せん断帯解析に見られる解析構造の矛盾点*

守 時 一^{*1}, 奥 山 栄 樹^{*1}

Inconsistency in the Structure of Analyses Proposed for Shear Banding

Hitoshi MORITOKI and Eiki OKUYAMA

Shear banding is considered as localized necking where multiple solutions can exist on the necking plane comprising the boundary between the shear band and its surroundings. Therefore, shear banding is identical with localized necking though it is investigated under plane strain. On the necking plane the discontinuity of velocity gradient can be permitted. Hill and Hutchinson [*J. Mech. Phys. Solids*, **23** (1975), 239-264] investigated shear band without considering the discontinuity, but their method is methodically equivalent to that which takes into account the discontinuity. In previously published analyses of shear banding, it is assumed that the regions separated by the necking plane keep contact each other during the onset of shear banding, and the equilibrium of forces is maintained on the plane. However, it is proven that this assumption cannot provide useful information for determining the deformation when shear banding begins to occur. Furthermore, the assumption does not allow the formation of a common boundary condition imposed on both regions separated by the necking plane. When shear banding occurs, the spin rate of the regions differs because of multiple solutions. The criterion for determining the occurrence of shear banding can be deduced by imposing a rigid spin to make the spin rates identical. It is found that this criterion agrees with one of the universal criteria obtained from considering the occurrence of multiple solutions under the common boundary condition on the surface of a body.

Key Words: Plasticity, Plastic Instability, Shear Band, Localized Necking, Ductile Fracture

1. 緒 言

速度こう配の不連続面が平行に 2 面隣接して存在していて、これら 2 面の不連続面で挟まれた幅の狭い領域をせん断帯と呼んでいる。せん断帯に関する研究は、増分的線形固体の引張変形における基本的な分岐問題として、Hill ら⁽¹⁾によって最初に解析が試みられた。そこでは、現実的には考え難いが、平面ひずみ引張りにおける解の分岐が論じられ、せん断面の形態が満足しなければならない形態特性式が提示された。その後、Hutchinson ら⁽²⁾はこれについてさらに考察を深めた。これらの解析では、形態特性式がだ円型から双曲型に移行する状態変化をせん断帯の発生規準としている。

せん断帯解析において共通して言えることは、構成式として

$$\dot{\sigma}_{ij} = K_{ijkl}^{-1} \dot{\epsilon}_{kl} \dots \dots \dots (1)$$

の形の関係を用いていることである。ここで、 $\dot{\sigma}_{ij}$ は Jaumann の応力速度を表す。しかし、塑性変形では、一般に

$$\dot{\epsilon}_{ij} = K_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \dots \dots \dots (2)$$

の形で表現された構成式が常用されていて、弾性変形を考慮しない場合には、この逆関係にある式(1)による表現は可能ではない、このようなことから、式(1)による構成式表現のもとでは、せん断帯解析の構造が不透明であり、このことは塑性変形における各種の分岐問題への適用にとって好ましいことではなかった。Hill らの研究の後、せん断帯の考察が種々なされているが、これらの解析構造は基本的には Hill らの手法を踏襲したものである。

せん断帯の解析では、せん断帯を挟む、速度こう配の不連続面の法線ベクトル $\mathbf{n}$ と速度こう配の不連続に関連したベクトル $\mathbf{g}$ との間に直交関係

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

を設定している。せん断帯の解析では、速度こう配の不連続面を境としてその両側領域における法線ベクトル $\mathbf{n}$ の時間変化に関して、さらに

$$\Delta \dot{\mathbf{n}} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

の条件を課している。ここで、 Δ はこれに続く物理量の、不連続面を挟む両側における差を表す。

板成形の問題における分岐現象に局所くびれの発生があるが、局所くびれの解析⁽³⁾では、式(3)の直交性は念頭に置いていない。式(4)の条件も意識的には課していない場合もある。せん断帯を挟む両側の領域と

* 原稿受付 1996 年 7 月 19 日。

*¹ 正員、秋田大学鉱山学部(〒010 秋田市手形学園町 1-1)。

せん断帯ととの間の不連続面は一对の形で考えられてはいるが、せん断帯の解析においても、これらを対として考察しているのではなく、どちらか一方についてのみ考察を行っている。このように、局所くびれの発生においてもせん断帯の発生においても、ともに速度こう配の不連続に注目し、これらの発生の可能性を考察している点に関しては変わりはない。強いて相違点を挙げれば、局所くびれの解析では式(3)で表される n , g の直交性を配慮していないことであろう。本論文では、塑性変形における局所的な分岐を対象とし、式(2)の形式の構成関係式を用いて、従来のせん断帯解析における基本的な構造を検討し、解析構造上の問題点を指摘するものである。

2. 基礎関係式

2・1 構成式 通常の塑性変形に対して適用されている構成式の表現は式(2)の形式であり、そこでは、塑性変形のみを対象としたとき、通常は式(1)の逆関係は得られない。そこで、本報では式(2)の表現形式の適用を検討する。さらに、応力速度依存性も考慮し、構成テンソルを

$$K_{ijkl} = kK_{ijkl}^p + (1-k)K_{ijkl}^N \quad \dots\dots\dots (5)$$

の和として表す。ここで、 K_{ijkl}^p は増分的線形固体における構成テンソル、 K_{ijkl}^N はレビー・ミーゼス形の構成テンソルである。 $k(0 \leq k \leq 1)$ はこれらへの依存度を表す比率である。土質材料、あるいはボイドを含む金属材料では、塑性変形の過程で体積変化を生じるので、これらの構成テンソルではこのことを配慮し、それぞれ

$$\begin{aligned} K_{ijkl}^p &= \frac{1}{2} K^p (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &\quad - \frac{1}{3} K^p (1-\alpha) \delta_{ij} \delta_{kl} \\ K_{ijkl}^N &= K^L \left(\sigma'_{ij} + \frac{1}{3} \beta \sigma_g \delta_{ij} \right) \\ &\quad \times \left(\sigma'_{kl} + \frac{1}{3} \gamma \sigma_g \delta_{kl} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

と表した。ここで、 K^p , K^L は塑性変形とともに変化する係数であり、 σ'_{ij} は偏差応力成分を、 σ_g は相当応力

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad \dots\dots\dots (7)$$

を表す。さらに、 α , β , γ は体積変化に関係する係数である。

増分的線形固体 K_{ijkl}^p に関して、 K^p と α は、 G , K をそれぞれ通常の横弾性係数、体積弾性係数とすると

き、

$$K^p = \frac{1}{2G}, \quad \alpha = \frac{2G}{3K} \quad \dots\dots\dots (8)$$

の関係にある。

レビー・ミーゼス形の構成関係 K_{ijkl}^N に関して、例えば、古典的なモール・クーロン構成式を考えると、 h を加工硬化を表す塑性係数として

$$h \dot{\epsilon}_g = \dot{\sigma}_g + \mu \dot{\sigma}, \quad \dot{\epsilon} = \delta \dot{\epsilon}_g \quad \dots\dots\dots (9)$$

の関係で与えられる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_g &= \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij}} \\ \dot{\sigma} &= \frac{1}{3} \dot{\sigma}_{rr}, \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{rr} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

であり、 $\dot{\epsilon}_g$ は相当ひずみ速度を、 $\dot{\epsilon}'_{ij}$ は偏差ひずみ速度を表す。式(9)で指定される μ , δ はそれぞれ摩擦因子、ダイレイタンス因子である。このとき、式(6・2)の係数と

$$K^L = \frac{9}{4} \frac{1}{\sigma_g^2 h}, \quad \beta = \frac{2}{3} \delta, \quad \gamma = \frac{2}{3} \mu \quad \dots\dots\dots (11)$$

の関係にある。このように、式(6)は全体として弾・塑性挙動に対する柔軟な適用性を備えている。したがって、本論文ではこの構成関係について検討を行うことにした。

構成関係に使用する Jaumann の応力速度は

$$\dot{\sigma}_{ij}^J = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ki} \omega_{kj} - \sigma_{kj} \omega_{ki} \quad \dots\dots\dots (12)$$

で定義される。 ω_{ij} は回転速度(スピン)

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (v_{j,i} - v_{i,j}) \quad \dots\dots\dots (13)$$

である。ここで、 v_i は変位速度成分である。ひずみ速度は、通常の設定に従って

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (v_{j,i} + v_{i,j}) \quad \dots\dots\dots (14)$$

の関係にある。以下の議論で使用する公称応力速度は

$$\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{jk} v_{i,k} + \sigma_{ij} v_{k,k} \quad \dots\dots\dots (15)$$

である。

不連続面を境とする両側領域の差に関して、式(1), (2)はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_{ij}^J &= K_{ijkl}^{-1} \Delta \dot{\epsilon}_{kl} \\ \Delta \dot{\epsilon}_{ij} &= K_{ijkl} \Delta \dot{\sigma}_{kl} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。これらの構成式における、Jaumann の応力速度差とひずみ速度差は、式(12), (14)より

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_{ij}^J &= \Delta \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ki} \Delta \omega_{kj} - \sigma_{kj} \Delta \omega_{ki} \\ \Delta \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} (\Delta v_{j,i} + \Delta v_{i,j}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

と表され、ここで、式(13)より

$$\Delta \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta v_{j,i} - \Delta v_{i,j}) \quad \dots\dots\dots (18)$$

である。さらに、公称応力速度差は、式(15)より

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij} = \Delta \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{jk} \Delta v_{i,k} + \sigma_{ij} \Delta v_{k,k} \dots (19)$$

の関係にある。

2・2 座標系 以下の解析において座標系を次のように設定する。今、まさに局所くびれ(せん断帯)が発生しようとしている時点を現時点とする。現時点における主応力方向に座標軸 x_i を採る。これにより、一般性を損なうことはない。さらに、不連続面に関するデカルト座標系 $\bar{x}_i$ を設定する。そこでは、軸 $\bar{x}_1$ を不連続面の法線方向に採る。軸 $\bar{x}_2$ は $x_1 x_2$ 平面に含まれる方向に、軸 $\bar{x}_3$ は $\bar{x}_i$ ($i=1, 2$) に直交し、右手形をなすように採る。座標軸 $x_i, \bar{x}_i$ に関する基本ベクトル(単位ベクトル)をそれぞれ、 $e_i, \bar{e}_i$ で表す。これらの間には

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= n_i e_i \\ \bar{e}_2 &= -\frac{n_2}{\sqrt{1-n_3^2}} e_1 + \frac{n_1}{\sqrt{1-n_3^2}} e_2 \\ \bar{e}_3 &= -\frac{n_1 n_3}{\sqrt{1-n_3^2}} e_1 - \frac{n_2 n_3}{\sqrt{1-n_3^2}} e_2 + \sqrt{1-n_3^2} e_3 \end{aligned} \dots (20)$$

$$\begin{aligned} e_1 &= n_1 \bar{e}_1 - \frac{n_2}{\sqrt{1-n_3^2}} \bar{e}_2 - \frac{n_3 n_1}{\sqrt{1-n_3^2}} \bar{e}_3 \\ e_2 &= n_2 \bar{e}_1 + \frac{n_1}{\sqrt{1-n_3^2}} \bar{e}_2 - \frac{n_3 n_2}{\sqrt{1-n_3^2}} \bar{e}_3 \\ e_3 &= n_3 \bar{e}_1 + \sqrt{1-n_3^2} \bar{e}_3 \end{aligned} \dots (21)$$

の関係がある⁽⁴⁾。現時点において速度こう配の不連続が発生すると、座標軸 x_i 方向はひずみ速度、あるいは応力速度に関して必ずしも主方向になっているとの保証が現段階では得られていない。したがって、座標軸 x_i 方向が主方向であるとするのは応力値についてのみであり、ひずみ速度、あるいは応力速度に関しては座標軸 x_i 方向が主方向であることを前提とはしていないことを付言しておく。

2・3 不連続面における平衡条件 以下の解析で、不連続面に関する平衡が論ぜられるが、これらは、応力成分に関する外成分について課せられるものであることを強調しておきたい。これに対して、応力の内成分は平衡考察からは規制することのできない成分である。この内成分をどのように処理するかは、この種の不連続場の考察にとって非常に重要な問題である。従来、局所くびれ⁽³⁾ やせん断帯解析⁽¹⁾ で式(1)の形式の構成関係式をわざわざ採用した背景には、この処理の困難さが深く係っていたのではないかと、著者らは憶測している。しかしながら、幸いにもこの問題に関して Hill は「速度の不連続面を横切るとき、すべての応力成分は連続である」ことをすでに証明してい

る⁽⁵⁾。ある帯状領域を境に速度こう配の不連続が発生し、この帯状領域の幅が無限小に縮退すると、帯状領域を隔てた両側の領域における速度はそこで不連続となることから、Hill の証明における速度不連続は、速度こう配の不連続として読み換えることができる。したがって、応力速度の内成分に関してこれを一般化すると、Hill の証明は、

$$\Delta \dot{\sigma}_{22} = 0, \Delta \dot{\sigma}_{33} = 0, \Delta \dot{\sigma}_{23} = 0 \dots (22)$$

として表現することができる。ここで、記号 $\bar{\cdot}$ は、座標系 $\bar{x}_i$ に関する成分であることを表す。

応力の外成分に関して、 $\mathbf{n}$ を法線ベクトルとする平面で互いに隣接する領域間の平衡条件は

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{S} = 0 \dots (23)$$

で与えられなければならない。ここで、 $\Delta \mathbf{S}$ は公称応力速度差テンソルを表す。上式は

$$\left. \begin{aligned} n_i \Delta \dot{\sigma}_{ij} &= 0 \quad (i, j=1, 2, 3) \\ \Delta \dot{\bar{\sigma}}_{ij} &= 0 \quad (j=1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

の関係を表す。ここで、 $\bar{x}_i$ 座標系では $\mathbf{n} = \bar{e}_1$ の関係にあることを用いている。 $\Delta \mathbf{S}$ の各座標系に関する成分は具体的には、式(19)より

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_{ij} &= \Delta \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{jk} \Delta v_{i,k} + \sigma_{ij} \delta_{ij} \Delta v_{k,k} \\ \Delta \dot{\bar{\sigma}}_{ij} &= \Delta \dot{\bar{\sigma}}_{ij} - \bar{\sigma}_{kj} \Delta \bar{v}_{i,k} + \bar{\sigma}_{ij} \Delta \bar{v}_{k,k} \end{aligned} \dots (25)$$

である。ここで、添字が一つの成分は主方向成分であることを表す。

2・4 速度こう配の不連続 ベクトル $\mathbf{g}$ の成分間の関係を求める。微分演算ベクトル

$$\nabla = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \dots (26)$$

を用いて、速度こう配テンソル Φ は

$$\Phi = \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} e_i e_j = \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_i} \bar{e}_i \bar{e}_j \dots (27)$$

で表される。速度こう配差テンソルを

$$\Delta \Phi = \Delta \nabla \mathbf{v} = q_{ij} e_i e_j = \bar{q}_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j \dots (28)$$

と置く。ここで、

$$q_{ij} = \Delta \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad \bar{q}_{ij} = \Delta \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_i} \dots (29)$$

である。いま、式(28)を

$$\Delta \Phi = \mathbf{n} \mathbf{g} \dots (30)$$

で表す⁽⁶⁾。したがって、速度こう配差テンソル成分は

$$q_{ij} = n_i g_j, \quad \bar{q}_{ij} = \delta_{i1} \bar{g}_j \dots (31)$$

で関係付けられている。2・3節で述べたように、座標系 x_i はひずみ速度に関しては、主方向であること条件は課していないので、2・4節の座標系 x_i に関する速度こう配は、制約を課さない一般の座標系における表現と考えて差支えない。

速度こう配の不連続は不連続面の法線方向 $\bar{x}_1$ に関してのみ発生する。定義から $\bar{n}_1=1$, $\bar{n}_i=0$ ($i=2, 3$) であるので, $\bar{q}_{ij}=0$ ($i=2, 3$) となる。したがって, 許容できる不連続成分は

$$\bar{q}_{ij} = \bar{g}_j \neq 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

である。不連続面を横切って垂直速度こう配成分の連続性を保証する条件は式(3)の $\mathbf{n}, \mathbf{g}$ の直交性で示される。このとき,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} = \bar{g}_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

が要請される。

ベクトル $\mathbf{g}$ は, 各座標系に関して

$$\mathbf{g} = g_i \mathbf{e}_i = \bar{g}_i \bar{\mathbf{e}}_i \quad \dots\dots\dots (34)$$

である。式(20), (21)の相互関係を

$$\bar{\mathbf{e}}_i = E_{ij} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i = E_{ij}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_j \quad \dots\dots\dots (35)$$

と表したとき, 式(34)より $g_i, \bar{g}_i$ に関しても

$$\bar{g}_i = E_{ij} g_j, \quad g_i = E_{ij}^{-1} \bar{g}_j \quad \dots\dots\dots (36)$$

の関係が得られる。

式(29), (31)の関係を用いて, 不連続面を挟む両側領域における回転速度差は, 式(18)より

$$\left. \begin{aligned} \Delta \omega_{ij} &= \frac{1}{2} (n_i g_j - n_j g_i) \\ \Delta \bar{\omega}_{ij} &= \frac{1}{2} (\delta_{i1} \bar{g}_j - \delta_{j1} \bar{g}_i) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

で表される。同様にひずみ速度差は, 式(17-2)より

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} (n_i g_j + n_j g_i) \\ \Delta \dot{\bar{\epsilon}}_{ij} &= \frac{1}{2} (\delta_{i1} \bar{g}_j + \delta_{j1} \bar{g}_i) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる。Jaumann の応力速度差は, 式(17-1)より

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_{ij} &= \Delta \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_i (n_j g_i - n_i g_j) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma_j (n_i g_j - n_j g_i) \\ \Delta \dot{\bar{\sigma}}_{ij} &= \Delta \dot{\bar{\sigma}}_{ij} - \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{i1} \bar{g}_j + \bar{\sigma}_{j1} \bar{g}_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{ik} \delta_{j1} + \bar{\sigma}_{kj} \delta_{i1}) \bar{g}_k \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (39)$$

となる。同様に, 公称応力速度差については, 式(25)より

$$\begin{aligned} \Delta \dot{s}_{ij} &= \Delta \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_j n_j g_i + \sigma_i \delta_{ij} n_k g_k \\ \Delta \dot{\bar{s}}_{ij} &= \Delta \dot{\bar{\sigma}}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} \bar{g}_i + \bar{\sigma}_{ij} \bar{g}_j \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (40)$$

を得る。

3. せん断帯解析について

3.1 従来の解析法 Hill ら⁽¹⁾ は, 非圧縮性固体に関して, 平面ひずみ引張りにおける分岐現象を構成

式との関連において考察し, せん断帯発生を分岐条件から検討した。その後, Hutchinson ら⁽²⁾ はこれについてさらに詳細な検討を行っている。ここで, これについて概説する。ここでは, 座標系 x_i は一般の座標系を表す。非圧縮, 増分的線形固体に対して, 構成関係に

$$\dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} + \dot{\sigma} \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (41)$$

を用い, 公称応力速度に関しては

$$\dot{s}_{ij} = C_{ijkl} v_{l,k} + \dot{\sigma} \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (42)$$

と表している。速度場として

$$v_i = \eta_j f(\bar{x}_j) \quad \dots\dots\dots (43)$$

を仮定している。これにより速度こう配は

$$v_{j,i} = n_i \eta_j f'(\bar{x}_1) \quad \dots\dots\dots (44)$$

となる。非圧縮を仮定しているのので, 式(44)から

$$n_i \eta_i = 0 \quad \dots\dots\dots (45)$$

となり, $\mathbf{n}$ と $\boldsymbol{\eta}$ は直交関係にある。せん断帯とその周辺領域との間の平衡を微分形

$$\dot{s}_{ij,i} = 0 \quad \dots\dots\dots (46)$$

で与えている。

Hill らの解析では, せん断面は, 考察している引張平面に垂直であると先験的に仮定している。それゆえ, ベクトル $\mathbf{n}$ は平面 $x_1 x_2$ に含まれている。さらに, ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ も平面 $x_1 x_2$ に含まれているものとしている。したがって, 式(45)では, $i=1, 2$ で総和がとられる。

式(42)の構成関係に式(46)の平衡規準を適用する。分岐前の変形が一様変形であること, すなわち $C_{ijkl,\tau} = 0$ であることと, $\mathbf{n}$ と $\boldsymbol{\eta}$ の直交性を配慮して

$$C_{ij} \eta_i \eta_j = 0, \quad C_{ij} \equiv C_{minj} n_m n_n \quad \dots\dots\dots (47)$$

が求められている。これが, Hill らによって導かれたせん断帯の形態特性基礎式である。

$\mathbf{n}$ と $\boldsymbol{\eta}$ の直交条件, 式(45)を用いて, 式(47)の形態特性基礎式は

$$A n_1^4 + B n_1^2 n_2^2 + C n_2^4 = 0 \quad \dots\dots\dots (48)$$

と n_i の 4 次式で表現される。上式の係数は

$$\begin{aligned} A &\equiv \lambda + \frac{1}{2} \tau, \quad B \equiv 2(\lambda^* - \lambda), \quad C \equiv \lambda - \frac{1}{2} \tau \\ \tau &\equiv \sigma_1 - \sigma_2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (49)$$

である。 λ^*, λ は, 増分的線形固体を仮定して

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} &= 2\lambda^* (\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}) \\ \dot{\sigma}_{12} &= 2\lambda \dot{\epsilon}_{12} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (50)$$

の関係を表す係数である。

式(48)から n_i が実数として求められるとは限らない。 n_i が実数としては算出されないだ円型から, 実数として算出される双曲型へと移行する状態を分岐現

象が発現する限界と設定し、限界の変形を求めている。しかし、分岐現象と方程式の型との間に本来直接的な相関があるとは言い難い。

以上が、Hill らの解析の概要である。この解析では、式(46)におけるように微分操作がなされていることから、状態量に不連続を想定していないことに特徴がある。せん断帯は帯状領域であり、その両側を領域 A と A' で挟まれている。せん断帯 B と領域 A, A' との境界面 N において、局所くびれ解析では、通常は状態量の不連続が想定されている。しかし、Hill らの解析では、式(42)、(46)の関係から、式(43)に含まれている関数 f は f' まで連続であることが前提となっている。したがって、領域 A, A' とせん断帯 B の境界は明りょうではない。さらに、Hill らの解析では、せん断帯 B 内の、境界面 N に平行なすべての平面(せん断面)が考察対象となる。

ここで、形態特性基礎式、式(47)の内容をせん断面に関する $\bar{x}_i$ 座標系で表し、具体的な検討を試みる。 $\bar{n}_1=1$, $\bar{n}_2=0$ であるので、式(44)は

$$\bar{v}_{i,j} = \bar{\eta}_i \delta_{ji} f'(\bar{x}_1) \quad \dots\dots\dots (51)$$

式(47-2)は

$$\bar{C}_{ij} = \bar{c}_{1i1j} \quad \dots\dots\dots (52)$$

となる。非圧縮を前提としているので、 $\bar{v}_{i,i}=0$ を満足しなければならず、式(51)から

$$\bar{\eta}_1=0 \quad \dots\dots\dots (53)$$

でなければならない。したがって、恒等的に零と異なる速度こう配は $\bar{v}_{2,1}$ ($=\bar{\eta}_2 f'$) のみである。このことを考慮して、式(12)、(13)の定義から

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}}_{11} &= \dot{\bar{\sigma}}_{11} + \bar{\sigma}_{12} \bar{v}_{2,1} \\ \dot{\bar{\sigma}}_{22} &= \dot{\bar{\sigma}}_{22} - \bar{\sigma}_{12} \bar{v}_{2,1} \\ \dot{\bar{\sigma}}_{12} - \dot{\bar{\sigma}}_{12} - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22}) \bar{v}_{2,1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (54)$$

さらに、式(15)から

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{s}}_{11} &= \dot{\bar{\sigma}}_{11}, & \dot{\bar{s}}_{22} &= \dot{\bar{\sigma}}_{22} - \bar{\sigma}_{12} \bar{v}_{2,1} \\ \dot{\bar{s}}_{12} &= \dot{\bar{\sigma}}_{12}, & \dot{\bar{s}}_{21} &= \dot{\bar{\sigma}}_{12} - \bar{\sigma}_{11} \bar{v}_{2,1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (55)$$

これらの式から $\dot{\bar{\sigma}}_{ij}$ を消去すると

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{s}}_{11} &= \dot{\bar{\sigma}}_{11} - \bar{\sigma}_{12} \bar{v}_{2,1}, & \dot{\bar{s}}_{22} &= \dot{\bar{\sigma}}_{22} \\ \dot{\bar{s}}_{12} &= \dot{\bar{\sigma}}_{12} + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22}) \bar{v}_{2,1} \\ \dot{\bar{s}}_{21} &= \dot{\bar{\sigma}}_{12} - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}) \bar{v}_{2,1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (56)$$

を得る。式(51)とひずみ速度の定義式(14)を用いて式(50)から

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}}_{11} &= \dot{\sigma}, & \dot{\bar{\sigma}}_{22} &= \dot{\sigma}, & \dot{\bar{\sigma}}_{12} &= \lambda \bar{v}_{2,1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (57)$$

である。式(57)を式(56)に代入して

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{s}}_{11} &= -\bar{\sigma}_{12} \bar{v}_{2,1} + \dot{\sigma}, & \dot{\bar{s}}_{22} &= \dot{\sigma} \\ \dot{\bar{s}}_{12} &= \left\{ \lambda + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22}) \right\} \bar{v}_{2,1} \\ \dot{\bar{s}}_{21} &= \left\{ \lambda - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}) \right\} \bar{v}_{2,1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (58)$$

となる。これにより、式(42)における係数 c_{ijkl} が具体的に判明した。さて、式(47)は、速度こう配に関する式(53)を配慮すると

$$\bar{C}_{22} \bar{\eta}_2^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (59)$$

となる。 $\bar{n}_1=1$, $\bar{n}_2=0$ を考慮して

$$\bar{C}_{22} = \bar{c}_{1212} = \lambda + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22}) \quad \dots\dots\dots (60)$$

を得る。上式の λ は、線形比較体をフック弾性体とみなしたときには、横弾性係数 G に相当し、 $\bar{\sigma}_{ij}$ と比べると非常に大きな値である。したがって、 $\bar{C}_{22}$ は式(60)より通常の状態では零となり得ない。このため、式(59)から

$$\bar{\eta}_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (61)$$

となり、上式と式(53)からすべての速度こう配は零でなければならないことが結論される。

3.2 速度こう配の不連続に注目した解析 3.1

節で、連続な速度こう配の存在を前提としたとき有為なせん断変形が求められないことを示した。さらに、塑性変形の考察には線形比較体の仮定はそぐわないこともあり、3.2 節では不連続速度こう配の存在を前提としてレビー・ミーゼス形構成式の適用を検討する。

速度こう配の不連続は、せん断帯 B と両側領域 A (あるいは A') の境界面 N で発生し、せん断帯内部では連続とする。不連続面 N の極近傍の、厳密には不連続面 N で分断され、それに接している領域 A とせん断帯 B (領域 B と呼ぶ) の部分が考察対象である。したがって、領域 A, B の内部における連続な状態量の変化はその有無を問う必要はない。領域 A, B の不連続面 N における状態量の差に 2 章と同様、 Δ を付して表す。Needleman⁽⁶⁾ も状態量の差に注目した解析を行っているが、基本的には Hill らの手法を踏襲したものである。

最初に、Hill らの取扱いの流れに沿って検討する。座標系 x_i は一般座標系を表す。式(41)、(42)は

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij}^I = L_{ijkl} \Delta \dot{\epsilon}_{kl} + \Delta \dot{\sigma} \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (62)$$

$$\Delta \dot{s}_{ij} = c_{ijkl} \Delta v_{l,k} + \Delta \dot{\sigma} \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (63)$$

で置き換えられる。速度場 v_i は連続であり、その速度こう配に不連続を導入する。それを式(44)と対比して、式(29)、(31)から

$$\Delta v_{i,i} = n_i g_i \quad \dots\dots\dots (64)$$

で表される。式(3)から

$$n_i g_i = 0 \quad \dots\dots\dots (65)$$

である。力の平衡に関しては、式(46)に代わって、不連続面 N を挟んで、式(23)より

$$\Delta \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{n} \cdot \Delta \dot{\mathbf{S}} = n_i \Delta \dot{s}_{ij} \mathbf{e}_j = 0 \quad \dots\dots\dots (66)$$

が成り立たなければならない。上式は式(63)、(64)を用いて

$$(C_{jmg_m} + \Delta \dot{s}_{nj}) \mathbf{e}_j = 0 \quad \dots\dots\dots (67)$$

となる。上式に $\mathbf{g}$ を内積すると、式(65)を考慮して

$$C_{ij} g_i g_j = 0, \quad C_{ij} \equiv c_{minj} n_m n_n \quad \dots\dots\dots (68)$$

が得られる。これは、式(47)の η_i が g_i で置き換えられていて、式(47)と基本的には同一の内容である。

次に、式(2)の形式で表現される構成式の適用を検討する。さらに、Hill らの解析で前提条件としている平面ひずみ速度変形の拘束を外す。このため、不連続面 N が座標面 (x_1, x_2) に垂直であるとする条件も取り除き、 g_i ($i=1, 2, 3$) とする。以下の考察においては、2章の基礎関係式を使用する。構成式は、式(2)より

$$\Delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \bar{K}_{ijkl} \Delta \dot{\sigma}_{kl} \quad \dots\dots\dots (69)$$

を用いる。具体的には、式(5)、(6)より

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} = & kK^D \left\{ \Delta \dot{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3}(1-\alpha) \delta_{ij} \Delta \dot{\sigma}_{rr} \right\} \\ & + (1-k)K^L \left(\bar{\sigma}'_{ij} + \frac{1}{3} \beta \sigma_g \delta_{ij} \right) \\ & \times \left(\bar{\sigma}'_{kl} \Delta \dot{\sigma}_{kl} + \frac{1}{3} \gamma \sigma_g \Delta \dot{\sigma}_{rr} \right) \quad \dots\dots\dots (70) \end{aligned}$$

である。不連続速度こう配は式(64)で与えられる。準静的問題では、不連続面を挟んで体積ひずみの連続性から、圧縮、非圧縮材料に関係なく

$$\bar{g}_i = 0 \quad \dots\dots\dots (71)$$

である。それゆえ、零でない $\bar{g}_i$ は $i=2, 3$ の2成分である。このとき、公称応力速度の平衡条件、式(24-2)は(40-2)より

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (j=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (72)$$

を与える。これは、応力速度の外成分に関して平衡維持の観点から課されなければならない条件である。応力の内成分に関しては、Hill の証明より式(22)の連続性が与えられている。したがって、これと式(72)から、すべての応力速度成分に関して

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (73)$$

でなければならない。したがって、Jaumann の応力速度は、式(39-2)より

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}'_{ij} = & -\frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{i1} \bar{g}_j + \bar{\sigma}_{j1} \bar{g}_i) \\ & + \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{ik} \delta_{j1} + \bar{\sigma}_{kj} \delta_{i1}) \bar{g}_k \quad \dots\dots\dots (74) \end{aligned}$$

である。式(71)を考慮して具体的には

$$\Delta \dot{\sigma}'_{11} = \bar{\sigma}_{12} \bar{g}_2 + \bar{\sigma}_{31} \bar{g}_3$$

$$\Delta \dot{\sigma}'_{22} = -\bar{\sigma}_{12} \bar{g}_2, \quad \Delta \dot{\sigma}'_{33} = -\bar{\sigma}_{31} \bar{g}_3$$

$$\Delta \dot{\sigma}'_{12} = -\frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22}) \bar{g}_2 + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{23} \bar{g}_3$$

$$\Delta \dot{\sigma}'_{23} = -\frac{1}{2} \bar{\sigma}_{31} \bar{g}_2 - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{12} \bar{g}_3$$

$$\Delta \dot{\sigma}'_{31} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{23} \bar{g}_2 - \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{33}) \bar{g}_3$$

..... (75)

となる。ひずみ速度に関しても式(71)を考慮して、式(38-2)より

$$\Delta \dot{\varepsilon}_{11} = 0, \quad \Delta \dot{\varepsilon}_{22} = 0, \quad \Delta \dot{\varepsilon}_{33} = 0$$

$$\Delta \dot{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2} \bar{g}_2, \quad \Delta \dot{\varepsilon}_{23} = 0, \quad \Delta \dot{\varepsilon}_{31} = \frac{1}{2} \bar{g}_3$$

..... (76)

である。ここで、式(70)に現れている $\bar{\sigma}'_{kl} \Delta \dot{\sigma}'_{kl}$ について調べると、式(75)で与えられている $\Delta \dot{\sigma}'_{kl}$ に $\bar{\sigma}'_{kl}$ を演算すると、恒等的に

$$\bar{\sigma}'_{kl} \Delta \dot{\sigma}'_{kl} = 0 \quad \dots\dots\dots (77)$$

を満足していることがわかる。同様に、式(75)から

$$\Delta \dot{\sigma}'_{rr} = 0 \quad \dots\dots\dots (78)$$

も導かれる。これらにより、塑性変形に関する、式(70)の K^L に関連する項は恒等的に零となる。したがって、式(70)の構成関係は結果として

$$\Delta \dot{\varepsilon}_{ij} = kK^D \Delta \dot{\sigma}'_{ij} \quad \dots\dots\dots (79)$$

の増分的線形固体であることが要請される。式(79)では、ひずみ速度差は応力速度差の個々の成分と、成分やこれまで受けた塑性変形に関係なく一定値 kK^D で結合されている。式(75)を式(79)の右辺に代入し、式(76)を式(79)の左辺に代入し、 $\bar{g}_i$ の比較を行うと、添字 (i, j) に関して $(2, 2), (3, 3), (2, 3)$ の成分から $\bar{g}_2 = 0, \bar{g}_3 = 0$ を得る。結局、不連続速度こう配ベクトル $\bar{\mathbf{g}}$ のすべての成分について

$$\bar{g}_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (80)$$

でなければならないことが求められる。式(36-2)から、 g_i ($i=1, 2, 3$) も零でなければならない。したがって、応力速度依存性の有無、体積変化の有無にかかわらず、この手法に従うときには、 g_i に零でない有為な解を持つことはできない。

4. 共通の回転速度を想定した

せん断帯の解析

連続な速度こう配を前提としても、さらに不連続な速度こう配を想定しても、有為な、せん断帯発生条件が求められないことを前章で示した。そこでまず最初に、この主原因について検討する。

不連続面の法線ベクトル差は

$$\Delta \dot{\mathbf{n}} = n_i (\delta_{ij} \Delta v_{r,r} - \Delta v_{i,j}) \mathbf{e}_j \quad \cdots \cdots \cdots (81)$$

で与えられ⁽⁷⁾, $\bar{x}_i$ 座標系では

$$\Delta \dot{\mathbf{n}} = (\delta_{ij} \Delta \bar{v}_{r,r} - \Delta \bar{v}_{i,j}) \bar{\mathbf{e}}_j \quad \cdots \cdots \cdots (82)$$

である。 $\Delta \bar{v}_{r,r}$, $\Delta \bar{v}_{i,j}$ は, $\bar{g}_i$ の成分に関して $r=1$ と $j=1$ においてのみ $\bar{g}_1$ となるので, 上式は恒等的に零であり, 式(4)の関係を満足している。不連続面を境とした力の平衡は

$$\Delta \dot{\mathbf{f}} = \Delta \dot{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{n} \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (83)$$

であるので, 式(4)から

$$\mathbf{n} \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (84)$$

となる。ここで, $\boldsymbol{\Sigma}$ は応力テンソルを表す。式(72)の結果は, これによる当然の帰結を表している。不連続を前提とした解析において, 式(74)におけるように, 応力速度差のすべての成分が零となった根元は, このように $\Delta \dot{\mathbf{n}}$ を零と置いていることに起因していると考えられる。そこで, 有為な結果を導くには, 式(3)の $\mathbf{n}$ と $\mathbf{g}$ の直交性を保持した上で, 少なくとも式(4)の, この条件を外す工夫がなされなければならない。さらに, $\Delta \dot{\mathbf{n}}$ を零とすることにおいて不合理なことは, この条件下では, 不連続面を境している二つの領域 A (あるいは A'), B に共通な境界条件を課することが原理的に可能ではなく, このことの是正に関しても $\Delta \dot{\mathbf{n}} = 0$ の条件を外すことが望まれる。領域 A, B で共通の境界条件を課することを可能にする方策の必要条件として, 領域 A, B において同一の主方向を持つように, 少なくともこれらの剛体回転速度を同じにすることが考えられる。このとき, この剛体回転速度に連動して不連続面の法線ベクトルは不連続面の両側で一致なくなり, これらの間で零でない $\Delta \dot{\mathbf{n}}^R$ が付与されることになる。ここで, これについて検討を試みる。

$\Delta \dot{\mathbf{n}} = 0$ から生じる $\Delta \omega_{ij}$ を用いて, $\Delta \dot{\mathbf{n}} = 0$ における剛体回転速度差ベクトルは

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} e_{ijk} \Delta \omega_{ij} \mathbf{e}_k \quad \cdots \cdots \cdots (85)$$

で表される。ここで, 循環指標 e_{ijk} は

$$e_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \quad \cdots \cdots \cdots (86)$$

を表す。そこで, 領域 A, B の剛体回転速度を同一にするには

$$\Delta \dot{\mathbf{n}}^R = -\Delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \quad \cdots \cdots \cdots (87)$$

の法線速度ベクトル差を与えることが必要となる⁽⁷⁾。式(29-2), (31-2)を用いて式(87)は

$$\Delta \dot{\mathbf{n}}^R = -\frac{1}{2} (\bar{g}_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{g}_3 \bar{\mathbf{e}}_3) \quad \cdots \cdots \cdots (88)$$

となる。不連続面を境として平衡 $\Delta \dot{\mathbf{f}} = 0$ を維持していなければならないので, 式(83)の $\Delta \dot{\mathbf{n}}$ を $\Delta \dot{\mathbf{n}}^R$ で置き換え, 応力速度差は

$$\mathbf{n} \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\Sigma}} = -\Delta \dot{\mathbf{n}}^R \cdot \boldsymbol{\Sigma} \quad \cdots \cdots \cdots (89)$$

で条件付けられることになる。したがって, 上式より,

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{g}_2 \bar{\sigma}_{2j} + \bar{g}_3 \bar{\sigma}_{3j}) \quad \cdots \cdots \cdots (90)$$

を得る。 $\Delta \dot{\mathbf{n}}^R$ により, 相対剛体回転速度は存在しなくなるので,

$$\Delta \dot{\sigma}_{ij}^I = \Delta \dot{\sigma}_{ij}, \quad \Delta \dot{\sigma}_{ij}^I = \Delta \dot{\sigma}_{ij} \quad \cdots \cdots \cdots (91)$$

である。

Hill らの解析との比較を目的に, 平面ひずみ速度変形について検討する。著者らは, 特性曲面に関する考察から応力速度こう配の接続性を検討し, 速度こう配の不連続を許容することのできる不連続面の形態は, 形態 P と O であることを示した⁽⁷⁾。Hill らの解析で設定している, 平面ひずみ速度変形 $\dot{\epsilon}_3 = 0$ に対応する不連続面の形態は形態 O であり, そこでは不連続面の法線 $\mathbf{n}$ は平面 (x_1, x_2) 内に含まれている。 $\bar{x}_3$ 方向は x_3 方向と一致し, このとき, 式(76)から $\bar{g}_3 = 0$ である。形態 O では, 法線 $\mathbf{n}$ の各成分は

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_3 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (92)$$

の関係である。したがって, 座標軸 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ は, 座標軸 x_1, x_2 をこれらの平面内でそれぞれ $\pi/4$ だけ回転した方向にある。 x_i が主方向であるので, 一般にテンソル $\mathbf{T}$ の座標変換は (x_1, x_2) 平面内において

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_{11} &= \frac{1}{2} (T_{11} + T_{22}) \\ \bar{T}_{12} &= -\frac{1}{2} (T_{11} - T_{22}) \\ \bar{T}_{22} &= \frac{1}{2} (T_{11} + T_{22}) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (93)$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{2} (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}) - \bar{T}_{12} \\ T_{12} &= \frac{1}{2} (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) = 0 \\ T_{22} &= \frac{1}{2} (\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}) + \bar{T}_{12} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (94)$$

で与えられる。テンソル $\mathbf{T}$ に応力テンソル $\boldsymbol{\Sigma}$ を対応させると, 式(93)より

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \\ \bar{\sigma}_{12} &= -\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (95)$$

となる。次に, テンソル $\mathbf{T}$ に応力速度差テンソル $\Delta \dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ を対応させる。式(94-2)より,

$$\Delta \dot{\sigma}_{11} = \Delta \dot{\sigma}_{22} \quad \cdots \cdots \cdots (96)$$

となる。これを用いて式(94)より

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_1 &= \Delta \dot{\sigma}_{11} - \Delta \dot{\sigma}_{12} \\ \Delta \dot{\sigma}_2 &= \Delta \dot{\sigma}_{11} + \Delta \dot{\sigma}_{12} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (97)$$

で表される。応力成分の対称性と $\bar{g}_3=0$ を考慮し、式(90)に式(95)を適用すると

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_{11} &= -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \bar{g}_2 \\ \Delta \dot{\sigma}_{12} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \bar{g}_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (98)$$

を得る。これを式(97)に代入し

$$\Delta \dot{\sigma}_1 = -\frac{1}{2} \sigma_1 \bar{g}_2, \quad \Delta \dot{\sigma}_2 = \frac{1}{2} \sigma_2 \bar{g}_2 \dots\dots\dots (99)$$

となる。テンソル $\mathbf{T}$ に $\Delta \dot{\mathbf{E}}$ ひずみ速度差テンソルを適用し、式(76)の関係を用いると、式(94)により

$$\Delta \dot{\epsilon}_1 = -\frac{1}{2} \bar{g}_2, \quad \Delta \dot{\epsilon}_2 = \frac{1}{2} \bar{g}_2 \dots\dots\dots (100)$$

と表される。式(25-1)の公称応力速度差は、非圧縮材料では、主方向に関して、

$$\Delta \dot{\sigma}_i = \Delta \dot{\sigma}_i - \sigma_i \Delta \dot{\epsilon}_i \dots\dots\dots (101)$$

である。式(101)に式(99)、(100)を適用すると

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_1 &= \frac{1}{2}(-\sigma_1 + \sigma_1) \bar{g}_2 = 0 \\ \Delta \dot{\sigma}_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_2) \bar{g}_2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (102)$$

を得る。見方を変えると、 $\Delta \dot{\sigma}_i=0$ は $\bar{g}_2$ の不定条件(多価条件)を与えていることになる。ここでは、平面ひずみ速度場 $\dot{\epsilon}_3=0$ を条件としているので、任意の多価解の差に関して $\Delta \dot{\epsilon}_3=0$ が成り立つ。したがって、設定している平面ひずみ速度場においては

$$\Delta \dot{\sigma}_1=0, \quad \Delta \dot{\sigma}_2=0, \quad \Delta \dot{\epsilon}_3=0 \dots\dots\dots (103)$$

が、多価解発生に際して満足していなければならない条件となる。これは、著者らが提唱している多価解存在に対する必要条件とも一致している⁽⁸⁾。しかし、この条件下において、多価解が必ず存在するとは限らない。この平面ひずみ場においては、多価解存在のための十分条件は

$$\dot{\sigma}_1=0, \quad \dot{\epsilon}_3=0 \dots\dots\dots (104)$$

で与えられる⁽⁹⁾。本論文では、Hill らの課題に従って、せん断帯の発生条件を検討したが、より一般的には文献(9)、(10)を参照いただきたい。

5. 結 言

せん断帯解析において、従来行われている解析手法の構造について検討した。せん断帯形成をもたらす、有為な速度こう配、あるいは有為な、速度こう配の不連続が、このような解析構造のもとでは起こり得ないことを示した。

不連続発生時において、不連続面の法線ベクトル速度がこれを挟む両側領域で同一であるとする、両側領域で剛体回転速度に差を生じ、主方向の不一致が起こる。このことを避ける方策として剛体回転速度差を発生しないように、法線ベクトル速度差を設定することを提案した。これにより、有為な不連続速度こう配の存在が可能となり、その不定性が多価解に対する必要条件を与えることを示した。

文 献

- (1) Hill, R. and Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, **23** (1975), 239-264.
- (2) Hutchinson, J. W. and Tvergaard, V., *Int. J. Solids Struct.*, **17** (1981), 451-470.
- (3) Stören, S. and Rice, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, **23** (1975), 421-441.
- (4) 守時一, 機論, **56**-522, A (1990), 352-358.
- (5) Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, **1** (1952), 19-30.
- (6) Needleman, A., *J. Mech. Phys. Solids*, **27** (1979), 231-254.
- (7) 守時一・奥山栄樹, 機論, **61**-587, A (1995), 1639-1646.
- (8) 守時一・奥山栄樹, 機論, **61**-588, A (1995), 1789-1796.
- (9) 守時一・奥山栄樹, 機論, **62**-601, A (1996), 2157-2164.
- (10) Moritoki, H. and Okuyama, E., *J. Mater. Process. Technol.*, **60** (1996), 649-656.