機械構造部材の軽量化設計および応力集中低減のための一手法*

中 村 正 行^{*1}, 埴 本 直 生^{*2}A Design Method for Reducing Weight and
Stress Concentration of Mechanical Structural Components

Masayuki NAKAMURA and Naoki TAOMOTO

This paper deals with a method of generating a multiple connected region and shape optimization for reducing the weight and stress concentration of mechanical structural components. Structural components often contain some holes for the purpose of reducing their weight. It is a difficult task to determine the optimum number, position and shape of holes under various constraints in the conceptual phase of design. In this study, we propose a method of shape generation for obtaining minimum weight and maximum stiffness for elastic structural components using a genetic algorithm. We describe in detail how to apply the genetic algorithm to determine the multiple connected region and its optimization. We show some results of typical problems to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key Words: Optimum Design, Computational Mechanics, Stress Concentration, Multiple Connected Region, Genetic Algorithm, Shape Optimization, Minimum Weight Design

1. 緒 言

機械の性能向上やコスト低減を目的として, 機械構造物の軽量化がはかられる。機械構造部材は, 外形形状が機能面から制約を受けることから, 軽量化のために領域内部を除去する設計が行われ, 部材に孔を有する多重連結形状となる場合が多い。また, 孔を設けることにより軽量化とともに応力集中を低減する効果⁽¹⁾も期待できる。この種の形状を生成する場合には, 軽量化および使用形態に応じた強度や剛性などを考慮する必要があり, 各種の制約を満足しつつ, 孔の数と位置, 形状を決定する困難な問題となる⁽²⁾。このため, 孔の位置形状の決定は, 実用上は経験的に定められることが多い。

多重連結領域を生成する手法には, 均質化法⁽³⁾⁽⁴⁾や密度関数による方法⁽⁵⁾など種々の方法が提案されている。これらの手法は任意の構造を生成可能であ

るが, 解析により得られた結果から実体を構成する処理が必要な場合がある。また, 数値最適化手法などにより, この種の構造部材の形状を決定する場合には, 形状をパラメトリックに定義するとともに最適化のための初期値を必要とする。加えて, 多峰性のため得られた解が初期値に依存し, 目的関数の最小値を探索できずに局所最小値に陥るなどの困難点がある。

本研究では, 二次元弾性体構造要素の重量最小化と剛性最大化を目的とした最適形状設計問題の解法として遺伝的アルゴリズム(Genetic Algorithm:GA)⁽⁶⁾を用いた一手法を提案する。最適化手法の一つとして提案された遺伝的アルゴリズムは, 生物における情報処理を模倣したアルゴリズムであり, 工学分野における最適化問題への適用が進められ, 定式化が困難な問題や組合せ最適化, 多峰性を有する最適化問題に有効な手段として注目されている⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾。

本手法では, 許容応力などの制約条件のもとで, 重量最小化, 剛性最大化の目的に対応して, 領域内

* 原稿受付 1996 年 12 月 18 日。

^{*1} 正員, 信州大学工学部(〒380 長野市若里 500)。^{*2} 学生員, 信州大学大学院。

に発生させる孔の個数および位置形状をGAを用いて決定する。本研究では、外形形状は既定されるものとし、軽量化および応力集中低減のために領域内部に円孔を設けるものとする。円孔は孔の中でも応力集中が最低であり、また、加工面からの簡便性がある。

ここでは、本手法の概要を示すとともに、いくつかの例題の解析結果を示し、手法の有効性について考察する。

2. GAを用いた内部形状設計

2.1 軽量化および応力集中低減を目的とした形状設計 機能や強度など様々な要求に対応するために、機械構造物の設計では各種の制約条件を満たしつつ、その重量を最小限におさえる軽量化設計が重要である。また、軽量化と拮抗する剛性最大化や応力集中低減問題も重要な設計課題となっている。これらの設計問題は以下のように表せる。

”形状に関する設計変数 x に関する制約条件

$$x_a \leq x \leq x_b \cdots \cdots (1)$$

および、部材に発生する応力に関する制約条件

$$\sigma \leq \sigma_c \cdots \cdots (2)$$

のもとで、目的関数

$$W = f(x) \cdots \cdots (3)$$

を最小にするような設計変数

$$x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \cdots \cdots (4)$$

を求める。”

ここで x_a と x_b はそれぞれ設計変数の下限値と上限値であり、 σ_c は許容応力である。また、 n は設計変数の総数である。GAを最適化に用いる場合、目的関数の最小化をGAの適応度の最大化に対応させる。軽量化設計に対して、GAにおける適応度 Fit には、設計仕様に基づいて対象の重量および剛性を考慮した関数として次の式を設定する。

$$Fit = \alpha \frac{W_0}{W} + \beta \frac{U_0}{U} \cdots \cdots (5)$$

$$W = W_0 - \rho \sum_{i=1}^m A_i$$

$$U = \int_{\Gamma_c} |u| d\Gamma_c$$

ただし、 A_i は一つの円孔の面積、 m は円孔の総数、 ρ は領域の密度であり、 W は領域の重量を表す。 u は剛性を評価する領域の境界 Γ_c における変位であり、 U は評価対象領域の総変位量を表す。 W_0 と U_0 はそれぞれ、孔が発生していない元の領域に対する量を表す。 α と β は定数であり、設計目的の重要度に応じて設計者により設定されるものとする。構造要素の重量が小さく、剛性が高いほど適応度 Fit の値は大きくなる。応力や剛性の計算には境界要素解析⁽¹⁰⁾を用いる。境界要素解析の結果を用いて計算した各節点の主応力と許容応力を比較して、ある節点において許容応力を越えた場合には $Fit=0$ と置くものとする。これにより、応力の制約条件を考慮する。

2.2 複数の孔の遺伝子表現 ここでは、軽量化のために設ける孔のパラメータを離散値とし、一つの孔に対するパラメータの任意の値の組合せを一つの順序番号で表し、これを一つの遺伝子としてコーディングする。この手法は欠陥同定のための逆解析手法として著者の一人が提案した⁽¹¹⁾のものであり、同一のアルゴリズムを用いている。

孔を単純な幾何学形状で近似する。例えば、孔が円形で近似できると仮定すれば、孔の位置形状を表すパラメータ p は次のようになる。

$$p = \{X_1, X_2, R\} \cdots \cdots (6)$$

ただし、 X_1, X_2 は円孔の中心座標、 R は半径を表す。座標 X_1, X_2 と半径 R はきざみ幅 $\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta R$ の離散的な値をとるものとする。この場合、パラメータは次のように表せる。

$$\begin{cases} X_{1,i} = a_1 + (i-1)\Delta X_1 & i = 1, 2, \dots, I \\ X_{2,j} = a_2 + (j-1)\Delta X_2 & j = 1, 2, \dots, J \\ R_k = a_3 + (k-1)\Delta R & k = 1, 2, \dots, K \end{cases} \cdots \cdots (7)$$

一つの孔を表すパラメータの取りうる組合せは $I \times J \times K$ 通りである。ある孔のパラメータ

$$p = \{X_{1,i}, X_{2,j}, R_k\} \cdots \cdots (8)$$

は、それぞれの値が1番目の値を取るとき

$$p = \{X_{1,1}, X_{2,1}, R_1\} \cdots \cdots (9)$$

から数えて N_{ijk} 番目の順序番号(正の整数)

$$N_{ijk} = (i-1)JK + (j-1)K + k \cdots \cdots (10)$$

で表せる。

図1に示すように、この順序番号を一列に並べて遺伝子列とすることにより、領域内の複数の孔を一つの遺伝子列すなわち個体(設計解)で表すことができる。各遺伝子位置には一つの孔を表す順序番号が当てはめられる。遺伝子長さを固定した場合は遺伝子の数 N_{gen} が最大の孔の数となる。遺伝子表現から各孔の位置形状を求めるには式(10)における N_{ijk} に対応する各パラメータの順序番号 i, j, k を求め、式(7)よりパラメータの値を求めればよい。

2.3 遺伝的アルゴリズムの処理手続き 遺伝的アルゴリズムは図2に示すフローチャートに示す処理により構成される。

フローチャートにおいて、initializationでは、一様乱数を用いて初期集団を設定する。evaluationでは、各個体に対して適応度を計算する。sortでは、定められた個体数となるように適応度の低い個体を捨てる淘汰を行う。reportにおいては各世代ごとの集団の構成や適応度の値を記録し、必要に応じて設計解の情報を出力する。checkにおいてはアルゴリズムの終了条件をチェックし、世代交代を終了するかどうかを判定する。各種の終了基準が考えられるが、ここではあらかじめ定めた最大世代数によるとした。reproductionでは、一様乱数を用いて集団の組を

Fig.1 Individual for representation of plural holes (Design solution)

Fig.2 Flowchart of GA

選びだし、交叉位置を決めて交叉させ新たな集団を生成する。mutationでは、生成された集団の中から定められた確率で個体を選びだし、さらに遺伝子を選んでその遺伝子を一様乱数により変更する。fluctuationでは、各個体の各遺伝子に対応する各設計変数に対し、次式による微小変化を与える操作を行う。

$$\left. \begin{array}{l} p_i \leftarrow p_i + \Delta p_i \\ p_i \leftarrow p_i - \Delta p_i \\ p_i \leftarrow p_i \end{array} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ただし、上式の三つの操作のうちいずれを選択するかは一様乱数により決定する。

2.4 干渉チェック 本研究では、決められた領域内に孔をあけて軽量化をはかる問題を扱っているが、孔が領域境界にかかって発生することや、孔と領域境界または孔どうしが近づきすぎて、数値計算における解析精度の低下につながることを避けなければならない。ここでは、孔と孔、孔と領域境界の干渉チェックの方法を示す。解析対象は境界要素に離散化されているので、各要素データを利用して干渉をチェックする。 $f(x,y)$ は領域境界を、 $g(x,y)$ は孔の境界を表す関数とする。方程式 $f(x,y)=g(x,y)$ が互いの定義域かつ値域の範囲内で解を持てば、孔と領域が干渉していることになる。

また、孔の境界が領域内に存在するかどうかの判別を以下のように行う。図3において、境界要素の節点Pから孔の要素上の節点QへのベクトルSと節点Pにおける外向き法線ベクトルnを考える。ベクトルSとnの内積 P_{in} は次式で表せる。

$$P_{in} = \|S\| \|n\| \cos \theta \dots\dots\dots (12)$$

この内積を用いると、図3の場合、内積 P_{in} が正ならば孔の境界は領域外にあり、内積 P_{in} が負ならば孔の境界は領域内にあることになる。内積 P_{in} の正負は $\cos \theta$ の正負により定まる。

Fig.3 Hole and region

3. 解析例

3.1 軽量化設計 本手法を用いて二次元弾性体構造要素の軽量化と剛性最大化を目的とした最適設計問題を解析した例を示す。ここでは、構造要素の強度をある基準値以上に保ったまま孔をあけることで重量最小化と剛性最大化を行うものとし、孔の個数および位置形状の最適化を行う。解析モデルには一部に引張り力を受け、一端が固定された縦横の寸法が 300mm の L字型の領域を仮定する。GAのパラメータは、一世代における個体数 $N_{pop}=30$ 、個体の中の遺伝子の数 $N_{gen}=8$ 、増殖の割合 $N_{rp}=1.0$ 、交叉点数 $N_{mpc}=1$ 、突然変異率 $P_{mu}=0.3$ 、最大世代数を 200 世代と仮定した。境界要素解析においては、2 次アイソパラメトリック境界要素を用いて領域を 32 要素に分割し、各円孔は 8 要素に一樣に分割する。さらに、円孔半径の制約を $5\text{mm} \leq R \leq 20\text{mm}$ と仮定した。材料定数はヤング率 $E=210\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、平面応力状態を仮定する。許容応力を 200MPa と仮定し、加えられている引張り応力は平均 20MPa とする。

例1では、適応度 F_{it} の式(5)の係数 α, β の値をいくつか設定して、重量最小化と剛性最大化の設計目的の比重を考慮した解析を行う。

$\alpha/\beta=1$ に設定した場合の適応度の変化の様子を図4に、最終世代において最大適応度をもつ個体に対応する孔の位置形状を図5にそれぞれに示す。また、 $\alpha/\beta=1/8, 1/4, 4, 8$ に設定したときの最終世代において最大適応度をもつ個体に対応する孔の位置形状を、図6、図7、図8、図9にそれぞれに示す。表1に、適応度 F_{it} における係数 α, β を設計目的に応じて変更したときの孔の位置形状の値と、そのときの重量の減少量を、軽量化を行う前の重量との比率で示す。

Fig.4 Histories of fitness ($\alpha/\beta=1$)

また、孔のない場合の剛性を 1 としたときの剛性の変化も示す。ここでは、適応度の式中の右辺第 2 項 U_0/U の逆数を剛性の指標に用いた。

最終世代における最大適応度をもつ個体に対応する設計解は、許容応力の制約を満足した状態で、重量最小化と剛性最大化の重要度に応じた位置形状を示す結果となった。

Fig.5 Design solution ($\alpha/\beta=1$)

Fig.6 Design solution ($\alpha/\beta=1/8$)

Fig.7 Design solution ($\alpha/\beta=1/4$)

Fig.8 Design solution ($\alpha/\beta=4$)

Fig.9 Design solution ($\alpha/\beta=8$)

Table 1 Configuration of holes, weight reduction and stiffness

α/β	Position and size of holes (X, Y, R) (mm)	Reduction of weight (%)	Stiffness U/U_0
1/8	(80,200,10) (230,50,10)	1.038	0.978
1/4	(80,220,15) (250,50,10)	1.687	0.963
1	(50,150,10) (80,240,20) (240,50,10)	3.114	0.930
4	(50,150,10) (80,240,20) (120,70,12) (250,60,15)	4.510	0.919
8	(60,70,8) (50,150,12) (80,220,20) (120,80,10) (240,50,18)	5.356	0.898

3・2 応力集中低減 例2として、図10(a)に示す無限遠に一樣な一軸引張り応力が作用する中心円孔を持つ板の応力集中を低減する問題⁽¹⁾⁽¹²⁾を、例3として、図10(b)に示す無限遠に一樣な一軸引張り応力が作用する中心に楕円孔を持つ板の応力集中を低減する問題を本手法を用いて解析する。この領域内に付加円孔を発生させて応力集中を緩和することを考える。GAパラメータは、一世代における個体数 $N_{pop}=30$ 、個体の中の遺伝子数 $N_{gen}=5$ 、増殖率 $N_{rp}=1.0$ 、交叉点数 $N_{mpc}=1$ 、突然変異率 $P_{mu}=0.3$ 、最大世代数を例2では500世代、例3では200世代と仮定した。境界要素解析においては、2次アイソパラメトリック境界要素を用いて各円孔を16要素に一樣に分割する。さらに、円孔半径の制約を $5\text{mm} \leq R \leq 25\text{mm}$ と仮定した。材料定数は、ヤング率 $E=200\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、平面応力状態を仮定する。許容応力を 200MPa と仮定し、加えられている引張り応力は 20MPa とする。この例では適応度を以下のように設定した。

$$Fit = \frac{\sigma_{o\max}}{\sigma_{\max}} \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 $\sigma_{\max}$ は付加円孔を設けたときの中心円孔または付加円孔に発生する主応力の最大値であり、 $\sigma_{o\max}$ は付加円孔が発生していないときの中心円孔周りの主応力の最大値である。

例2と例3に対して適応度の変化の様子を図11と図12に、最終世代において最大適応度をもつ個体に対応する孔の位置形状を図13(a),(b)にそれぞれに示す。野田ら⁽¹⁾と高橋ら⁽¹²⁾が同様の最適化問題をHookeとJeevesの直接探索法⁽¹³⁾を用いて解析した結果を報告している。表2に野田らと高橋らの結果と本手法による結果との比較を示す。なお、表2において r と b はそれぞれ中心円孔と付加円孔の半径であ

り、 x と y は付加円孔の x 座標値と y 座標値である。 $(\sigma_1/p)^1_{\max}$ と $(\sigma_1/p)^2_{\max}$ は、それぞれ中心円孔と付加円孔周りの応力集中係数の最大値である。また、表3に楕円孔の場合(例3)の結果を示す。 a は付加円孔の半径、 b は楕円孔の $y=0$ における曲率半径を表す。 $\sigma_{\max}/p$ と $\sigma_{o\max}/p$ はそれぞれ付加円孔を設定したときの楕円孔周りの応力集中係数の最大値と、付加円孔を設定していないときの楕円孔周りの応力集中係数の最大値である。

本手法を用いた結果は、応力集中を低減する位置に孔が発生しており、GAにおける個体数が少ないことなどを考慮すれば妥当な解である。

4. 考 察

例1の解析では、式(5)の適応度 Fit における係数 α, β を設計目的の重要度に応じて変更することにより、本手法を用いて複数の設計目的を達成する最適設計が可能であることを確認した。また、例2と例3

Fig.11 Histories of fitness (Example 2)

Fig.12 Histories of fitness (Example 3)

Fig.10 Analysis models (Example 2,3)

の解析では、応力集中低減を目的とした最適設計問題の解析結果を示し本手法の有効性を示した。

これらの例題では、遺伝的アルゴリズムの終了判定に最大世代数を設定して世代交代を打ち切っている。図4および図11,12の適応度の変化の様子から最終世代付近では適応度の最大値(Max.), 平均値(Ave.), 最小値(Min.)の向上が見られず停滞しており、収束したものと考えられる。適応度の値が向上せず停滞している理由として、集団の進化(解の最適化)が十分なされたため、解候補の多様性が失われていることが考えられる。

応力集中低減に適用した例は、他の解析結果と比較するため、応力集中低減効果を確認するため単純な例であるが、本手法は、領域形状が複雑であったり多くの切り欠きなどを有する場合にも十分適用可能である。

本手法は、軽量化設計のために設ける孔を円孔としているが、任意形状の孔であっても、孔形状のパ

ラメータ化を行えば同様に取り扱うことができる。また、本手法により得られた領域形状を初期値として、数値最適化手法を用いてより詳細な最適化を行えば、局所最小値に捕らわれる危険性が少なく効率的に設計を行うことができるものと考えられる⁽¹⁴⁾。

5. 結 言

本研究では、複数の孔を発生させることにより、機械構造要素の軽量化を目的とした多重連結領域形状の生成手法を提案し、二次元問題の例題解析の結果を示した。また、本手法により応力集中低減効果が得られるような孔の個数および位置形状を決定できることも示した。構造部材は軽量化のために領域内部を除去する場合が多く、同時に強度も考慮する必要があることから、本手法はこのような最適設計手法として実用上有効であると考えられる。

文 献

- (1) 野田尚昭・松尾忠利・藤田淳也, 付加円孔による応力集中緩和の最適化, 機論, 60-571, A(1994), pp.798-804.
- (2) 尾田十八・山崎光悦, 有限要素法による多連結物体の最適形状創生法, 機論, 45-389, A(1979), pp.33-40.
- (3) 菊池 昇: 均質化法による最適設計理論, 応用数理, 3-1, (1993), pp.2-26.
- (4) Guedes, J.M. and Kikuchi N., Preprocessing and Postprocessing for Materials Based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 83, (1990), pp.143-198.
- (5) Kumar, A.V. and Gossard, D.C., Synthesis of Optimal Shape and Topology of Structures, Trans. ASME, 118, (1996), pp.68-74.
- (6) Goldberg, D.E., Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning, (1989), Addison-Wesley Publishing Co.
- (7) 北野宏明(編), 遺伝的アルゴリズム, (1993), 産業図書.
- (8) 日本機械学会, 遺伝的アルゴリズム(GA)とその設計問題への応用法, 講習会教材, No.930-43(1993-7).
- (9) 坂和正敏・田中雅博, 遺伝的アルゴリズム, (1995), 朝倉書店.
- (10) 田中正隆・松本敏郎・中村正行, 境界要素法, pp.287-321, (1991), 培風館.
- (11) 中村正行・田中正隆, 欠陥同定問題の動弾性逆解析への遺伝的アルゴリズムの適用, 機論, 60-574, A(1994), pp.1430-1436.
- (12) 高橋真太郎・鴨志田裕之・長谷川久男, 付加円孔による円孔周りの応力集中緩和, 設計工学, 30-6, (1995), pp.231-234.
- (13) Jacoby, S.L.S., Kowalik, J.S. and Pizzo, J.T., (関根智明 訳), 非線形最適化問題の反復解法, pp.71-95, (1976), 培風館.
- (14) 中村正行・埜本直生, 構造要素の最小重量設計のためのGAを用いた形状モデリングと最適化, 機講論, No.95-2(1995-8), pp.291-292.

(a) Circular hole

(b) Elliptical hole

Fig.13 Optimum arrangement of circular holes

Table 2 Configuration of additional circular holes (Example 2)

	b/r	x/r	y/r	$(\sigma_1/p)^1_{\max}$	$(\sigma_1/p)^2_{\max}$
Noda et. al.	0.4	0.54	2.95	2.749	2.747
Takahashi et. al.	0.4	0.45	1.76	2.671	2.671
Present method	0.3 0.6	0.38 0.76	3.96 2.02	2.694	2.694

Table 3 Configuration of additional circular holes (Example 3)

	a/b	x/b	y/b	$\sigma_{\max}/p$	$\sigma_{\max}/p$
Present method	1.6	5.6	2.0	3.521	3.828