面外せん断荷重下における多層の等方性楕円形リング介在物を有する
異方性弾性体の解析解とその数値計算例*池田 然之^{*1}, 平島 健一^{*2}, 木村 清和^{*3}Analysis of Anisotropic Elastic Medium with Multilayered Isotropic Elliptic
Ring Inclusions under Out-of-Plane Shear Loading at Infinity

Zenji IKEDA, Ken-ichi HIRASHIMA and Kiyokazu KIMURA

This paper presents the closed-form solutions of a two-dimensional anisotropic elastic medium (matrix) containing isotropic elastic multilayered elliptic ring inclusions under uniform out-of-plane shear stresses at infinity. This analysis is based on the complex variable method using a conformal mapping technique and analytical continuations, and allows some sliding boundary conditions among the elastic rings, inner inclusion and the matrix. Using these solutions, we demonstrate the effects of the number, elastic properties and sliding parameters of various multilayered isotropic elastic rings on the distribution of stresses and displacements.

Key Words: Anisotropic Elasticity, Out-of-Plane Shear Loading, Multilayered Isotropic Elliptic Rings, Perfect Bonding or Sliding Boundary, Stress Intensity (Singularity) Factor, Inclusion

1. 緒言

著者らは先に、Wu らの等方性媒体に埋設された一層の共焦点楕円形介在物内のクラック問題の理論⁽¹⁾を一般化し、無限遠から作用する面外せん断荷重下での等方性楕円形リングを有する等方性弾性体の解析解と数値計算例を提示した⁽²⁾⁽³⁾。

本論文では上述の成果をさらに拡張し、より一般的な場合として、同一共焦点の多層の等方性楕円形リングと最も内側に中実の等方性弾性介在物(特殊な場合として、空孔または剛体介在物の場合を含む)を有する異方性弾性体の問題を対象とする。ここでは、異方性弾性体の弾性主軸が座標軸と一致する場合のみばかりではなく、 xy 面内に任意に傾斜している場合についても対象とする。

本論文の特徴としては、等方性楕円形リング介在物の層数が数十ないし百層以上であっても、連立方程式や代数方程式などを解くといった数値的操作は一切必要ではなく、極めて簡単な閉じた型の厳密な代数的解析解が得られるように構成されていることである。また、得られた解をもとにして、最も内側の境界が直線状クラックあるいは直線状剛体介在物の場合の応力拡大(特異)係数の理論解を示す。

2. 基礎方程式と解析解

2.1 応力・変位を求める公式 本論文においては図1(a)に示すように、奥行き方向に十分長く断面形状の変化のない同一の共焦点楕円形境界が多数存在し、無限遠より一様な面外せん断荷重が作用する問題を取り扱う。異方性の母材(Matrix)および等方性の共焦点楕円形多層リング介在物の各境界をそれぞれ外側から $L_1, L_2, \dots, L_{M-1}$ とし、 L_{M-1} の内側は楕円形中実介在物の場合、および中空または剛体(固定)の場合について系統的な取り扱いがなされる。

なお、 L_{M-1} の内側が中実介在物の場合には、後の解析上の必要性から、 x 軸上の共焦点間の直線を境界 L_M とする。他方、 L_{M-1} の内側が自由境界(中空)または剛体境界(固定)の場合には境界 L_M の設定の必要はなくなる。

本論文で取り扱う無限遠からの一様な面外せん断荷重 τ_{xz}^∞ , τ_{yz}^∞ の下での応力、変位成分は xy -平面に垂直な方向の座標を z として、せん断応力 τ_{xz} , τ_{yz} および変位 u_z であり、いずれも面内座標系 (x, y) のみの関数となる。

弾性主軸が座標軸と一致していない異方性母材および等方性多層リングに対する物体力を無視した釣合式、幾何式および構成式は次式のように与えられる。

$$\frac{\partial \tau_{xz}^n}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^n}{\partial y} = 0, \dots \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz}^n &= \frac{\partial u_z^n}{\partial y} = a_{44}^n \tau_{yz}^n + a_{45}^n \tau_{xz}^n, \\ \gamma_{xz}^n &= \frac{\partial u_z^n}{\partial x} = a_{45}^n \tau_{yz}^n + a_{55}^n \tau_{xz}^n. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、母材、多層リングおよび最も内側の介在物の弾性コンプライアンス $a_{44}^n, a_{45}^n, a_{55}^n$ は、それぞれ外側から $n = 1, 2, \dots, M$ とすると次のように表示できる。

$$\left. \begin{aligned} a_{44}^n &= \frac{\cos^2 \phi_0}{G_{23}^n} + \frac{\sin^2 \phi_0}{G_{13}^n}, \quad a_{55}^n = \frac{\sin^2 \phi_0}{G_{23}^n} + \frac{\cos^2 \phi_0}{G_{13}^n}, \\ a_{45}^n &= \left(\frac{1}{G_{23}^n} - \frac{1}{G_{13}^n} \right) \cos \phi_0 \sin \phi_0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

* 原稿受付 1996 年 12 月 11 日。

*¹ 山梨大学大学院(〒400 甲府市武田 4-3-11)。*² 正員、山梨大学工学部。*³ 正員、群馬工業高等専門学校(〒371 前橋市鳥羽町 580)。

NTT-Electronic Library Service

$$\left. \begin{aligned} P_1^+|_{\rho=1} &= \frac{1}{2i} \left\{ F_1^+(\zeta_3) - \bar{F}_1^+ \left(\frac{1}{\zeta_3} \right) \right\}, \\ P_2^+|_{\rho=1} &= \frac{1}{2i} \left\{ F_2^-(\zeta) - \bar{F}_2^- \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} u_z^1|_{\rho=1} &= -\frac{1}{2i} \left\{ (a_{45}^1 - a_{55}^1 \mu_3^1) F_1^+(\zeta_3) \right. \\ &\quad \left. - (a_{45}^1 - a_{55}^1 \bar{\mu}_3^1) \bar{F}_1^+ \left(\frac{1}{\zeta_3} \right) \right\}, \\ u_z^2|_{\rho=1} &= -\frac{1}{2G_0^2} \left\{ F_2^-(\zeta) + \bar{F}_2^- \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $F_1^+(\zeta_3)$ は媒体の応力関数 $F_1(\zeta_3)$ の境界 L_1 上の値を、また $F_2^-(\zeta)$ は 1 番目の楕円形リングの L_1 上での値を示す。しかるに、境界 L_1 上での境界条件式 (13) から、次式が成立する。

$$F_1^+(\zeta_3) - \bar{F}_1^+ \left(\frac{1}{\zeta_3} \right) = F_2^-(\zeta) - \bar{F}_2^- \left(\frac{1}{\zeta} \right), \text{ on } \rho = \rho_1 (=1). \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\gamma_1}{i} \left\{ (a_{45}^1 - a_{55}^1 \mu_3^1) F_1^+(\zeta_3) - (a_{45}^1 - a_{55}^1 \bar{\mu}_3^1) \bar{F}_1^+ \left(\frac{1}{\zeta_3} \right) \right\} \\ & = \frac{1}{G_0^2} \left\{ F_2^-(\zeta) + \bar{F}_2^- \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\}, \text{ on } \rho = \rho_1 (=1). \end{aligned} \quad (17)$$

同様に、上述の結果を一般化して、境界 $L_n (n=2, \dots, M-1)$ 上においては、次式が成立することになる。

$$\begin{aligned} F_n^+(\zeta) - \bar{F}_n^+ \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) &= F_{n+1}^-(\zeta) - \bar{F}_{n+1}^- \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right), \\ & \text{on } \rho = \rho_n. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_n}{G_0^n} \left\{ F_n^+(\zeta) + \bar{F}_n^+ \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \right\} &= \frac{1}{G_0^{n+1}} \left\{ F_{n+1}^-(\zeta) + \bar{F}_{n+1}^- \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \right\}, \\ & \text{on } \rho = \rho_n. \end{aligned} \quad (19)$$

式 (16) ~ (19) から、 $\bar{F}_1^+(1/\zeta_3)$, $\bar{F}_n^+(\rho_n^2/\zeta)$ を消去すれば、次式 (20), (21) の第 1 式が、また同様に $\bar{F}_2^-(1/\zeta)$, $\bar{F}_{n+1}^-(\rho_n^2/\zeta)$ を消去すれば、次式 (20), (21) の第 2 式がそれぞれ得られる。

$$\left. \begin{aligned} F_1^+(\zeta_3) &= \frac{1}{1+K_1} \left\{ F_2^-(\zeta) - K_1 \times \bar{F}_2^- \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\}, \\ F_2^-(\zeta) &= \frac{1}{1-K_1} \left\{ F_1^+(\zeta_3) + K_1 \times \bar{F}_1^+ \left(\frac{1}{\zeta_3} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} F_n^+(\zeta) &= \frac{1}{1+K_n} \left\{ F_{n+1}^-(\zeta) - K_n \times \bar{F}_{n+1}^- \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \right\}, \\ F_{n+1}^-(\zeta) &= \frac{1}{1-K_n} \left\{ F_n^+(\zeta) + K_n \times \bar{F}_n^+ \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \dots\dots (21)$$

on $L_n (n=2, \dots, M-1)$.

ここに、 K_n は次式で与えられる実定数である。

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{\gamma_1 \sqrt{a_{44}^1 a_{55}^1 - (a_{45}^1)^2} - 1/G_0^2}{\gamma_1 \sqrt{a_{44}^1 a_{55}^1 - (a_{45}^1)^2} + 1/G_0^2}, \\ K_n &= \frac{\gamma_n/G_0^n - 1/G_0^{n+1}}{\gamma_n/G_0^n + 1/G_0^{n+1}}, \quad (n=2, \dots, M-1). \end{aligned} \right\} \dots\dots (22)$$

ここで、式 (20)₂, (21)₂ で与えられた基本関数の境界での値 $F_{n+1}^-(\zeta)$ を解析接続によって、境界 L_n の内側領域に一般化した関数を ${}_0F_2(\zeta)$, ${}_0F_{n+1}(\zeta)$ と書くものとすれば、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} {}_0F_2(\zeta) &= \frac{1}{1-K_1} \left\{ {}_0F_1(\zeta_3) + K_1 \times {}_0\bar{F}_1 \left(\frac{1}{\zeta_3} \right) \right\}, \\ {}_0F_{n+1}(\zeta) &= \frac{1}{1-K_n} \left\{ {}_0F_n(\zeta) + K_n \times {}_0\bar{F}_n \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots (23)$$

同様に、式 (20)₁, (21)₁ で与えられた基本関数の境界での値 $F_n^+(\zeta)$ を解析接続によって、境界 L_n の外側領域に一般化した関数を ${}_rF_1(\zeta_3)$, ${}_rF_n(\zeta)$ と書くものとすれば、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} {}_rF_1(\zeta_3) &= \frac{1}{1+K_1} \left\{ {}_rF_2(\zeta) - K_1 \times {}_r\bar{F}_2 \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\}, \\ {}_rF_n(\zeta) &= \frac{1}{1+K_n} \left\{ {}_rF_{n+1}(\zeta) - K_n \times {}_r\bar{F}_{n+1} \left(\frac{\rho_n^2}{\zeta} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots (24)$$

また、 $n=M$ の場合の境界 L_M は ζ 平面上の半径 $\rho_M = \sqrt{m}$ の円に写像されることになるが、ここでの境界条件式を満たすための解析接続は、共焦点間の x 軸上に沿う上下での関数の連続性の要請から、次式で表される。

$${}_rF_M(\zeta) = {}_0F_M \left(\frac{m}{\zeta} \right). \dots\dots\dots (25)$$

ところで、境界 L_1 の外側の母材の無限領域に関する関数 ${}_0F_1(\zeta_3)$ は無限遠で作用する一様な面外荷重の設定から、主要部として次式のように、 ζ_3 の 1 次の項を採用すればよい。

$${}_0F_1(\zeta_3) = A\omega_3(\zeta_3) \approx AR_0^* \zeta_3. \dots\dots\dots (26)$$

したがって、各領域の解析関数 $F_1(\zeta_3)$, $F_n(\zeta)$, ($n=2, \dots, M$) は上式までの解析接続法により求められた 2 種類の関数 ${}_0F_1(\zeta_3)$, ${}_0F_n(\zeta)$ および ${}_rF_1(\zeta_3)$, ${}_rF_n(\zeta)$ を重ね合わせることに、最終的に次式のように求められる。

$$\begin{aligned} F_1(\zeta_3) &= {}_0F_1(\zeta_3) + {}_rF_1(\zeta_3) \\ &= (B_{11}\zeta_3 + B_{41}/\zeta_3)AR_0^* + (B_{31}\zeta_3 + B_{21}/\zeta_3)\bar{A}\bar{R}_0^*. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} F_n(\zeta) &= {}_0F_n(\zeta) + {}_rF_n(\zeta) = \prod_{r=1}^{n-1} \left[\frac{1}{1-K_r} \right] \\ &\quad \times \left\{ (B_{1n}\zeta + B_{4n}/\zeta)AR_0^* + (B_{3n}\zeta + B_{2n}/\zeta)\bar{A}\bar{R}_0^* \right\}, \\ &\quad (n=2, \dots, M). \end{aligned} \quad (28)$$

なお、上式中の係数 B_{jn} , ($j=1, \dots, 4$) は、それぞれせん断弾性係数 G_{13}^n , G_{23}^n 、すべり係数 γ_n および楕円形状パラメータ a_n , b_n によって定められる実定数であり、最終的に次式のように得られる。ここで、式中の係数 δ_{jn} はクロネッカーのデルタである。

$$\begin{aligned} B_{1n} &= \delta_{1n} + \delta_{2n} + (1-\delta_{1n})(1-\delta_{2n}) \\ &\quad \times \left\{ (1+K_1K_2/\rho_2^2) \times f_n^1 + (K_1+K_2\rho_2^2) \times \bar{f}_n^1 \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} B_{2n} &= \delta_{2n}K_1 + (1-\delta_{1n})(1-\delta_{2n}) \\ &\quad \times \left\{ (1+K_1K_2/\rho_2^2) \times f_n^2 + (K_1+K_2\rho_2^2) \times \bar{f}_n^2 \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} B_{3n} &= - \left\{ \delta_{nM} + (1-\delta_{nM}) \prod_{r=n}^{M-1} \left[\frac{1}{1-K_r^2} \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ mB_{1M}C_{1n}^M - \frac{1}{m}B_{2M}C_{2n}^M \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

$$B_{4n} = \left\{ \delta_{nM} + (1 - \delta_{nM}) \prod_{r=n}^{M-1} \left[\frac{1}{1 - K_r^2} \right] \right\} \times \left\{ m B_{1M} C_{3n}^M - \frac{1}{m} B_{2M} C_{4n}^M \right\} \cdot \dots \quad (32)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} C_{1n}^M &= \delta_{n(M-1)} K_n / \rho_n^2 + (1 - \delta_{nM}) (1 - \delta_{n(M-1)}) \\ &\quad \times \{ (1 + K_n K_{n+1} \rho_{n+1}^2 / \rho_n^2) \times g_n^{M1} \\ &\quad + (K_n / \rho_n^2 + K_{n+1} / \rho_{n+1}^2) \times g_n^{M2} \}, \\ C_{2n}^M &= \delta_{nM} + \delta_{n(M-1)} + (1 - \delta_{nM}) (1 - \delta_{n(M-1)}) \\ &\quad \times \{ (1 + K_n K_{n+1} \rho_{n+1}^2 / \rho_n^2) \times \hat{g}_n^{M1} \\ &\quad + (K_n / \rho_n^2 + K_{n+1} / \rho_{n+1}^2) \times \hat{g}_n^{M2} \}, \\ C_{3n}^M &= \delta_{nM} + \delta_{n(M-1)} + (1 - \delta_{nM}) (1 - \delta_{n(M-1)}) \\ &\quad \times \{ (1 + K_n K_{n+1} \rho_{n+1}^2 / \rho_n^2) \times g_n^{M2} \\ &\quad + (K_n \rho_n^2 + K_{n+1} \rho_{n+1}^2) \times g_n^{M1} \}, \\ C_{4n}^M &= \delta_{n(M-1)} K_n \rho_n^2 + (1 - \delta_{nM}) (1 - \delta_{n(M-1)}) \\ &\quad \times \{ (1 + K_n K_{n+1} \rho_{n+1}^2 / \rho_n^2) \times \hat{g}_n^{M2} \\ &\quad + (K_n \rho_n^2 + K_{n+1} \rho_{n+1}^2) \times \hat{g}_n^{M1} \}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} f_3^1 &= \hat{f}_3^2 = 1, \quad \hat{f}_3^1 = f_3^2 = 0, \\ f_n^1 &= f_{n-1}^1 + f_{n-1}^2 K_{n-1} / \rho_{n-1}^2, \\ \hat{f}_n^1 &= \hat{f}_{n-1}^1 + \hat{f}_{n-1}^2 K_{n-1} / \rho_{n-1}^2, \\ f_n^2 &= f_{n-1}^2 + f_{n-1}^1 K_{n-1} \rho_{n-1}^2, \\ \hat{f}_n^2 &= \hat{f}_{n-1}^2 + \hat{f}_{n-1}^1 K_{n-1} \rho_{n-1}^2. \end{aligned} \right\} \dots \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{M-2}^{M1} &= \hat{g}_{M-2}^{M2} = 0, \quad \hat{g}_{M-2}^{M1} = g_{M-2}^{M2} = 1, \\ g_n^{M1} &= g_{n+1}^{M1} + g_{n+1}^{M2} K_{n+2} / \rho_{n+2}^2, \\ \hat{g}_n^{M1} &= \hat{g}_{n+1}^{M1} + \hat{g}_{n+1}^{M2} K_{n+2} / \rho_{n+2}^2, \\ g_n^{M2} &= g_{n+1}^{M2} + g_{n+1}^{M1} K_{n+2} \rho_{n+2}^2, \\ \hat{g}_n^{M2} &= \hat{g}_{n+1}^{M2} + \hat{g}_{n+1}^{M1} K_{n+2} \rho_{n+2}^2. \end{aligned} \right\} \dots \quad (35)$$

上式の係数 $f_n^j, \hat{f}_n^j$ は漸化式的に、 n の小さい方から大きい方に向かって逐次決定されるのに対し、 $g_n^{Mj}, \hat{g}_n^{Mj}$ の方は n の大きい方から小さい方に向かって逐次決定される。これらから式 (27), (28) の係数 B_{jn} が式 (29) ~ (32) により求められることになる。

最後に、式 (27), (28) の係数 A を決定するために、母材領域に対する解析関数 $F_1(\zeta_3)$ に着目し、荷重条件としては、式 (26) の設定の際に想定した無限遠での面外せん断荷重 $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$ が作用するものとすれば、式 (10) より次式が成立する。

$$\frac{2i}{\mu_3^1 - \mu_3^2} (\tau_{xz}^\infty + \mu_3^1 \tau_{yz}^\infty) = \frac{F_1'(\zeta_3)}{\omega'(\zeta_3)} \Big|_{|\zeta_3|=\infty} = \frac{B_{11} A R_0^* + B_{31} \overline{A R_0^*}}{R_0^*} \cdot \dots \quad (36)$$

これより、複素係数 A は次のように求められる。

$$A = \frac{2i}{(\mu_3^1 - \mu_3^2)(B_{11}^* - B_{31}^*)} \times \left\{ (B_{11} - B_{31}) \frac{\overline{R_0^*}}{R_0^*} \tau_{xz}^\infty + (\mu_3^1 B_{11} - \mu_3^2 B_{31}) \frac{\overline{R_0^*}}{R_0^*} \tau_{yz}^\infty \right\} \cdot \dots \quad (37)$$

以上によって、式 (27), (28) の解析関数 $F_1(\zeta_3), F_n(\zeta)$ が完全に決定されたことになる。

ここで、最も内側の中実介在物の応力場について考える。式 (28) で求められた解析関数を用いることによって、この内側介在物の応力場は次式のように表される。

$$\tau_{xz}^M - i \tau_{yz}^M = \frac{F_M'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \prod_{r=1}^{M-1} \left[\frac{1}{1 - K_r} \right] \left(B_{1M} \frac{A R_0^*}{R_0} + \frac{1}{m} B_{2M} \frac{\overline{A R_0^*}}{R_0} \right) \cdot \dots \quad (38)$$

上式より、層数には無関係に最も内側の中実介在物の応力場は ζ に依存せず、一定値になることが確認できる。このことは「媒体と1つの楕円形の中実弾性介在物が存在し、無限遠より一様荷重が作用する問題に対して、介在物内の応力場が位置に関係なく一定になる」という Eshelby の解とも整合し、かつ、媒体が異方性体で多層の等方性楕円リングの最も内側の内部が中実弾性介在物となった問題に一般化したものとなっているのは興味深い成果である。さらに、このことが式 (13) のようなすべり結合の場合に対しても成立するといふことは極めて興味深いものである。

2.2.2 最も内側の介在物が空孔または剛体の場合 次に、最も内側の境界 L_{M-1} の内側介在物が空孔または剛体の場合を考える。この場合、境界 $L_n (n=1, 2, \dots, M-2)$ 上の境界条件は合応力と変位を用いて、式 (13) と同様に次式で与えられる。

$$P_z^n = P_z^{n+1}, \quad \gamma_n u_z^n = u_z^{n+1}, \text{ on } L_n (n=1, 2, \dots, M-2). \quad (39)$$

これに対し、最も内側の境界 L_{M-1} 上の境界条件が自由または剛体の場合には、次式が成立することになる。

$$\left. \begin{aligned} P_z^{M-1} &= 0: \text{自由境界} \\ u_z^{M-1} &= 0: \text{剛体境界} \end{aligned} \right\} \text{ on } L_{M-1} \quad \dots \quad (40)$$

上述の境界条件を満足するように、鏡像原理を用いた解析接続法により定式化を行う。境界 $L_1, L_2, \dots, L_{M-2}$ に対しては、境界条件、解析接続ともに第 2.2.1 節の中実弾性介在物の場合と全く同様であるが、異なるところは次式で定義される境界 L_{M-1} 上での解析接続のみである。

$${}_r F_{M-1}(\zeta) = -k \times {}_0 \overline{F}_{M-1} \left(\frac{\rho_{M-1}^2}{\zeta} \right). \quad \dots \quad (41)$$

ここに、

$$k = \begin{cases} -1: & \text{自由境界} \\ 1: & \text{剛体境界} \end{cases} \quad \dots \quad (42)$$

したがって、前節同様、外側領域から内側領域への解析接続を行い、最も内側の境界 L_{M-1} での境界条件を満足する解析接続 (式 (41)) を経て、内側領域から外側領域への解析接続を行い、得られた 2 種類の関数 ${}_0 F_1(\zeta_3), {}_r F_n(\zeta)$ および ${}_r F_1(\zeta_3), {}_r F_n(\zeta)$ を重ね合わせることで、各領域の解析関数 $F_1(\zeta_3), F_n(\zeta)$ が最終的に次式のように求められる。

$$F_1(\zeta_3) = (B_{11} - k B_{31}) A R_0^* \zeta_3 + (B_{21} - k B_{41}) \frac{\overline{A R_0^*}}{\zeta_3} \cdot \dots \quad (43)$$

$$F_n(\zeta) = \prod_{r=1}^{n-1} \left[\frac{1}{1-K_r} \right] \times \left\{ (B_{1n}-k B_{3n}) A R_0^* \zeta + (B_{2n}-k B_{4n}) \frac{\overline{A R_0^*}}{\zeta} \right\},$$

$$(n=2, \dots, M-1). \quad (44)$$

上式中の係数 B_{jn} , ($j=1, \dots, 4$) は次式のように表される。

$$B_{1n} = \delta_{1n} + (1-\delta_{1n}) \{ B_{1(n-1)} + B_{2(n-1)} K_{n-1} / \rho_{n-1}^2 \}. \quad (45)$$

$$B_{2n} = (1-\delta_{1n}) \{ B_{2(n-1)} + B_{1(n-1)} K_{n-1} \rho_{n-1}^2 \}. \quad (46)$$

$$B_{3n} = \left\{ \delta_{nM} + (1-\delta_{nM}) \prod_{r=n}^{M-1} \left[\frac{1}{1-K_r^2} \right] \right\} \times \left\{ B_{1M} h_n^1 \rho_M^2 - B_{2M} \hat{h}_n^1 / \rho_M^2 \right\}. \quad (47)$$

$$B_{4n} = - \left\{ \delta_{nM} + (1-\delta_{nM}) \prod_{r=n}^{M-1} \left[\frac{1}{1-K_r^2} \right] \right\} \times \left\{ B_{1M} h_n^2 \rho_M^2 - B_{2M} \hat{h}_n^2 / \rho_M^2 \right\}. \quad (48)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} h_M^1 &= \hat{h}_M^2 = 0, \quad \hat{h}_M^1 = h_M^2 = 1, \\ h_n^1 &= h_{n+1}^1 + h_{n+1}^2 K_n / \rho_n^2, \\ \hat{h}_n^1 &= \hat{h}_{n+1}^1 + \hat{h}_{n+1}^2 K_n / \rho_n^2, \\ h_n^2 &= h_{n+1}^2 + h_{n+1}^1 K_n \rho_n^2, \\ \hat{h}_n^2 &= \hat{h}_{n+1}^2 + \hat{h}_{n+1}^1 K_n \rho_n^2. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

この場合も、上式中の $h_n^i, \hat{h}_n^i$ は漸化式的に、 n の大きい方から小さい方に向かって逐次決定することができる。

最後に、上式中の係数 A を第 2.2.1 節の場合と同様にして求めれば、最終的に次式が得られる。

$$\frac{2i}{\mu_3^1 - \mu_3^1} (\tau_{xz}^\infty + \mu_3^1 \tau_{yz}^\infty) = \frac{F_1'(\zeta_3)}{\omega_3'(\zeta_3)} \Big|_{|\zeta_3|=\infty} = (B_{11} - k B_{31}) A. \quad (50)$$

これを解いて、係数 A は次式となる。

$$A = \frac{2i(\tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty)}{(\mu_3^1 - \mu_3^1)(B_{11} - k B_{31})}. \quad (51)$$

2.2.3 応力拡大 (特異) 係数 境界 L_{M-1} の内側介在物が空孔または剛体の場合において、内側境界 L_{M-1} の短軸が $b_{M-1}=0.0$ となったクラックないしは直線状剛体 (rigid line inhomogeneity) の場合、その先端において特異性をもった応力集中が生じる。そのときのクラック先端 (右端) における応力拡大 (特異) 係数は次式で与えられる。

$$K_{III} = \left\{ \begin{aligned} & i\sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \rightarrow \rho_{M-1}} \sqrt{\omega(\zeta) - \omega(\rho_{M-1})} \frac{F_{M-1}'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\ & = i\sqrt{\pi} \frac{F_{M-1}'(\rho_{M-1})}{\sqrt{\omega''(\rho_{M-1})}} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

上式に式 (5) の写像関数 $\omega(\zeta)$ および式 (44) の解析関数 $F_{M-1}(\zeta)$ に対する導関数を求めて代入すると、 K_{III} が最終的に次式のように求められる。

$$K_{III} = i\sqrt{\frac{\pi \rho_{M-1}^3}{2R_0^* m}} \left\{ \delta_{2M} + (1-\delta_{2M}) \prod_{r=1}^{M-2} \left[\frac{1}{1-K_r} \right] \right\} \times \left\{ (B_{1(M-1)} - k B_{3(M-1)}) A R_0^* \right. \\ \left. - (B_{2(M-1)} - k B_{4(M-1)}) \frac{\overline{A R_0^*}}{\rho_{M-1}^2} \right\}. \quad (53)$$

なお、上式までに得られた諸式において、母材 (Matrix) が等方性弾性体に縮退した場合の結果は著者らの論文⁽³⁾のそれに完全に一致することが確認されている。

3. 数値計算例

異方性体の写像平面上の座標 ζ_3 は式 (5) より次式のように複符号をとる。

$$\zeta_3^\pm = \frac{1}{2R_0^*} \left\{ z_3 \pm \sqrt{z_3^2 - 4R_0^{*2} m^*} \right\} \quad (54)$$

したがって、異方性体の数値計算を行う際には $\zeta_3^\pm$ のうち、境界 L_1 上において $\zeta_3 \bar{\zeta}_3$ が 1 であるほうを用いなければならない。

以下に示す計算例ではすべて 4 層の楕円形リングを想定し、その形状は特に断らない場合には $b_1/a_1=0.80, b_2/a_2=0.76, b_3/a_3=0.71, b_4/a_4=0.65, b_5/a_5=0.57$ と設定している。また、異方性比を $e=G_{23}^1/G_{13}^1$ で表す。

まずはじめに、面外せん断荷重 τ_{yz}^∞ が作用したときの応力 $\tau_{\eta_z}^n$ の分布図を示す。図 2 は 4 層楕円形リングの内側に等方性弾性介在物を有する場合の x 軸上での $\tau_{\eta_z}^n$ の変化を示している。 $x/a_1=0.73$ が弾性介在物と楕円リングとの境界 (L_5) を表し、 $x/a_1=1.0$ が楕円リングと異方性母材との境界 (L_1) を表している。弾性介在物内、楕円リング内ともに弾性主軸の傾斜角 ϕ_0 が大きくなると応力は大きくなり、異方性体では小さくなるのがわかる。なお、母材のリング付近 ($1 \leq x/a_1 \leq 1.35$) において $\phi_0 = 45^\circ$ が $\phi_0 = 90^\circ$ を下回っているのは、 $\phi_0 = 0^\circ, 90^\circ$ のときには x 軸で最大の値をとるのに対し、弾性主軸が座標軸と一致しない $\phi_0 = 45^\circ$ のときは、最大値の位置が x 軸上ではなく、多少ずれることに起因している。また、無限遠で

Fig.2 Distribution of normalized stress $\tau_{\eta_z}^n$ on the x axis under applied stress τ_{yz}^∞

は1.0に漸近していくことが確認されている。さらに、最も内側の中実介在物は先に指摘したように一定の応力値となっている。

次に、横軸の θ を x 軸より反時計廻りにとった場合の、楕円リングの最も外側の周縁境界(L_1)と最も内側の周縁境界(L_5)上の応力分布を図3,4に示す。ここでは楕円リングの内側は空孔とし、全ての楕円境界は完全接合であるとする。図3,4ともに $\phi_0=90^\circ$ の場合が最も大きく、 $\phi_0=0^\circ$ の場合が最も小さい。これは作用荷重 τ_{yz}^∞ に抵抗する母材側のせん断弾性係数が異方性主軸の回転により変化することを示している。 $\phi_0=45^\circ$ の場合の応力は、数値的には両者のほぼ中間的な値をとっているが、最大値の位置が図3の場合には $\theta=15.4^\circ$ に、図4の場合には $\theta=8.0^\circ$ に移動している。また、応力 τ_{η_2} が0となる位置は図3,4ともに $\theta=90.0^\circ$ から $\theta=113.3^\circ$ に移動している。

次に、4層の楕円形リングを有し、最も内側の境界を直線クラックまたは直線状剛体介在物とした場合の、その先端における応力拡大係数(S.I.F)および応力特異係数(S.S.F)の数値計算例を図5に示す。なお、S.I.FおよびS.S.Fは複素数で表されるが、S.I.Fは無遠荷重 τ_{yz}^∞ が作用する場合の実部を、S.S.Fは無遠荷重 τ_{xz}^∞ が作用する場合の虚部をとることにより得られる。横軸に比例的に変化させた等方性のせん断弾性係数比をとり、図5(a)では異方性比 e を、(b)

Fig.3 Distribution of $\tau_{\eta_2}^2$ on the boundary L_1

Fig.4 Distribution of $\tau_{\eta_2}^5$ on the boundary L_5

(a) Effect of elastic ratio e

(b) Effect of elastic angle ϕ_0

(c) Effect of sliding parameter γ_1

(d) Effect of sliding parameter γ_1

Fig.5 Effect of ratios of elastic modulus on stress intensity(singularity) factor for 4-layered elliptic rings

Fig.6 Contour of τ_{max} for 4-layered elliptic rings with elastic solid inclusion

Fig.7 Contour of τ_{max} for 4-layered elliptic rings with rigid inclusion or cavity

では弾性主軸の傾斜角 ϕ_0 を、さらに(c)ではすべり係数 γ_1 をそれぞれパラメータとして計算した応力拡大係数であり、(d)はすべり係数 γ_1 をパラメータとした応力特異係数である。図5(a),(b)では異方性比 e が大きく、傾斜角 ϕ_0 が小さい場合に応力拡大係数が小さくなるが、これは作用荷重に対する異方性体のせん断弾性係数が小さくなるからである。また、応力拡大係数が大きく変化するの、(a)では等方性のせん断弾性係数比が0.5~10、(b)では1~10の範囲であり、それ以下では0に漸近し、それ以上では一定値に落ちつくことがわかる。図5(c),(d)では、当然のことながらすべり係数 γ_1 が小さくなると応力拡大(特異)係数が小さくなる。その影響の範囲は、(c)では等方性のせん断弾性係数比が1~10、(d)では0.4~100のところで見られ、それ以外では完全接合の場合に漸近していく。

最後に最大せん断応力 τ_{max} および変位 u_z の等高線図を示す。図6は弾性介在物を、図7は空孔または剛体介在物を有する4層の楕円形リングを有する母材の無限遠に τ_{yz}^{∞} が作用した場合を対象としたものである。図6は左半分が完全接合、右半分が外側楕円境界 L_1 上において $\gamma_1=0.5$ のすべりを設定

Fig.8 Contour of displacement u_z for 4-layered elliptic rings with rigid inclusion or cavity

している。すべりを設定している右半分では、母材側の応力が大きくなり楕円リング内の応力は小さくなっている。また、弾性介在物内の一定応力場の値は完全接合では2.32であるのに対し、すべり結合では2.01と小さくなっている。図7はすべての境界が完全接合であるとし、異方性比 $e=5.0$ 、弾性主軸の傾斜角 $\phi_0=45^\circ$ の場合に、 τ_{yz}^{∞} が作用したときの τ_{max} の等高線図であり、左半分が剛体介在物、右半分が空孔として計算したものである。剛体介在物の場合、境界 L_5 上の $\theta=143^\circ, 323^\circ$ のところで最大の2.98、空孔の場合には境界 L_5 上の $\theta=8^\circ, 188^\circ$ で最大の10.91となっている。図8は図7と同一の条件下での変位 u_z の等高線図である。変位場は母材側、楕円リング内部とも空孔の方が大きくなっている。

4. 結 言

弾性定数の異なる同一共焦点の多数の等方性楕円形リングと最も内側に楕円形の中実介在物を有する異方性弾性体に無限遠より一様な面外せん断荷重が作用する問題に対する閉じた型の厳密な解析解を提示した。ここでは異方性弾性体の弾性主軸が座標軸と一致する場合のみばかりではなく、 xy 面に任意に傾斜している場合についても対象とした。さらに、最も内側の介在物が空孔または剛体となった場合の解析解についても誘導し、その特殊な場合として、直線状クラックあるいは直線状剛体介在物の場合の応力拡大(特異)係数の理論式を示すと共に、種々の数値計算例を与えた。

文 献

- (1) Wu, CH and Chen, CH, A crack in a conformal elliptic inhomogeneity embedded in an infinite medium, J. Appl. Mech., 57(1990), 91~96.
- (2) 木村・山下・平島・木口, 弾性補強リングを有する円孔問題の解析解とその数値計算例, 機論, 61-589, A(1995), 2086~2092.
- (3) 平島・池田・木村, 面外せん断荷重下における多層円形リングを有する弾性体の解析解とその数値計算例, 機論, 63-607, A(1997), 525~532.