}$ も群である。この群を r 次元ホモロジー群 $H_r(K)$ といい、次式で表す。

$$H_r(K) = Z_r(K) / B_r(K) \quad (7)$$

すなわちホモロジー群 $H_r(K)$ は r 次元輪体群 $Z_r(K)$ の r 次元境界輪体群 $B_r(K)$ による剰余群であり、ホモロジー類は r-輪体の剰余類である。一般に有限生成アーベル群は標準直和分解で書き表すことができるので、有限個の単体から構成される複体のホモロジー群も下記の標準直和分解による表記が可能である。

$$H_r(K) \cong Z \oplus Z \oplus \cdots \oplus Z \oplus Z_{\gamma_1} \oplus Z_{\gamma_2} \oplus \cdots \oplus Z_{\gamma_t} \quad (8)$$

ここで Z は整数の加法群、 γ_i ($i = 1, \dots, t$) は 2 以上の整数である。また $\gamma_i Z = \{ \gamma_i j | j \in Z \}$ とおくと、 Z_{γ_i} は $Z / \gamma_i Z$ であり、これを Z の法 γ_i の剰余群という。 Z の個数は $H_r(K)$ の階数を、 γ_i は $H_r(K)$ のねじれ係数を表す。ただし $2 \leq \gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_t$ 、かつ $\gamma_j | \gamma_{j+1}$ ($j = 1, \dots, t-1$) (ここでの $|$ は割り切れることを表す数学記号) を満足する。標準直和分解を用いると 1 つ

Fig. 3 Example of string decoded to structure

のホモロジー群 $H_r(K)$ に対して, その階数とねじれ係数は一意に定まる. したがって同じ階数と同じねじれ係数をもつホモロジー群は全て同型である. 本報では構造位相を上記のホモロジー群により表記し, 位相制約条件を標準直和分解の形で与える.

3. 問題の設定

本報で対象とする構造は, 図1に例示するように個々に分離している三角形要素をその頂点や辺を同一視することによって張り合わせて作られる構造とする. ただし, 各三角形要素はゴム膜のように伸縮・曲げ・ねじりなど自由に変形可能とする. すなわち本報では構造の幾何学的な形状は無視して, 位相のみに注目する. ただし同一の三角形要素に属する2辺を同一視することは不可能との規則を設ける.

制約条件は位相に関する条件のみとし, ホモロジー群を用いて記述する. ある構造のホモロジー群を求めるには, その構造を単体的複体に置き換える必要がある. 本報では図2に示すように1個の三角形要素を19個の2-単体に細分することとする. この細分により同一の2-単体に属する1-単体や0-単体の同一視を回避して, 単体の定義を満たす. 位相制約条件式は単体的複体を K として次の二式で表すこととする.

$$H_0(K) \cong Z \oplus Z \oplus \cdots \oplus Z \quad (Z \text{ は } M \text{ 個}) \quad (9)$$

$$H_1(K) \cong Z \oplus Z \oplus \cdots \oplus Z \oplus Z_{\gamma_1} \oplus Z_{\gamma_2} \oplus \cdots \oplus Z_{\gamma_t} \quad (Z \text{ は } N \text{ 個}) \quad (10)$$

ここで M, N はそれぞれ $H_0(K), H_1(K)$ の階数の指定値, t はねじれ係数の指定個数, $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ は $H_1(K)$ のねじれ係数の指定値である. 評価関数 F は0-単体, 1-単体および2-単体の個数の総和とし, 上記の位相制約条件下でGAにより最小化する. なお同一視された複数の頂点や辺は一体になったとみなす. よって三角形要素の個数が等しい構造に対しては頂点や辺の同一視の組合せが多い程, 高い評価値を得ることになる. 以下に評価関数 F を示す.

$$F = -(m_0 + m_1 + m_2 + c_1|M - b_0| + c_2|N - b_1| + G) \quad (11)$$

$$\text{ただし } G = \begin{cases} \sum_{i=1}^r c_2 |\gamma_i - \delta_i| & (r = t \text{ のとき}) \\ c_3 |r - t| & (r \neq t \text{ のとき}) \end{cases}$$

m_0, m_1 および m_2 はそれぞれ0-単体, 1-単体および2-単体の個数である. GAによる最適探索中には式(9), (10)の位相制約条件を満たさない構造が多数発生すると予想される. 式(11)の第4～第6項は位相制約条件を満たさない構造に対するペナルティー項である. b_0 および b_1 は0次元および1次元ホモロジー群の階数, r はねじれ係数の個数, $\delta_1, \dots, \delta_r$ はねじれ係数の値であり, これらの値と指定値の差が大きいほどペナルティー項の絶対値も大きくなる. なお c_1, c_2 および c_3 は係数であり, これらは, (1) ねじれ係数の個数, (2) ねじれ係数の値, (3) ホモロジー群の階数の順に重視し, $c_1 < c_2 < c_3$ の大小関係を満たす適切な正の実数とする. またGAでは一般に評価値を最大化するように評価関数を記述するので式(11)の右辺にマイナス符号を付してある.

4. GAにおけるコード

本報のGAに用いる染色体は主に同一視される頂点の組合せを表すこととする. これをデコードすることにより構造を得る. 同一視可能な頂点の組合せの数の上限を k 組として, 染色体上の各遺伝子を次のように定める. 染色体上の先頭の遺伝子座における対立遺伝子を1～ k の整数, $2 \sim 2 \times k + 1$ 番目の遺伝子を三角形要素に割り付けられた番号, $2 \times k + 2 \sim 4 \times k + 1$ 番目の遺伝子座における対立遺伝子を整数1, 2, 3 (各三角形要素毎に割り付けた頂点の番号) とする. 以下, 具体例として図3に示す染色体Aを挙げ, 説明する. まだ定義していない末尾 (染色体Aの右端) の遺伝子座を除くと, 染色体Aの遺伝子座は21個であるから頂点の組合せ数の上限 k は5組である. しかし先頭の遺伝子 (左端) が4なのでデコードの際に同一視される頂点は4組のみである. またI～IIIは三角形要素の番号であり, 染色体Aでは三角形要素I (左から2番目の遺伝子) の頂点1 (12番目の遺伝子) と三角形要素II (3番目の遺伝子) の頂点2 (13番目の遺伝子) が同一視される. 同様に三角形要素IIIの頂点1と三角形要素Iの頂点1, 三角形要素IIの頂点3と三角形要素Iの頂点2, 三角形要素IIの頂点3

と三角形要素 III の頂点 3 の 3 組が同一視される。5 組目の組合せも染色体 A から読みとれるが、先頭の遺伝子が 4 であるから 5 組目の同一視は行わない。

このように頂点の同一視を行うと両端の頂点が一致する複数の辺が現れる場合がある。そのときは原則としてそれらの辺を同一視することとする。染色体 A では三角形要素 I の頂点 1 と 2, 三角形要素 II の頂点 2 と 3, および三角形要素 III の頂点 1 と 3 を両端とする 3 本の辺が同一視され、1 本とみなされることになる。しかし、このコードを用いて GA を試行したところ、辺の同一視が頻繁に行われ、位相制約条件を満足する構造が極めて発生し難いことが分かった。そこで $4 \times k + 2$ 番目の遺伝子座を設けることとした。 $4 \times k + 2$ 番目の遺伝子を整数 ℓ ($1 \leq \ell \leq k$) とする。染色体のデコードにおいて $(i-1) \times \ell + 1$ から $i \times \ell$ 番目に同一視される頂点の組を第 i グループと名付ける。さらに同一グループに属す頂点の同一視によって両端の頂点が一致した辺のみを同一視する。この方法により同じ頂点を両端にも複数の辺の存在が許されることになる。染色体 A では $\ell=3$ (22 番目の遺伝子) であり、4 組目の頂点の組合せは第 2 グループに属すので、前述の 3 辺の内、三角形要素 III の辺は他の 2 辺と同一視しない。なお他の三角形要素に連結していない孤立した三角形要素は構造に無関係な要素とみなし、無視することとする。

5. ホモロジー群の算出方法

前章で提案した手法に従って染色体をデコードすると三角形要素を組み合わせた構造が得られる。本章ではその構造のホモロジー群を算出する方法について述べる。

まず構造を複体に置き直し、複体と境界作用素 ∂_1, ∂_2 により定められる行列 $[A_1], [A_2]$ を作る。複体を構成する 0-単体、1-単体および 2-単体の係数 (式 (3) における t^i に相当) を成分とするベクトルを各々 $\{n_0\}, \{n_1\}$ および $\{n_2\}$ とすると次式の関係が成り立つ。

$$[A_1]\{n_1\} = \{n_0\} \quad (12)$$

$$[A_2]\{n_2\} = \{n_1\} \quad (13)$$

$$[A_1][A_2] = [0] \quad (14)$$

ただし $[0]$ は全成分が零の行列である。式 (14) は境界作用素が $\partial_i \circ \partial_{i+1} = \{0\}$ ($i \geq 1$) という性質を有する特別な準同型写像であることを表す。行列 $[A_1], [A_2]$ に適切な単模基本変形を繰り返し施すと各行列の単因子が求められる⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。ここで単模基本変形とは次の (1)~(3) に示す行 (あるいは列) に関する演算である。(1) ある 2 つの行 (列) を交換する。(2) ある行 (列) に -1 を掛ける。(3) ある行 (列) を u 倍して別の行 (列) に加える。また、ある行列 $[A]$ の全ての i 次小行列式における最大公約数を d_i (ただし $d_0 = 1$) とおくと、単模基本変形により得られる単因子 e_i は $e_i = d_i/d_{i-1}$ ($i = 1, \dots, \text{rank}([A])$)

の関係を満たす整数になる。ここで $\text{rank}([A])$ は行列 $[A]$ の階数である。

この単因子の個数や値からホモロジー群の階数やねじれ係数が判明する。複体 K の 1 次元ホモロジー群 $H_1(K)$ のねじれ係数は行列 $[A_2]$ の単因子の中で、その値が 2 以上のものである。1 次元輪体群 $Z_1(K)$ は $\text{Ker } \partial_1$ であるから、1-輪体の係数は式 (12) において $\{n_0\} = \{0\}$ という条件を満足するベクトル $\{n_1\}$ の成分である。よって $Z_1(K)$ の階数は 1-単体の個数 m_1 を用いて $m_1 - \text{rank}([A_1])$ と表される⁽¹²⁾。また 1 次元境界輪体群 $B_1(K)$ は $\text{Im } \partial_2$ であるから、境界 1-輪体の係数は式 (13) において $\{n_2\}$ を任意のベクトルとするとときに得られるベクトル $\{n_1\}$ の成分である。よって $B_1(K)$ の階数は $\text{rank}([A_2])$ に一致する。 $H_1(K)$ の階数 b_1 は $Z_1(K)$ と $B_1(K)$ の階数の差であるから

$$b_1 = m_1 - \text{rank}([A_1]) - \text{rank}([A_2]) \quad (15)$$

で求められる。また $\text{rank}([A_1]), \text{rank}([A_2])$ は各行列における非零の単因子の個数に等しい。

一方、任意の 0-単体は全て 0-輪体であるから $Z_0(K) = C_0(K)$ であり、 $Z_0(K)$ の階数は 0-単体の個数 m_0 に等しい。 $B_0(K)$ は $\text{Im } \partial_1$ であるから、その階数は $\text{rank}([A_1])$ である。よって $H_0(K)$ の階数 b_0 は次式から算出される。

$$b_0 = m_0 - \text{rank}([A_1]) \quad (16)$$

6. 数値計算例

使用する三角形要素の上限を 4 個、同一視する頂点の組の上限 k を 10 組に設定する。したがって染色体の長さは 42 になる。また人口サイズは 890、突然変異の確率は各遺伝子座に対して 2.0 % とする。淘汰の際はランキングのみを参照し、エリート保存戦略を採用する。式 (11) の評価関数 F に含まれる係数 c_1, c_2, c_3 は各々 $10^4, 10^6, 10^8$ とする。本章に示す構造は、染色体の初期値を変えて GA を 30 回試行した中で最良の評価値を得た構造である。したがって、それらの構造が真の最適構造である保証はない。位相制約条件式は図 4 の左欄に示す 5 種類 (I~V) とする。以上の設定に従い、GA を実行した結果得られた構造を同図中 (A)~(I) に併記する。図中の各三角形は三角形要素を表す。三角形要素の頂点は○や●などの印で示してあり、同じ印の頂点を同一視する。辺には a, b, c などの文字と矢印が割り付けてあり、同じ文字の辺を矢印の向きを揃えて同一視する。次節以降、これらの構造の位相について考察する。

6.1 位相制約条件 I を満たす構造 図 4 に示す位相制約条件 I ($H_0(K) \cong Z, H_1(K) \cong Z \oplus Z_2$) を満足し、GA の試行 30 回中で最良の評価値 $F = -114$ を得た構造は同図中に示す構造 (A) および (B) の 2 種類であった。また図中の頻度の欄に示すように構造 (A) と (B) は 30 回の試行中、合計 21 回得

Topological constraint			Structure obtained by GA	Frequency	Fitness value
No.	$H_0(K)$	$H_1(K)$			
I	Z	$Z \oplus Z_2$	(A)	21/30	-114
			(B)
II	Z	Z_2	(C)	16/30	-115
III	Z	$Z \oplus Z_3$	(D)	20/30	-168
			(E)
IV	Z	Z_3	(F)	20/30	-169
V	Z	$Z_2 \oplus Z_2$	(G)	11/30	-223
			(H)
			(I)

Fig. 4 Structures obtained by genetic algorithm

Fig. 5 Process for constructing structure (A)

られた。これらの構造は全ての頂点が○印なので全頂点は同一点とみなされる。両構造における相違点は辺 a の矢印の向きのみである。構造 (A) の三角形要素を組み立てる手順を図5に示すが、これは一例であって組み立て方は唯一ではない。図5ではまず辺 b を同一視して四辺形(同図の左端)を、さらに辺 a を同一視して円筒(同図の中央)を作り、最後に辺 c を同一視している。この辺 c の同一視は3次元空間では不可能なので、無理に描いた図5では閉曲面が自身と交差している。この交差は本来構造 (A) に存在しないものである。この構造はクラインの壺と呼ばれる。同様に図6は構造 (B) の組み立て方の一例で

ある。この構造も3次元空間では組み立て不可能なので図中の辺 g および辺 h の同一視の際、閉曲面が自身と交差している。

構造 (A) と (B) における1次元境界輪体群 $B_1(K)$ はいずれも $Z \oplus \cdots \oplus Z \oplus 2Z$ の形をしており、 $2Z$ を含む。この $2Z$ が $H_1(K)$ のねじれ係数2を生み出す。図7に構造 (A) 上の $2Z$ に対応する境界1-輪体の一例を示す。図7の(1)~(6)は図5の左端の四辺形を表すが、図7では三角形要素だけではなく、それを構成する2-単体も示してある。全ての2-単体は反時計回りに向き付けられているとする。また白、薄い灰色および濃い灰色の三角形はそれぞれ係数が0, n および $-n$ の2-単体を表す。図7の(1)は薄い灰色(係数 n)の2-単体が1個存在する状態を示しており、矢印の付いた太い実線の三角形は、係数 n の2-単体に境界作用素 ∂_2 を作用して得られる境界1-輪体である。この境界1-輪体を構成する1-単体の係数の大きさも n になる。なお太い実線に付随する矢印は1-単体の向きを表す。同図中の(3)~(6)における α , β および γ は境界1-輪体上の0-単体であり、同じ文字の0-単体は同一点であるとする。 $2Z$ 対

Fig. 6 Process for constructing structure (B)

Fig. 7 Example of boundary cycle corresponding to $2Z$

Fig. 8 Process for constructing structure (C)

Fig. 9 Triangular elements of structure (D)
(Sides d have stuck together.)

応する境界 1-輪体は多数存在するが、閉曲面上に 1 本のループとして表すことが可能である。それは同図の (2)~(6) に示す手順でループ状の境界 1-輪体に囲まれる領域を拡大、すなわち (1) の境界 1-輪体を閉曲面上で滑らせながら輪ゴムのように押し広げることによって求められる。同図の (2)~(6) に示す 1-輪体はすべて (1) とホモログであり、かつ (1) が境界 1-輪体であるから (2)~(6) も境界 1-輪体である。例えば (1) の境界 1-輪体に隣接するある 2-単体に係数 n を与えて境界作用素 ∂_2 を作用するとループ状の新たな境界 1-輪体を得られる。さらにその新たな境界 1-輪体に隣接する 2-単体に同様の操作を施すと、また別の境界 1-輪体が生じる。この操作を繰り返すことでループの形を保ちながら (1) を (2) の境界 1-輪体へと移すことができる。ただし辺 c を介して隣接する 2-単体には、(3) に示すように係数 $-n$ を与える必要がある。(4) において領域 X を囲むループは、時計回りに向き付けられているので係数 n の 2-単体の領域が拡大するといずれ消滅する。一方 (5) にも領域 Y を囲むループが存在するが、折れ線 $\alpha-\alpha$ と $\beta-\beta$ の向きが同じであるから、係数が非零の 2-単体の領域を拡大しても折れ線は消滅せず、(6) に示す境界 1-輪体を形成する。(6) の係数は、(1) の 2-単体の係数が n ならば $2n$ に一意に定まる。この (6)

の境界 1-輪体が $2Z$ に相当する境界 1-輪体の一例である。つまり係数の大きさが n の境界 1-輪体で囲まれる領域を閉曲面上で拡大すると係数の大きさが $2n$ の境界 1-輪体が見える。仮に辺 c の向きを変えて、ねじれを除去するとこの閉曲面はトーラスになる。しかしトーラスにおける (6) のループは 1-輪体ではあるが、境界 1-輪体ではなくなる。

6.2 位相制約条件 II を満たす構造 位相制約条件 II ($H_0(K) \cong Z$, $H_1(K) \cong Z_2$) を満たし、GA を 30 回試行した中で最良の評価値 $F = -115$ を得た構造は図 4 中の構造 (C) 一種類のみであった。この構造は GA の試行 30 回中 16 回得られた。図 8 に組み立て方の一例を示す。これは射影平面と呼ばれ、構造 (A) や (B) と同様に 3 次元空間では組み立て不可能な構造である。図 8 は図 6 と似ているが、頂点の同一視の組合せが異なるので図 6 に見られるような球部中央の潰れが存在しない。よって位相制約条件 I と II の違いから、この球部の潰れが $H_1(K)$ の階数 1 を生み出していると推測される。

6.3 位相制約条件 III を満たす構造 位相制約条件 III ($H_0(K) \cong Z$, $H_1(K) \cong Z \oplus Z_3$) を満たす構造は図 4 中の構造 (D) および (E) の 2 種類存在し、評価値は $F = -168$ 、両構造

の得られた回数は30回中 合計20回であった。これらの構造は構造(A)~(C)と異なり、三角形要素を3個要する複雑な構造なので組み立て方の例示は困難である。しかし辺dを同一視するだけで、これらの構造の性質がある程度把握できる。図9に構造(D)の辺dを同一視した例を示す。どの三角形要素においても辺dを除く2辺は各々異なる三角形要素の辺とねじれた状態(構造(A)における辺cに似た状態)で同一視されることが分かる。構造(E)についても同じ事がいえる。また構造(D)あるいは(E)の三角形要素を構成する2-単体を図4において全て反時計回りに向き付け、かつ係数 n を割り当て、境界作用素 ∂_2 を作用すると辺dが係数 $3n$ を有する境界1-輪体になる。すなわち辺dは $3Z$ に相当する境界1-輪体の一つであることが分かる。

6.4 位相制約条件 IV を満たす構造 位相制約条件 IV ($H_0(K) \cong Z$, $H_1(K) \cong Z_3$) を満たす構造は30回のGAの試行中では図4中の構造(F)のみであった。この構造の評価値は $F = -169$ であり、30回中20回得られた。また構造(F)と(D)の相違点は、構造(B)と(C)の関係に似て、●で示された頂点の同一視のみである。

6.5 位相制約条件 V を満たす構造 位相制約条件 V ($H_0(K) \cong Z$, $H_1(K) \cong Z_2 \oplus Z_2$) を満たす構造は図4中の構造(G), (H) および(I)の3種類であった。これらの構造は4個の三角形要素を要し、その評価値は $F = -223$ 、得られた回数の合計は他の構造に比べてやや少なく、30回中11回であった。構造(G)に注目すると左半分の2個の三角形要素は構造(A)と同じクラインの壺を、右半分の2個の三角形要素は構造(C)と同じ射影平面を構成していることが分かる。クラインの壺を K_1 、射影平面を K_2 、構造(G)を K とおくと $H_1(K_1) \cong Z \oplus Z_2$, $H_1(K_2) \cong Z_2$ かつ $K = K_1 \cup K_2$ であるから、一見位相制約条件Vの $H_1(K) \cong Z_2 \oplus Z_2$ に反するように思える。しかし $H_2(K) = 0$ となるように K_1 と K_2 を張り合わせることで位相制約条件Vを満たす構造が存在し得る。これは次の簡約マイヤー・ビートリス完全系列⁽⁶⁾を用いて証明可能である。以下にこの完全系列の定義を略記する。

複体 K とその部分複体 K_1 , K_2 が $K = K_1 \cup K_2$ を満たすとき、簡約マイヤー・ビートリス完全系列

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \tilde{H}_r(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_r(K_1) \oplus \tilde{H}_r(K_2) \\ \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_r(K) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{r-1}(K_1 \cap K_2) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \quad (17)$$

が成り立つ。ここで i_* , j_* および ∂_* は準同型写像であり、 $[z] \in \tilde{H}_r(K_1 \cap K_2)$, $[z_1] \in \tilde{H}_r(K_1)$, $[z_2] \in \tilde{H}_r(K_2)$, $[z_3] \in \tilde{H}_r(K)$, $c_1 \in C_r(K_1)$ とおくと各写像は $i_*[z] = ([z], -[z])$, $j_*([z_1], [z_2]) = [z_1] + [z_2]$ および $\partial_*[z_3] = [\partial c_1]$ と表される。また簡約ホモロジー群はホモロジー群と以下の関係にある。

$$\begin{aligned} H_r(K) &= \tilde{H}_r(K), & r \neq 0 \\ H_0(K) &\cong \tilde{H}_0(K) \oplus Z \end{aligned} \quad (18)$$

なお、ある系列 $\cdots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$ が全ての n について $\text{Im } f_{n+1} = \text{Ker } f_n$ を満たすとき、この系列は完全であるという。

$H_2(K) = 0$ と仮定してクラインの壺 K_1 、射影平面 K_2 および構造(G)の K を上記の簡約マイヤー・ビートリス完全系列に当てはめると図式

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{i_*} Z \oplus Z_2 \oplus Z_2 \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_1(K) \longrightarrow 0 \quad (19)$$

が得られる。また準同型定理より次式の関係が成立する。

$$Z / \text{Ker } i_* \cong \text{Im } i_* \quad (20)$$

$$(Z \oplus Z_2 \oplus Z_2) / \text{Ker } j_* \cong \text{Im } j_* \quad (21)$$

図式(19)の完全性と式(20), (21)より

$$\text{Ker } j_* \cong Z \quad (22)$$

$$(Z \oplus Z_2 \oplus Z_2) / \text{Ker } j_* \cong \tilde{H}_1(K) \quad (23)$$

が得られる。よって $H_1(K)$ は $H_1(K) \cong Z_2 \oplus Z_2$ (位相制約条件Vを満たす位相)、あるいはねじれ係数を δ とおいて $H_1(K) \cong Z_\delta \oplus Z_2 \oplus Z_2$ の形になることが分かるが、いずれの場合も $H_1(K)$ の階数は零である。また $K_1 \cap K_2$ である辺dがループを成すことが $H_1(K)$ の階数を零にしていることも以上の諸式から読み取れる。

図4中の構造(H)は左半分が構造(B)と、右半分は構造(C)の射影平面と同じである。また構造(I)は左半分、右半分ともに射影平面であるが、この構造は構造(G)や(H)と異なり、2つの射影平面の共有する辺dがループ状ではない。よって構造(I)の簡約マイヤー・ビートリス完全系列は $0 \longrightarrow Z_2 \oplus Z_2 \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_1(K) \longrightarrow 0$ となり、 $H_1(K)$ は $H_1(K) \cong Z_2 \oplus Z_2$ であり、位相制約条件Vを満たすことが分かる。

なお以上の5種類の位相制約条件では $H_0(K)$ を同じ設定($H_0(K) \cong Z$)にしたが、別の制約を課すことも可能である。例として位相制約条件VI: $H_0(K) \cong Z \oplus Z$, $H_1(K) \cong Z_2$ を設定すると、球面と射影平面の2つの閉曲面が1組の構造として得られることを確認した。ただし、 $H_0(K)$ の階数は複体 K の連結成分の個数に等しいので、これらの閉曲面の間には、構造(G)~(I)に見られるような連結部(共有する辺)は存在しない。

7. ホモロジー群を評価関数に用いる例

本章では評価関数をホモロジー群で表記し、ホモロジー群の応用が位相制約条件式に限定されないことを示す。本章では位相制約条件は与えず、評価関数 F は次式とする。

$$F = \sum_{i=1}^t \gamma_i \quad (24)$$

上式は $H_1(K)$ の t 個のねじれ係数 γ_i の和であり、これをGAにより最大化する。本手法を工学上の具体的な最適化問題に応

Table 1 Results of maximization of torsion coefficients

Number of triangular elements	Number of couples of vertexes	Torsion coefficients ($\gamma_1, \gamma_2, \dots$)	Max. of fitness value
4	10	(2), (3), (2,2)	4
4	15	(2,2), (4)	4
4	20	(2,2), (4), (6)	6
5	20	(2,2), (4), (2,2,2), (6), (8)	8

用する場合は、この評価関数 F を最小化する方が有用であると考えられるが、本手法がねじれを多く含む複雑な位相をも取り扱い可能な一般性のある手法であることを確認するには、評価関数 F を最大化する方が有効であると判断した。なお三角形要素の個数の上限は表1の左端の列に、同一視される頂点の組数の上限 k は同表の2列目に示す値とする。上記以外の諸条件については前章と同じ設定とする。

式(24)の評価関数 F を用いて数値計算を行った結果を表1に併記する。同表の3列目はGAを30回試行した中で得られた構造のねじれ係数($\gamma_1, \gamma_2, \dots$)の全種類を、4列目は各条件下で得られた最良の評価値 F を表す。例えば同表の1行目は三角形要素を4個、頂点の同一視を $k=10$ 組に制限してGAを30回試行した結果、ねじれ係数が $\gamma_1 = 2$ の構造、 $\gamma_1 = 3$ の構造、 $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ の構造の計3種類が得られ、その中で最良の評価値 F が4であったことを示す。同表から三角形要素や頂点の同一視の上限 k が高いほど評価値 F も高くなる傾向にあることが分かる。また $\gamma_1 = 4$ の構造を得るには頂点の同一視が $k=10$ 組以下では不足であること、 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 2$ の構造は三角形要素を5個以上必要とすることなどが推測される。

表1の4行目に含まれる $\gamma_1 = 8$ の構造を図10に示す。同図に対して図7と同様の手法により8Zに相当する境界1-輪体を示すことができる。同図中の三角形要素を構成する2-単体を全て反時計回りに向き付け、三角形要素IIに含まれるある1個の2-単体の係数を n と定め、辺 d を境界1-輪体とみなすと、辺 d の係数は唯一 $8n$ に定まり、この構造が確かに $\gamma_1 = 8$ を有することが分かる。そのとき三角形要素I~Vに属する2-単体の係数はそれぞれ $-3n, n, 2n, 4n$ および $2n$ である。

8. 結 言

本報ではホモロジー理論がGAによる構造位相最適化に応用可能であることの検証を目的として、三角形要素の組合せ問題を取り扱った。数個の三角形要素を組み合わせて作られる構造を対象に、ホモロジー群で記述される種々の位相制約条件の下、GAにより三角形要素とその頂点および辺の個数の総和が最小の構造を求めた。さらにホモロジー群を位相制約条件以外に応用する例として、評価関数をホモロジー群で表し、ねじれ係数の総和が最大の構造を探索した。

Fig. 10 Structure which has torsion coefficient $\gamma_1 = 8$

本手法の特徴として、(1) ホモロジー群の応用により構造位相が定式中に容易に記述可能であること、(2) 対象とする構造の次元を限定せず、取り扱い可能な位相も広範であり(ねじれ係数も含めてホモロジー群で表現できる位相は全て網羅している)、一般性がある手法であること、(3) 構造の取り得る位相に対して、原構造や設計領域などの指定による制約がないこと、などが挙げられる。また数値計算例の結果として、(1) ホモロジー群を位相制約条件式、評価関数のどちらに使用しても良好な解が得られること、(2) ねじれ係数が含まれる複雑な位相制約条件下でもGAにより妥当な解が得られること、(3) 5個以下の少ない三角形要素で多様な構造位相が表現可能であること、が分かった。

以上により本報はGAによる構造位相最適化に対してホモロジー理論が応用可能であることを示唆したといえる。次報では、より具体的な例としてホモロジー理論をラーメン構造などの位相最適化に応用する予定である。

文 献

- (1) 例えば, Rozvany, G. I. N., *Optimization of Large Structural Systems*, Vol. 1, (1993), Kluwer Academic Publishers, 103-120.
- (2) 中西・中桐, 機論, **60**-577, A(1994), 2157-2162.
- (3) 中西・中桐, 機論, **61**-584, A(1995), 849-854.
- (4) 中西・中桐, 機論, **62**-596, A(1996), 1098-1103.
- (5) 河田 編, 位相幾何学, (1978), 岩波書店.
- (6) 瀬山, トポロジー: 柔らかな幾何学, (1991), 日本評論社.
- (7) Singer, I. M., Thorpe, J. A., 赤 監訳, トポロジーと幾何学, (1991), 培風館.
- (8) Goldberg, D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, (1989), Addison Wesley Publishing Company, Inc.
- (9) 例えば, 河田, 岩波講座基礎数学 ホモロジー代数 I, (1976), 岩波書店, 1-3.
- (10) 伊理, 岩波講座応用数学 I 線形代数 I, (1993), 岩波書店, 79-84.
- (11) 河田, 位相幾何学, (1978), 岩波書店, 106-110.
- (12) 半谷・川口, 形態解析, (1991), 培風館, 38-41.