境界要素法による異方性体の二次元定常熱弾性解析*

石 黒 周 司*¹, 田 中 正 隆*²Analysis of Two-Dimensional Anisotropic Thermoelasticity
by Boundary Element Method

Shuji ISHIGURO and Masataka TANAKA

This study is concerned with a new boundary element method for two dimensional anisotropic thermoelasticity in steady heat conduction. The governing differential equations of the displacement and temperature fields are transformed into a set of boundary integral equations which include the unknown quantities of displacement, temperature, traction, and heat flux on the boundary. They are discretized by means of the standard boundary element method, and solved under the given boundary conditions. A set of fundamental solutions are derived by the Hörmander method. Mathematical formulations are presented in detail for two dimensional thermoelasticity in anisotropic bodies. The proposed solution procedure is applied to some typical examples, and its usefulness is demonstrated through discussion of the results obtained.

Key Words: Boundary Element Method, Computational Mechanics, Structural Analysis, Thermal Stress, Anisotropy, Elasticity, Thermoelasticity

1. 結 言

近年、複合材料がさまざまな用途で用いられているが、過酷な熱環境下で使用されることが多い。これらの材料での、き裂の発生や進展、あるいは損傷等の予測や評価を正確に行うためには、対応する熱弾性問題を精度よく解くことが基本的に重要である。複合材料の多くは異方性体としてモデル化でき、したがって異方性体の熱弾性問題を高精度に解析する手法の開発は工学上重要な課題の一つといえる。

熱弾性問題に対する境界要素法の応用については、等方性体に関しては定常状態のものから慣性項を含む非定常連成熱弾性問題に至るまで、さまざまな手法が提案され、精度良く解析できるようになっている^{(1)~(8)}。

他方、異方性体の熱弾性解析については、Deborah-Henry Jr-Wilson によって多項式近似による手法⁽⁹⁾が提案されている。また、定常熱伝導状態で、かつ異方性の主軸と座標系が一致した場合、および一致しな

い場合については、二次元直交異方性体に関して、著者らによって基本解が示され、数値解析が行われている⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。

本報では、任意の異方性体について、定常熱伝導状態での二次元熱弾性問題の基本解を新しく導出し、それを用いる境界要素解析法を提案する。基本解の導出には、Hörmander の方法⁽²⁾⁽¹²⁾を適用し、その基本解を用いた境界要素法の定式化の詳細を示す。さらに、簡単な例題について、ここで提案する解析法による数値計算を行い、得られた結果を考察することにより、本解法の有効性を明らかにする。

2. 定 式 化

2-1 基本解の導出 異方性体の二次元定常熱弾性問題を考え、物体力および内部発熱がないものと仮定する。この場合、変位場および温度場の支配方程式は、次のような連立偏微分方程式系として表すことができる。

$$L_{IJ}u_J(\mathbf{x})=0 \quad (I, J=1, 2, 3) \cdots \cdots (1)$$

ただし、 $u_J(\mathbf{x})$ は二次元空間内の点 $\mathbf{x}$ における x_1 方向変位成分 u_1 , x_2 方向変位成分 u_2 および温度 u_3 を表すものとする。また、式(1)および以下において、二度繰返し現れる英字指標については、総和をとるも

* 原稿受付 1996 年 12 月 24 日。

*¹ 正員、長野県工科短期大学校 (〒386 12 上田市大字下之郷 813-8)。*² 正員、信州大学 (〒380 長野市若里 500)。

のとする。

式(1)において、 ∂_i で x_i 座標に関する偏微分を表すものとすれば、 L_{ij} は線形微分作用素で、次式で与えられる。

$$[L_{ij}] = \begin{bmatrix} D_{11}\partial_1^2 + 2D_{13}\partial_1\partial_2 + D_{33}\partial_2^2 & D_{13}\partial_1^2 + (D_{12} + D_{33})\partial_1\partial_2 + D_{23}\partial_2^2 & \alpha_{11}\partial_1 + \alpha_{12}\partial_2 \\ D_{13}\partial_1^2 + (D_{12} + D_{33})\partial_1\partial_2 + D_{23}\partial_2^2 & D_{33}\partial_1^2 + 2D_{23}\partial_1\partial_2 + D_{22}\partial_2^2 & \alpha_{12}\partial_1 + \alpha_{22}\partial_2 \\ 0 & 0 & k_{11}\partial_1^2 + k_{12}\partial_1\partial_2 + k_{21}\partial_1\partial_2 + k_{22}\partial_2^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i=1, 2) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= (-C_{23}^2 + C_{22}C_{33})/D, \quad D_{12} = (C_{13}C_{23} - C_{12}C_{33})/D, \quad D_{13} = (-C_{13}C_{22} + C_{12}C_{23})/D, \\ D_{22} &= (-C_{13}^2 + C_{11}C_{33})/D, \quad D_{23} = (C_{12}C_{13} - C_{11}C_{23})/D, \quad D_{33} = (-C_{12}^2 + C_{11}C_{22})/D, \\ D &= -C_{13}^2C_{22} + 2C_{12}C_{13}C_{23} - C_{11}C_{23}^2 - C_{12}^2C_{33} + C_{11}C_{22}C_{33}, \\ \alpha_{11} &= -\beta_{11}D_{11} - \beta_{22}D_{12} - \beta_{12}D_{13}, \quad \alpha_{22} = -\beta_{11}D_{12} - \beta_{22}D_{22} - \beta_{12}D_{23}, \quad \alpha_{12} = -\beta_{11}D_{13} - \beta_{22}D_{13} - \beta_{12}D_{33} \end{aligned} \quad (4)$$

である。 C_{ij} は材料のコンプライアンス係数であり、これを用いれば、ひずみ (ε_{ij})・応力 (σ_{ij}) 関係式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= C_{11}\sigma_{11} + C_{12}\sigma_{22} + C_{13}\sigma_{12} + \beta_{11}u_3, \quad \varepsilon_{22} = C_{12}\sigma_{11} + C_{22}\sigma_{22} + C_{23}\sigma_{12} + \beta_{22}u_3, \\ \varepsilon_{12} &= C_{13}\sigma_{11} + C_{23}\sigma_{22} + C_{33}\sigma_{12} + \beta_{12}u_3 \end{aligned} \quad (5)$$

また、 $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ は各方向への熱伝導率、 $\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{12}$ は同様に線膨張係数である。

式(2)に示した線形偏微分作用素に対する基本解を求めるために、ここでは Hörmander の方法を用いる。以下にその手順をステップ順に要約して示す。

(1) 支配微分作用素 L_{ij} の随伴作用素 $\mathcal{L}_{ij}$ を求める。

$$[\mathcal{L}_{ij}] = \begin{bmatrix} D_{11}\partial_1^2 + 2D_{13}\partial_1\partial_2 + D_{33}\partial_2^2 & D_{13}\partial_1^2 + (D_{12} + D_{33})\partial_1\partial_2 + D_{23}\partial_2^2 & 0 \\ D_{13}\partial_1^2 + (D_{12} + D_{33})\partial_1\partial_2 + D_{23}\partial_2^2 & D_{33}\partial_1^2 + 2D_{23}\partial_1\partial_2 + D_{22}\partial_2^2 & 0 \\ -\alpha_{11}\partial_1 - \alpha_{12}\partial_2 & -\alpha_{12}\partial_1 - \alpha_{22}\partial_2 & k_{11}\partial_1^2 + k_{12}\partial_1\partial_2 + k_{21}\partial_1\partial_2 + k_{22}\partial_2^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

(2) 随伴作用素の行列式 $\mathcal{L}$ を計算する。

$$\mathcal{L} = (k_{11}\partial_1^2 + k_{12}\partial_1\partial_2 + k_{21}\partial_1\partial_2 + k_{22}\partial_2^2) \{ C_{22}\partial_1^4 - 2C_{23}\partial_1^3\partial_2 + (2C_{12} + C_{33})\partial_1^2\partial_2^2 - 2C_{13}\partial_1\partial_2^3 + C_{11}\partial_2^4 \} / D \quad (7)$$

(3) 無限媒体において

$$\mathcal{L}\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (8)$$

を満足する 2 点関数 $\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を求める。式(8)において、 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ は Dirac のデルタ関数であり、

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_1 x_1 + i\xi_2 x_2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (9)$$

と表せる。ただし、 i は虚数、また、 x_1, x_2 は 2 点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ のそれぞれ x_1, x_2 方向の距離を示す。

ここで、式(8)の 2 点関数 $\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ も、式(9)の Dirac のデルタ関数と同形と考えられるので、

$$\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_1 x_1 + i\xi_2 x_2} S(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (10)$$

と仮定する。式(8)が成り立つためには、

$$S(\xi_1, \xi_2) = \frac{D}{\{ C_{22}\xi_1^4 - 2C_{23}\xi_1^3\xi_2 + (2C_{12} + C_{33})\xi_1^2\xi_2^2 - 2C_{13}\xi_1\xi_2^3 + C_{11}\xi_2^4 \} (k_{11}\xi_1^2 + k_{12}\xi_1\xi_2 + k_{21}\xi_1\xi_2 + k_{22}\xi_2^2)} \quad (11)$$

となる。以上から、2 点関数 $\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は

$$\begin{aligned} \phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{D}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_1 x_1 + i\xi_2 x_2} \\ &\quad \times \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\{ C_{22}\xi_1^4 - 2C_{23}\xi_1^3\xi_2 + (2C_{12} + C_{33})\xi_1^2\xi_2^2 - 2C_{13}\xi_1\xi_2^3 + C_{11}\xi_2^4 \} (k_{11}\xi_1^2 + k_{12}\xi_1\xi_2 + k_{21}\xi_1\xi_2 + k_{22}\xi_2^2)} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。

(4) 随伴作用素 $\mathcal{L}_{IJ}$ の余因子作用素 $\mathcal{M}_{IJ}$ を

$$\mathcal{L}_{IJ} \mathcal{M}_{KJ} = \mathcal{L} \delta_{IK} \quad (I, J, K=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (13)$$

で定義する。ただし、 δ_{IK} は Kronecker のデルタである。

式(13)から余因子作用素 $\mathcal{M}_{IJ}$ は今回の場合、次のようになる。

$$[\mathcal{M}_{IJ}] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \{(-C_{12}^2 + C_{11}C_{22})\partial_1^2 + 2(C_{12}C_{13} - C_{11}C_{23})\partial_1\partial_2 + (-C_{13}^2 + C_{11}C_{33})\partial_2^2\} \\ \quad \times (k_{11}\partial_1^2 + k_{12}\partial_1\partial_2 + k_{21}\partial_1\partial_2 + k_{22}\partial_2^2) \\ \{-(C_{13}C_{22} + C_{12}C_{23})\partial_1^2 - (C_{13}C_{23} - C_{12}C_{33} - C_{12}^2 + C_{11}C_{22})\partial_1\partial_2 \\ \quad - (C_{12}C_{13} - C_{11}C_{23})\partial_2^2\} (k_{11}\partial_1^2 + k_{12}\partial_1\partial_2 + k_{21}\partial_1\partial_2 + k_{22}\partial_2^2) \\ \{-\beta_{11}C_{22} + \beta_{22}C_{12}\}\partial_1^3 + \{2\beta_{11}C_{23} - \beta_{22}C_{13} - \beta_{12}C_{12}\}\partial_1^2\partial_2 + \{-\beta_{11}(C_{12} + C_{33}) \\ \quad + \beta_{22}C_{11} + \beta_{12}C_{13}\}\partial_1\partial_2^2 + \{\beta_{11}C_{13} - \beta_{12}C_{11}\}\partial_2^3 \\ \{-(C_{13}C_{22} + C_{12}C_{23})\partial_1^2 - (C_{13}C_{23} - C_{12}C_{33} - C_{12}^2 + C_{11}C_{22})\partial_1\partial_2 \\ \quad - (C_{12}C_{13} - C_{11}C_{23})\partial_2^2\} (k_{11}\partial_1^2 + k_{12}\partial_1\partial_2 + k_{21}\partial_1\partial_2 + k_{22}\partial_2^2) \\ \{(-C_{23}^2 + C_{22}C_{33})\partial_1^2 + 2(-C_{13}C_{22} + C_{12}C_{23})\partial_1\partial_2 + (-C_{12}^2 + C_{11}C_{22})\partial_2^2\} (k_{11}\partial_1^2 + k_{12}\partial_1\partial_2 + k_{21}\partial_1\partial_2 + k_{22}\partial_2^2) \\ \{\beta_{22}C_{23} - \beta_{12}C_{22}\}\partial_1^3 + \{\beta_{11}C_{22} - \beta_{22}(C_{12} + C_{33}) + \beta_{12}C_{23}\}\partial_1^2\partial_2 + \{-\beta_{11}C_{23} + 2\beta_{22}C_{13} - \beta_{12}C_{12}\}\partial_1\partial_2^2 \\ \quad + \{\beta_{11}C_{12} - \beta_{22}C_{11}\}\partial_2^3 \\ 0 \\ 0 \\ \{C_{22}\partial_1^3 - 2C_{23}\partial_1^2\partial_2 + (2C_{12} + C_{33})\partial_1\partial_2^2 - 2C_{13}\partial_1\partial_2^2 + C_{11}\partial_2^3\} (k_{11}\partial_1^2 + k_{12}\partial_1\partial_2 + k_{21}\partial_1\partial_2 + k_{22}\partial_2^2) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (14)$$

(5) 基本解 $u_j^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を

$$u_j^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{M}_{IJ} \phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (I, J=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (15)$$

で定義する。

以下に上の手順で得られた基本解の各項を示す。ここで得られた変位場の基本解 $u_j^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ($i, j=1, 2$) は実数からなり、Cruse-Swedlow によって得られた複素数の実部からなる解⁽¹³⁾と表示方法は異なるが、基本的には同じであり、両者の結果が一致することを数値計算によって確認している。また、温度場の基本解 $u_{33}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ も、Chang-Kang-Chen による解⁽¹⁴⁾と表示方法は異なるが、全く同じものである。なお、基本解の係数は付録に示す。

①変位場の基本解

$$u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A_{ijl} \ln(r_l) + B_{ijl} \theta_l \quad (i, j, l=1, 2), \quad u_{12}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_{21}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \dots\dots\dots (16)$$

②温度場の基本解

$$u_{33}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}} \ln(r_3) \quad \dots\dots\dots (17)$$

③温度場の変位場に対する影響項の基本解

$$u_{3i}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_{ijk} x_j \ln(r_k/e) + G_{ijk} x_j \theta_k \quad (i, j=1, 2; K=1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 e は自然対数の底であり、

$$r_l = \sqrt{(x_1 + a_l x_2)^2 + (b_l x_2)^2}, \quad \theta_l = \tan^{-1} \left(\frac{b_l x_2}{x_1 + a_l x_2} \right) \quad (l=1, 2, 3), \quad r_3 = r_4, \quad \theta_3 = \theta_4 \quad \dots\dots\dots (19)$$

である。また、 a_1, a_2, b_1, b_2 は次に示す特性方程式(20)の四つの共役複素根の係数であり、材料のコンプライアンス係数と式(21)の関係がある。なお、実際の計算における四つの共役複素根を求める解法は、Ferrari の方法⁽¹⁵⁾を用いてプログラム化している。

$$C_{11}\xi^4 - 2C_{13}\xi^3 + (2C_{12} + C_{33})\xi^2 - 2C_{23}\xi + C_{22} \\ = C_{11}\{\xi - (a_1 + ib_1)\}\{\xi - (a_1 - ib_1)\}\{\xi - (a_2 + ib_2)\}\{\xi - (a_2 - ib_2)\} = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$a_1 + a_2 = \frac{C_{13}}{C_{11}}, \quad a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 4a_1a_2 = \frac{2C_{12} + C_{33}}{C_{11}}, \quad a_1(a_2^2 + b_2^2) + a_2(a_1^2 + b_1^2) = \frac{C_{23}}{C_{11}},$$

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = \frac{C_{22}}{C_{11}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

さらに、 a_3, b_3 には次の関係がある。

$$a_3 = -\frac{k_{12}}{k_{22}}, \quad b_3^2 = \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}{k_{22}^2}, \quad k_{12} = k_{21} \quad \dots\dots\dots (22)$$

2・2 積分方程式の導出

積分方程式の誘導は、線形微分作用素 L_{IJ} に対する基本解 $u_{jk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を式(1)の両辺に掛け、二次元空間の領域全体にわたって積分して得られる恒等式：

$$\int_S L_{IJ} u_J(\mathbf{x}) u_{Ik}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{x}) = 0 \quad (I, J, K=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (23)$$

から始めればよい。上式に発散定理を適用し、基本解の性質を考慮すれば、領域内の任意点と境界上の変位、表面力、温度、熱流束とを関係づける積分方程式を導くことができる。さらに、この式で、ソース点 $\mathbf{y}$ を境界上の任意点に移行させる極限操作を行えば、境界上の諸量を関係づける、次の境界積分方程式が求められる。

$$cu_j(\mathbf{y}) = - \int_{\Gamma} u_I(\mathbf{x}) p_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} p_I(\mathbf{x}) u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (I, J=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 $p_1(\mathbf{x})$ 、 $p_2(\mathbf{x})$ は、それぞれ x_1, x_2 方向の表面力成分である。また、 $p_3(\mathbf{x})$ は熱流束で、

$$p_3(\mathbf{x}) = k_{11} n_1 \partial_1 u_3(\mathbf{x}) + k_{12} n_2 \partial_1 u_3(\mathbf{x}) + k_{21} n_1 \partial_2 u_3(\mathbf{x}) + k_{22} n_2 \partial_2 u_3(\mathbf{x}) \quad \dots\dots\dots (25)$$

である。ここに、 n_1, n_2 は境界面上外向きの単位法線ベクトルの成分である。また、 $p_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、基本解 $u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ に対応する表面力および熱流束の基本解で、その概略を以下に示す。式(24)の係数 c は、ソース点 $\mathbf{y}$ が領域 S 内に位置するときは $c=1.0$ であり、滑らかな境界上にあるときは $c=0.5$ である。

①変位場の基本解

$$p_{hk}^* = n_l W_{lhij} u_{ik,j}^* \quad (h, i, j, k, l=1, 2)$$

$$W_{1111} = D_{11}, W_{1112} = D_{13}, W_{1121} = D_{13}, W_{1122} = D_{12},$$

$$W_{2111} = D_{13}, W_{2112} = D_{33}, W_{2121} = D_{33}, W_{2122} = D_{23},$$

$$W_{1211} = D_{13}, W_{1212} = D_{33}, W_{1221} = D_{33}, W_{1222} = D_{23},$$

$$W_{2211} = D_{12}, W_{2212} = D_{23}, W_{2221} = D_{23}, W_{2222} = D_{22} \quad \dots\dots\dots (26)$$

Fig. 1 Analysis model 1 (quad plate)

②温度場の基本解および温度場の変位場に対する影響項の基本解

$$p_{3K}^* = k_{ij} n_j u_{3K,i}^* \quad (i, j=1, 2; K=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (27)$$

3. 数値計算例と考察

本解法の有効性を検討するために、本定式化に基づいて開発した計算プログラムから得られる結果を、対応する数値解と比較する。なお、計算プログラムにおいては、計算精度の高精度化を図るために、正則化された境界積分方程式に関する二次要素の離散化手法⁽¹¹⁾⁽¹⁶⁾を用いている。また、応力の計算については、式(24)を点 $\mathbf{y}$ の座標で微分してひずみを求め、この結果を用いて応力を求めた。さらに境界の応力については、境界上の変位と表面力とを用いて、変位の接線微分の関係式等を連立させて求めた。

(1) 解析例1 図1は、正方形板の解析モデルである。ここでは、直交異方性材料の主軸が直交座標系に対して45°傾いているものとする。さらに、平面応力状態を仮定する。この場合、直交異方性材料の各材料定数(縦弾性係数 E_i 、ポアソン比 ν_{ij} 、横弾性係数 G_{ij})が

Fig. 2 Displacement u_1 [mm] (analysis model 1)

Fig. 3 Thermal stress σ_{22} [MPa] (analysis model 1)

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 0.6250 \text{ GPa}, E_2 = 0.7962 \text{ GPa}, \\
 \nu_{12} &= 0.3125, G_{12} = 0.0500 \text{ GPa}, \\
 k_1 &= 1.00 \text{ W}/(\text{mm} \cdot ^\circ\text{C}), k_2 = 2.00 \text{ W}/(\text{mm} \cdot ^\circ\text{C}), \\
 \beta_1 &= 0.0010/^\circ\text{C}, \beta_2 = 0.0015/^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

であれば、変換後の材料定数は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= 5.4750130 \times 10^{-9}, \\
 C_{12} &= -4.5249870 \times 10^{-9}, \\
 C_{13} &= 1.4997400 \times 10^{-10}, C_{22} = 5.4750130 \times 10^{-9}, \\
 C_{23} &= 1.4997400 \times 10^{-10}, C_{33} = 3.9000520 \times 10^{-9}, \\
 k_{11} &= k_{22} = 1.50 \text{ W}/(\text{mm} \cdot ^\circ\text{C}), \\
 k_{12} &= -0.50 \text{ W}/(\text{mm} \cdot ^\circ\text{C}), \\
 \beta_{11} &= 0.00125/^\circ\text{C}, \beta_{22} = 0.00125/^\circ\text{C}, \\
 \beta_{12} &= -0.00050/^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

また、境界条件は次のように設定する。

境界条件：

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0, p_2 = 0, p_3 = 0 \quad \text{at } x_1 = 0 \\
 p_1 &= 0, u_2 = 0, u_3 = 0^\circ\text{C} \quad \text{at } x_2 = 0 \\
 p_1 &= 0, p_2 = 0, p_3 = 0 \quad \text{at } x_1 = 50 \text{ mm} \\
 p_1 &= 0, u_2 = 0, u_3 = 10^\circ\text{C} \quad \text{at } x_2 = 50 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

図2, 3はそれぞれ、 $x_1 = 25 \text{ mm}$ で x_2 を変化させたときの、変位(u_1)分布、熱応力(σ_{22})分布である。図中の凡例において、BEM-Aは本解法による解、BEM-

Oは著者が先に示した直交異方性体の主軸が直交座標系に一致しない場合の解法による解⁽¹¹⁾、実線は有限要素法ソフトウェア Model Solution⁽¹⁷⁾による解である。本数値解(BEM-A)は、BEM-O解、FEM解とよく一致していることがわかる。なお、BEM-A解とBEM-O解において、要素分割は、図1に示したとおりで全く同じである。また、FEM解においては、二次四角形薄肉シェル⁽¹⁸⁾を用い要素長5mmの正方形要素で、要素を100個に分割し、直交異方性体の材料定数を用いて解析を行った。

(2) 解析例2 図4は、2領域からなる平板の解析モデルである。ここでは、異方性材料の主軸と直交座標系の x_1 軸との角度を領域1, 2についてそれぞれ 60° , 30° とした。また、境界条件は次のように設定する。

境界条件：

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0, p_2 = 0, p_3 = 0 \quad \text{at } x_1 = 0 \\
 p_1 &= 0, u_2 = 0, u_3 = 0^\circ\text{C} \quad \text{at } x_2 = -50 \text{ mm} \\
 p_1 &= 0, p_2 = 0, p_3 = 0 \quad \text{at } x_1 = 50 \text{ mm} \\
 p_1 &= 0, u_2 = 0, u_3 = 10^\circ\text{C} \quad \text{at } x_2 = 50 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

なお、数値計算にあたっては、境界および界面を図示のように40個の二次要素に分割し、平面応力状態を仮定した。界面においては、変位、温度の連続条件と表面

Fig. 4 Analysis model 2 (plate of two regions)

Fig. 5 Displacement u_1 [mm] (analysis model 2)

Fig. 6 Thermal stress σ_{22} [MPa] (analysis model 2)

力、熱流束の釣合い条件とを用いた。また、材料定数はそれぞれ領域 1, 2 に対して次のように設定した。

領域 1

$$\begin{aligned} E_1 &= 0.6250 \text{ GPa}, E_2 = 0.7692 \text{ GPa}, \\ \nu_{12} &= 0.3125, G_{12} = 0.0500 \text{ GPa}, \\ k_1 &= 1.00 \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, k_2 = 2.00 \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, \\ \beta_1 &= 0.0010 / ^\circ\text{C}, \beta_2 = 0.0015 / ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

変換後の材料定数：

$$\begin{aligned} C_{11} &= 4.3937793 \times 10^{-9}, C_{12} = -3.5187403 \times 10^{-9}, \\ C_{13} &= 3.6156223 \times 10^{-9}, C_{22} = 4.5437533 \times 10^{-9}, \\ C_{23} &= -3.3558597 \times 10^{-9}, C_{33} = 7.9250390 \times 10^{-9}, \\ k_{11} &= 1.75 \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, k_{22} = 1.25 \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, \\ k_{12} &= -4.3301270 \times 10^{-1} \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, \\ \beta_{11} &= 1.375 \times 10^{-3} / ^\circ\text{C}, \beta_{22} = 1.125 \times 10^{-3} / ^\circ\text{C}, \\ \beta_{12} &= -4.3301270 \times 10^{-4} / ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

領域 2

$$\begin{aligned} E_1 &= 1.3106 \text{ GPa}, E_2 = 0.1300 \text{ GPa}, \\ \nu_{12} &= 0.3801, G_{12} = 0.1000 \text{ GPa}, \\ k_1 &= 1.50 \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, k_2 = 1.30 \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, \\ \beta_1 &= 0.0010 / ^\circ\text{C}, \beta_2 = 0.0012 / ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

変換後の材料定数：

$$\begin{aligned} C_{11} &= 2.6762045 \times 10^{-9}, \\ C_{12} &= -4.7089046 \times 10^{-10}, \\ C_{13} &= -3.2093256 \times 10^{-9}, C_{22} = 6.1408537 \times 10^{-9}, \\ C_{23} &= -2.7916228 \times 10^{-9}, C_{33} = 9.2765175 \times 10^{-9}, \\ k_{11} &= 1.45 \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, k_{22} = 1.35 \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, \\ k_{12} &= 8.6602540 \times 10^{-2} \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, \\ \beta_{11} &= 1.05 \times 10^{-3} / ^\circ\text{C}, \beta_{22} = 1.15 \times 10^{-3} / ^\circ\text{C}, \\ \beta_{12} &= -1.7320508 \times 10^{-4} / ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

図 5, 6 はそれぞれ, $x_1 = 25 \text{ mm}$ で x_2 を変化させたときの, 変位 (u_1) 分布, 熱応力 (σ_{22}) 分布である。図において, 本数値解(BEM-A)は, BEM-O 解, FEM 解とよく一致していることがわかる。なお, BEM-A 解と BEM-O 解において, 要素分割は, 図 4 に示したとおりで全く同じである。また, FEM 解においては, 二次四角形薄肉シェルを用い要素長 5 mm の正方形要素で, 要素を 200 個に分割し, 直交異方性体の材料定数を用いて解析を行った。

(3) 解析例 3 ここでは温度場の変位場に対する影響項の基本解における係数(付録参照)が, $a_1 = a_3$ かつ $b_1 = b_3$ のときの有効性を調べるために, 解析例 1 のモデルを用いた解析結果を示す。なお, 材料定数は上の条件が成立するように(ここでは $a_1 = 6.4277124 \times 10^{-2}$, $b_1 = 9.9793209 \times 10^{-1}$ となる), 以下の値を用いている。

$$E_1 = 1.3106 \text{ GPa}, E_2 = 0.1300 \text{ GPa},$$

Fig. 7 Displacement u_1 [mm] (analysis model 3)

Fig. 8 Thermal stress σ_{22} [MPa] (analysis model 3)

$$\begin{aligned} \nu_{12} &= 0.3801, G_{12} = 0.1000 \text{ GPa}, \\ k_1 &= 1.50 \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, k_2 = 1.30 \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, \\ \beta_1 &= 0.0010 / ^\circ\text{C}, \beta_2 = 0.0012 / ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

変換後の材料定数：

$$\begin{aligned} C_{11} &= 4.4688193 \times 10^{-9}, \\ C_{12} &= -5.3118067 \times 10^{-10}, \\ C_{13} &= -3.4646492 \times 10^{-9}, C_{22} = 4.4688193 \times 10^{-9}, \\ C_{23} &= -3.4646492 \times 10^{-9}, C_{33} = 9.0353567 \times 10^{-9}, \\ k_{11} &= k_{22} = 1.00 \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, \\ k_{12} &= -6.4277124 \times 10^{-2} \text{ W/(mm} \cdot ^\circ\text{C)}, \\ \beta_{11} &= \beta_{22} = 1.10 \times 10^{-3} / ^\circ\text{C}, \beta_{12} = -2.00 \times 10^{-4} / ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

図 7, 8 はそれぞれ, $x_1 = 25 \text{ mm}$ で x_2 を変化させたときの, 変位 (u_1) 分布, 熱応力 (σ_{22}) 分布である。図において, 本数値解(BEM-A)は, BEM-O 解, FEM 解とよく一致していることがわかる。

4. 結 言

本報では, 異方性体の二次元定常熱弾性問題に対して, 境界要素法の定式化として, 基本解と積分方程式を示した。この定式化に基づいて開発した計算プログラムを用いて例題解析を行い, 本解と先に著者らが示した直交異方性体の主軸が直交座標系に一致しない場合の解法による解, および FEM 解とを比較して本解

法の有効性を確認した。これにより、境界要素法の特 次元定常熱弾性解析が可能となった。
長である境界のみの要素分割によって、異方性体の二

付 録

①変位場の基本解の係数

$$A_{ijl} = -\frac{1}{2\pi C_{11}H_{12}} [C_{Oijk}A_{Slk}], \quad B_{ijl} = \frac{1}{2\pi C_{11}H_{12}} [C_{Oijk}B_{Slk}] \quad (i, j, l=1, 2; K=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\begin{aligned} C_{O111} &= -C_{12}^2 + C_{11}C_{22}, \quad C_{O112} = 2(C_{12}C_{13} - C_{11}C_{23}), \quad C_{O113} = -C_{13}^2 + C_{11}C_{33}, \\ C_{O121} &= -(C_{13}C_{22} + C_{12}C_{23}), \quad C_{O122} = -(C_{13}C_{23} - C_{12}C_{33} - C_{12}^2 + C_{11}C_{22}), \quad C_{O123} = -(C_{12}C_{13} - C_{11}C_{23}), \\ C_{O221} &= -C_{23}^2 + C_{22}C_{33}, \quad C_{O222} = 2(-C_{13}C_{22} + C_{12}C_{23}), \quad C_{O223} = -C_{12}^2 + C_{11}C_{22} \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{S11} &= \frac{(a_1 - a_2)^2 - (b_1^2 - b_2^2)}{b_1}, \quad A_{S12} = \frac{a_1(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2) - 2a_2(a_1^2 + b_1^2)}{b_1}, \\ A_{S13} &= \frac{2a_1(a_1 - a_2)(a_1^2 + b_1^2) + (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) - (a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 + b_1^2)}{b_1}, \\ A_{S21} &= \frac{(a_2 - a_1)^2 - (b_2^2 - b_1^2)}{b_2}, \quad A_{S22} = \frac{a_2(a_2^2 + a_1^2 + b_2^2 + b_1^2) - 2a_1(a_2^2 + b_2^2)}{b_2}, \\ A_{S23} &= \frac{2a_2(a_2 - a_1)(a_2^2 + b_2^2) + (a_2^2 - b_2^2)(a_1^2 + b_1^2) - (a_2^2 - b_2^2)(a_2^2 + b_2^2)}{b_2}, \\ B_{S11} &= -2(a_1 - a_2), \quad B_{S12} = -a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 + b_2^2, \quad B_{S13} = 2a_1(a_2^2 + b_2^2) - 2a_2(a_1^2 + b_1^2), \\ B_{S21} &= -2(a_2 - a_1), \quad B_{S22} = -a_2^2 + a_1^2 - b_2^2 + b_1^2, \quad B_{S23} = 2a_2(a_1^2 + b_1^2) - 2a_1(a_2^2 + b_2^2), \\ H_{12} &= (a_1 - a_2)^4 + 2(b_1^2 + b_2^2)(a_1 - a_2)^2 + (b_1^2 - b_2^2)^2 \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

②温度場の変位場に対する影響項の基本解の係数

(I) $a_1 \neq a_3$ または $b_1 \neq b_3$ のとき

$$F_{ijk} = \eta_{klm} Q_{ilj} P_{jmi}, \quad G_{ijk} = \eta_{klm} Q_{ilj} R_{jmi} \quad (i, j=1, 2; I, K, L, M=1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\eta_{klm} = \begin{cases} 1 (K=L=M) \\ 0 (\text{other}) \end{cases} \quad (K, L, M=1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$Q_{i1I} = Q_{i3I}, \quad Q_{i2I} = Q_{i4I} \quad (i=1, 2; I=1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$Q_{iIK} = \rho \eta_{klm} Q_{ilj} Q_{gmlj} \quad (i, j, l=1, 2; K, L, M=1, 2, 3, 4), \quad \rho = \frac{1}{4\pi H_{12} C_{11} k_{22}} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$\begin{aligned} Q_{S11j} &= Q_{S13j}, \quad Q_{S12j} = Q_{S14j}, \quad Q_{S111} = -(-\beta_{11}C_{22} + \beta_{22}C_{12}), \quad Q_{S112} = -\{-\beta_{11}(C_{12} + C_{33}) + \beta_{22}C_{11} + \beta_{12}C_{13}\}, \\ Q_{S121} &= -(2\beta_{11}C_{23} - \beta_{22}C_{13} - \beta_{12}C_{12}), \quad Q_{S122} = -(\beta_{11}C_{13} - \beta_{12}C_{11}), \quad Q_{S211} = -(\beta_{22}C_{23} - \beta_{12}C_{22}), \\ Q_{S212} &= -(2\beta_{22}C_{13} - \beta_{11}C_{23} - \beta_{12}C_{12}), \\ Q_{S221} &= -\{\beta_{11}C_{22} - \beta_{22}(C_{12} + C_{33}) + \beta_{12}C_{23}\}, \quad Q_{S222} = -(\beta_{11}C_{12} - \beta_{22}C_{11}) \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Qg_{1ij} &= Qg_{2ij}, \quad Qg_{3ij} = Qg_{4ij}, \quad Qg_{111} = \{(a_1 - a_2)(3a_1 - a_2) - b_1^2 + b_2^2\}/H_{13}, \\ Qg_{112} &= \{(a_1^2 + b_1^2)(a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2)\}/H_{13}, \\ Qg_{311} &= -2(a_1 - a_2)/H_{13}, \quad Qg_{312} = 2\{a_1(a_2^2 + b_2^2) - a_2(a_1^2 + b_1^2)\}/H_{13}, \\ Qg_{121} &= \{(a_2 - a_1)(3a_2 - a_1) - b_2^2 + b_1^2\}/H_{23}, \quad Qg_{122} = \{(a_2^2 + b_2^2)(a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2)\}/H_{23}, \\ Qg_{321} &= -2(a_2 - a_1)/H_{23}, \quad Qg_{322} = 2\{a_2(a_1^2 + b_1^2) - a_1(a_2^2 + b_2^2)\}/H_{23}, \end{aligned}$$

$$H_{13} = (a_1 - a_3)^4 + 2(b_1^2 + b_3^2)(a_1 - a_3)^2 + (b_1^2 - b_3^2)^2, \quad H_{23} = (a_2 - a_3)^4 + 2(b_2^2 + b_3^2)(a_2 - a_3)^2 + (b_2^2 - b_3^2)^2 \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\begin{aligned} P_{111} &= 2\{(a_1 - a_3)^2 - b_1^2 + b_3^2\}/b_1, \quad P_{112} = P_{113} = 2\{(a_1 - 2a_3)(a_1^2 + b_1^2) + a_1(a_3^2 + b_3^2)\}/b_1, \\ P_{114} &= 2\{2a_1(a_1 - a_3)(a_1^2 + b_1^2) + (a_1^2 - b_1^2)(a_3^2 + b_3^2) - (a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 + b_1^2)\}/b_1, \\ P_{121} &= 2\{(a_2 - a_3)^2 - b_2^2 + b_3^2\}/b_2, \quad P_{122} = P_{123} = 2\{(a_2 - 2a_3)(a_2^2 + b_2^2) + a_2(a_3^2 + b_3^2)\}/b_2, \\ P_{124} &= 2\{2a_2(a_2 - a_3)(a_2^2 + b_2^2) + (a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 + b_3^2) - (a_2^2 - b_2^2)(a_2^2 + b_2^2)\}/b_2, \\ P_{131} &= 2\{(a_3 - a_1)^2 - b_3^2 + b_1^2\}/b_3, \quad P_{132} = P_{133} = 2\{(a_3 - 2a_1)(a_3^2 + b_3^2) + a_3(a_1^2 + b_1^2)\}/b_3, \\ P_{134} &= 2\{2a_3(a_3 - a_1)(a_3^2 + b_3^2) + (a_3^2 - b_3^2)(a_1^2 + b_1^2) - (a_3^2 - b_3^2)(a_3^2 + b_3^2)\}/b_3, \\ P_{141} &= 2\{(a_3 - a_2)^2 - b_3^2 + b_2^2\}/b_3, \quad P_{142} = P_{143} = 2\{(a_3 - 2a_2)(a_3^2 + b_3^2) + a_3(a_2^2 + b_2^2)\}/b_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{144} &= 2\{2a_3(a_3 - a_2)(a_3^2 + b_3^2) + (a_3^2 - b_3^2)(a_2^2 + b_2^2) - (a_3^2 - b_3^2)(a_3^2 + b_3^2)\}/b_3, \\
P_{211} &= 2\{(a_1 - 2a_3)(a_1^2 + b_1^2) + a_1(a_3^2 + b_3^2)\}/b_1, \\
P_{212} &= P_{213} = 2\{2a_1(a_1 - a_3)(a_1^2 + b_1^2) + (a_1^2 - b_1^2)(a_3^2 + b_3^2) - (a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 + b_1^2)\}/b_1, \\
P_{214} &= 2\{2a_1^3(a_1^2 + b_1^2) - 3a_1b_1^2(a_3^2 + b_3^2) - 2a_3(a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 + b_1^2) + a_1^3(a_3^2 + b_3^2) - a_1(a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 + b_1^2)\}/b_1, \\
P_{221} &= 2\{(a_2 - 2a_3)(a_2^2 + b_2^2) + a_2(a_3^2 + b_3^2)\}/b_2, \\
P_{222} &= P_{223} = 2\{2a_2(a_2 - a_3)(a_2^2 + b_2^2) + (a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 + b_3^2) - (a_2^2 - b_2^2)(a_2^2 + b_2^2)\}/b_2, \\
P_{224} &= 2\{2a_2^3(a_2^2 + b_2^2) - 3a_2b_2^2(a_3^2 + b_3^2) - 2a_3(a_2^2 - b_2^2)(a_2^2 + b_2^2) + a_2^3(a_3^2 + b_3^2) - a_2(a_2^2 - b_2^2)(a_2^2 + b_2^2)\}/b_2, \\
P_{231} &= 2\{(a_3 - 2a_1)(a_3^2 + b_3^2) + a_3(a_1^2 + b_1^2)\}/b_3, \\
P_{232} &= P_{233} = 2\{2a_3(a_3 - a_1)(a_3^2 + b_3^2) + (a_3^2 - b_3^2)(a_1^2 + b_1^2) - (a_3^2 - b_3^2)(a_3^2 + b_3^2)\}/b_3, \\
P_{234} &= 2\{2a_3^3(a_3^2 + b_3^2) - 3a_3b_3^2(a_1^2 + b_1^2) - 2a_1(a_3^2 - b_3^2)(a_3^2 + b_3^2) + a_3^3(a_1^2 + b_1^2) - a_3(a_3^2 - b_3^2)(a_3^2 + b_3^2)\}/b_3, \\
P_{241} &= 2\{(a_3 - 2a_2)(a_3^2 + b_3^2) + a_3(a_2^2 + b_2^2)\}/b_3, \\
P_{242} &= P_{243} = 2\{2a_3(a_3 - a_2)(a_3^2 + b_3^2) + (a_3^2 - b_3^2)(a_2^2 + b_2^2) - (a_3^2 - b_3^2)(a_3^2 + b_3^2)\}/b_3, \\
P_{244} &= 2\{2a_3^3(a_3^2 + b_3^2) - 3a_3b_3^2(a_2^2 + b_2^2) - 2a_2(a_3^2 - b_3^2)(a_3^2 + b_3^2) + a_3^3(a_2^2 + b_2^2) - a_3(a_3^2 - b_3^2)(a_3^2 + b_3^2)\}/b_3 \quad \cdots (37) \\
R_{111} &= 4(a_1 - a_3), \quad R_{112} = R_{113} = -2(-a_1^2 - b_1^2 + a_3^2 + b_3^2), \quad R_{114} = 4\{a_3(a_1^2 + b_1^2) - a_1(a_3^2 + b_3^2)\}, \\
R_{121} &= 4(a_2 - a_3), \quad R_{122} = R_{123} = -2(-a_2^2 - b_2^2 + a_3^2 + b_3^2), \quad R_{124} = 4\{a_3(a_2^2 + b_2^2) - a_2(a_3^2 + b_3^2)\}, \\
R_{131} &= 4(a_3 - a_1), \quad R_{132} = R_{133} = -2(-a_3^2 - b_3^2 + a_1^2 + b_1^2), \quad R_{134} = 4\{a_1(a_3^2 + b_3^2) - a_3(a_1^2 + b_1^2)\}, \\
R_{141} &= 4(a_3 - a_2), \quad R_{142} = R_{143} = -2(-a_3^2 - b_3^2 + a_2^2 + b_2^2), \quad R_{144} = 4\{a_2(a_3^2 + b_3^2) - a_3(a_2^2 + b_2^2)\}, \\
R_{211} &= -2(-a_1^2 - b_1^2 + a_3^2 + b_3^2), \quad R_{212} = R_{213} = 4\{a_3(a_1^2 + b_1^2) - a_1(a_3^2 + b_3^2)\}, \\
R_{214} &= 2\{-2a_1(a_1 - 2a_3)(a_1^2 + b_1^2) + (-3a_1^2 + b_1^2)(a_3^2 + b_3^2) + (a_1^2 + b_1^2)(a_1^2 - b_1^2)\}, \\
R_{221} &= -2(-a_2^2 - b_2^2 + a_3^2 + b_3^2), \quad R_{222} = R_{223} = 4\{a_3(a_2^2 + b_2^2) - a_2(a_3^2 + b_3^2)\}, \\
R_{224} &= 2\{-2a_2(a_2 - 2a_3)(a_2^2 + b_2^2) + (-3a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2) + (a_2^2 + b_2^2)(a_2^2 - b_2^2)\}, \\
R_{231} &= -2(-a_3^2 - b_3^2 + a_1^2 + b_1^2), \quad R_{232} = R_{233} = 4\{a_1(a_3^2 + b_3^2) - a_3(a_1^2 + b_1^2)\}, \\
R_{234} &= 2\{-2a_3(a_3 - 2a_1)(a_3^2 + b_3^2) + (-3a_3^2 + b_3^2)(a_1^2 + b_1^2) + (a_3^2 + b_3^2)(a_3^2 - b_3^2)\}, \\
R_{241} &= -2(-a_3^2 - b_3^2 + a_2^2 + b_2^2), \quad R_{242} = R_{243} = 4\{a_2(a_3^2 + b_3^2) - a_3(a_2^2 + b_2^2)\}, \\
R_{244} &= 2\{-2a_3(a_3 - 2a_2)(a_3^2 + b_3^2) + (-3a_3^2 + b_3^2)(a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2)(a_3^2 - b_3^2)\} \quad \cdots (38)
\end{aligned}$$

(II) $a_1 = a_3$ かつ $b_1 = b_3$ のとき (変更箇所のみ)

$$H_{13} = 2b_1^3 \quad \cdots (39)$$

$$P_{111} = P_{112} = P_{113} = P_{114} = 0,$$

$$P_{131} = 2, \quad P_{132} = P_{133} = 2a_1, \quad P_{134} = 2(a_1^2 + b_1^2),$$

$$P_{211} = P_{212} = P_{213} = P_{214} = 0,$$

$$P_{231} = 2a_1, \quad P_{232} = P_{233} = 2(a_1^2 + b_1^2),$$

$$P_{234} = 2(a_1^3 + 3a_1b_1^2)$$

 $\cdots (40)$

$$R_{111} = R_{112} = R_{113} = R_{114} = 0,$$

$$R_{131} = R_{132} = R_{133} = R_{134} = 0,$$

$$R_{211} = R_{212} = R_{213} = R_{214} = 0,$$

$$R_{231} = R_{232} = R_{233} = 0, \quad R_{234} = -4b_1^3$$

 $\cdots (41)$

文 献

- (1) 徐日教・登坂宣好, 境界要素法論文集, 4(1987), 99-104.
- (2) 登坂宣好, 境界要素法論文集, 3(1986), 207-212.
- (3) Tanaka, M., Togoh, H. and Kikuta, M. (Brebbia, C. A. 編), *Topics in Boundary Element Research*, 1(1984), 59-77, Springer Verlag.
- (4) Chaudouet, A., *Int. J. Num. Methods Eng.*, 24(1987), 25-45.
- (5) Dargush, G. F. and Banerjee, P. K. (Banerjee, P. K. and Wilson, R. B. 編), *Developments in Boundary Element Methods*, 5, (1989), 119-156, Elsevier Appl. Sci.
- (6) 石黒周司・田中正隆, 機論, 57-544, A(1991), 2999-3004.
- (7) 関谷壮・落合芳博・石田良平, 境界要素法による熱応力解析, (1992), 33-56, 森北出版.
- (8) 松本敏郎・田中正隆・小笹山弘之, 機講論, No. 940-37, A(1994-10), 80-81.
- (9) Deb, A., Henry, Jr. D. P. and Wilson, R. B., *Int. J. Solids Struct.*, 27-13(1991), 1721-1738.
- (10) 石黒周司・田中正隆, 機論, 60-569, A(1994), 205-211.
- (11) 石黒周司・田中正隆, 機論, 62-595, A(1996), 713-719.
- (12) Hörmander, L., *Acta Mathematica*, 94(1955), 161.
- (13) Cruse, T. A. and Sedlow, J. L., *Air Force Rep.*, No. AFML TR-71-268(1971).
- (14) Chang, Y. P., Kang, C. S. and Chen, D. J., *Int. J. Heat Mass Transfer*, 16(1973), 1905-1918.
- (15) 大野豊・磯田和男(監修), 新版数値計算ハンドブック, (1990), 595-600.
- (16) 松本敏郎・田中正隆, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, (1991), 7-12.
- (17) *I DEAS Model Solution and I DEAS Optimization User's Guide*, (1990), SDRC.
- (18) 文献(17)の18-88-18-91ページ.