表面一様加熱を受ける不均質円板の熱応力緩和と 遮熱性向上を考慮した材料組成多目的最適化問題*

河 村 隆 介^{*1}, 谷 川 義 信^{*1}

Multiojective Optimization Problem of Material Composition Taking into Account Thermal Stress Relaxation and Improvement of Heat Resistance for a Nonhomogeneous Circular Plate due to Uniform Heat Supply from its Surfaces

Ryuusuke KAWAMURA and Yoshinobu TANIGAWA

In this paper, one-dimensional transient heat conduction and thermal bending problems under the axisymmetric condition are developed theoretically for a nonhomogeneous circular plate due to a uniform heat supply from its surfaces. We constructed the approach for multiojective optimization of nonhomogeneous material composition for a functionally graded circular plate, taking into account the thermal stress relaxation and improvement of the heat resistance. We have dealt with this multiojective optimization using the weighting method. Using both these analytical solutions for the temperature field and the associated thermoelastic one, and the approach for multiojective optimization of a nonhomogeneous material composition, numerical calculations of optimal material composition are carried out for a titanium alloy/zirconium oxide functionally graded circular plate subjected to a uniform heat supply from one side of its surface. The tradeoff relationship between the maximum absolute stress ratio and the maximum heat flux is elucidated. It is shown that this approach is useful for the multiojective optimal design of nonhomogeneous material composition, taking into account both securement of strength against thermal stress and improvement of heat resistance against thermal loads.

Key Words: Thermoelasticity, Thermal Stress, Thermal Bending, Nonhomogeneous Materials, Circular Plate, Material Design, Material Composition, Multiojective Optimization

1. 緒 言

傾斜機能材料の宇宙航空分野への応用として、宇宙往還機の熱防御材やスクラムジェットエンジンの燃焼室壁材への使用を目的とした高遮熱性をもつ熱応力緩和形傾斜機能材料の開発が期待されている。使用環境を想定した熱応力緩和形傾斜機能材料の材料組成の決定に際しては、熱応力に対する強度の確保とともに、熱負荷に対する遮熱性を高めることが主要な目的¹⁾と考えられる。しかしながら、熱応力に対する強度の確保と熱負荷に対する遮熱性の向上という二つの目的が同時にどの程度達成できるかについては十分検討されていない。

そこで、本研究は、板厚方向に関して不均質な材料特性をもつ円板を解析対象としてとりあげ、表面から一様加熱を受ける場合を想定し、熱応力に対する強度の確保と熱負荷に対する遮熱性の向上という二つの目的を同時に達成するための材料組成最適化問題につい

て検討したものである。まず、板厚方向に不均質な材料特性をもつ円板が表面から一様加熱を受ける場合について、一次元非定常熱伝導問題および軸対称熱曲げ問題の理論解析を行う。次に、熱応力に対する強度の確保と熱負荷に対する遮熱性の向上という二つの目的を考慮した材料組成の多目的最適化手法の構築を行う。そして、チタン合金-ジルコニア系傾斜機能円板が片側表面から一様加熱を受ける場合を想定し、本解析結果に基づく最適化数値シミュレーションによって、強度と遮熱性とのトレードオフ関係を明らかにする。

2. 解 析

2章では、まず不均質円板の一次元非定常熱伝導問題に関する著者らの多層層状体による近似解析法、および不均質円板の熱曲げ問題に関する古典曲げ理論に基づいた理論解析を示す。次に、熱応力緩和と遮熱性向上という二つの目的を考慮した不均質材料組成の多目的最適化問題の取扱いについて述べる。

2・1 熱伝導解析 板厚方向に関して不均質な材

* 原稿受付 1997 年 1 月 20 日。

^{*1} 正員、大阪府立大学工学部 (〒599 堺市学園町 1-1)。

料特性をもつ構造要素を対象とした熱伝導問題の解析方法として、板厚方向に関して均質な多層に仮想的に分割され、かつ各層の物性値がわずかなずつ変化する多層層状体と近似して理論解析を行う手法⁽²⁾⁽³⁾を用いる。そこで、不均質円板の解析モデルとして、図1に示すような厚さ H 、半径 R の N 層からなる多層層状円板を想定する。各層を下面から順次 $i=1, \dots, N$ と添字をつけて区別し、 i 番目の層の厚さを l_i とする。また、各層の下面を原点とする局所座標 z_i を設定する。

円板の加熱条件として、初期実温度が Θ_0 であり、時刻 $t=0$ の瞬間より円板の下面、上面が一様温度 Θ_a, Θ_b の周囲媒体により、相対熱伝達率 h_a, h_b で加熱され、かつ側面は断熱条件の場合を想定する。

まず、次式で定義される温度変化を導入する。

$$\left. \begin{aligned} T_a &= \Theta_a - \Theta_0 \\ T_b &= \Theta_b - \Theta_0 \\ T_i &= \Theta_i - \Theta_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 Θ_i, T_i は各層の実温度および温度変化を意味する。

板厚方向に関する局所座標 z_i を用いて、各層での熱伝導の基礎方程式、初期条件、温度境界条件、界面での温度および熱流の連続条件を無次元表示すれば

$$\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{\tau}} = \bar{\kappa}_i \frac{\partial^2 \bar{T}_i}{\partial \bar{z}_i^2}, i=1, \dots, N \dots\dots\dots (2)$$

$$\bar{\tau}=0: \bar{T}_i=0, i=1, \dots, N \dots\dots\dots (3)$$

$$\bar{z}_1=0: -\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{z}_1} + H_a \bar{T}_1 = H_a \bar{T}_a \dots\dots\dots (4)$$

$$\bar{z}_N = \bar{l}_N: \frac{\partial \bar{T}_N}{\partial \bar{z}_N} + H_b \bar{T}_N = H_b \bar{T}_b \dots\dots\dots (5)$$

Fig. 1 Analytical model and conditions

$$\bar{z}_i = \bar{l}_i, \bar{z}_{i+1}=0: \bar{T}_i = \bar{T}_{i+1}, i=1, \dots, N-1 \dots\dots\dots (6)$$

$$\bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{z}_i} = \bar{\lambda}_{i+1} \frac{\partial \bar{T}_{i+1}}{\partial \bar{z}_{i+1}}, i=1, \dots, N-1 \dots\dots\dots (7)$$

となる。

ただし、式(2)~(7)において導入された無次元量は次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} (\bar{z}_i, \bar{l}_i) &= (z_i, l_i)/R \\ (\bar{T}_i, \bar{T}_a, \bar{T}_b) &= (T_i, T_a, T_b)/T_0 \\ \bar{\kappa}_i &= \bar{\lambda}_i / (\bar{c}_i \bar{\rho}_i) \\ \bar{\lambda}_i &= \lambda_i / \lambda_0 \\ \bar{c}_i &= c_i / c_0 \\ \bar{\rho}_i &= \rho_i / \rho_0 \\ \bar{\tau} &= \lambda_0 t / (c_0 \rho_0 R^2) \\ (H_a, H_b) &= (h_a, h_b) \cdot R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $\kappa_i, \lambda_i, c_i, \rho_i$ はそれぞれ、各層の温度伝導率、熱伝導率、比熱および密度であり、 $\lambda_0, c_0, \rho_0, T_0$ は基準となる熱伝導率、比熱、密度および温度変化を意味する。

式(2)を式(3)~(7)のもとで Laplace 変換法により解けば、各層の無次元温度変化 $\bar{T}_i$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_i &= A'_i + B'_i \bar{z}_i \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\mu_j^2 \bar{\tau})}{\mu_j \Delta'(\mu_j)} (\bar{A}_i \cos \beta_{ij} \bar{z}_i + \bar{B}_i \sin \beta_{ij} \bar{z}_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$\beta_{ij} = \mu_j / \sqrt{\bar{\kappa}_i}$$

上式において、係数 A_i, B_i および A'_i, B'_i は次式に示す $2N$ 元の連立方程式の解である。

$$\left. \begin{aligned} [a_{ik}] \{x_k\} &= -\{c_i\} / \mu_j^2 \\ [e_{ik}] \{x'_k\} &= \{c_i\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{x_k\} &= \{A_1, B_1, \dots, A_N, B_N\}^T \\ \{x'_k\} &= \{A'_1, B'_1, \dots, A'_N, B'_N\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

式(10)において、係数マトリックス $[a_{ik}], [e_{ik}]$ 、定数ベクトル $\{c_i\}$ のうち零でない成分は

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= H_a \\ a_{12} &= -\beta_{1j} \\ a_{2i, 2i-1} &= \cos \beta_{ij} \bar{l}_i \\ a_{2i, 2i} &= \sin \beta_{ij} \bar{l}_i \\ a_{2i, 2i+1} &= -1 \\ a_{2i+1, 2i-1} &= -\bar{\lambda}_i \beta_{ij} \sin \beta_{ij} \bar{l}_i \\ a_{2i+1, 2i} &= \bar{\lambda}_i \beta_{ij} \cos \beta_{ij} \bar{l}_i \\ a_{2i+1, 2i+2} &= -\bar{\lambda}_{i+1} \beta_{i+1j} \end{aligned} \right\} i=1, \dots, N-1$$

$$\left. \begin{aligned} a_{2N,2N-1} &= H_b \cos \beta_{Nj} \bar{l}_N - \beta_{Nj} \sin \beta_{Nj} \bar{l}_N \\ a_{2N,2N} &= \beta_{Nj} \cos \beta_{Nj} \bar{l}_N + H_b \sin \beta_{Nj} \bar{l}_N \\ e_{11} &= H_a \\ e_{12} &= -1 \\ e_{2i,2i-1} &= 1 \\ e_{2i,2i} &= \bar{l}_i \\ e_{2i,2i+1} &= -1 \\ e_{2i+1,2i} &= \bar{\lambda}_i \\ e_{2i+1,2i+2} &= -\bar{\lambda}_{i+1} \\ e_{2N,2N-1} &= H_b \\ e_{2N,2N} &= 1 + H_b \bar{l}_N \\ c_1 &= H_a \bar{T}_a \\ c_{2N} &= H_b \bar{T}_b \end{aligned} \right\} i=1, \dots, N-1 \quad \dots\dots\dots (12)$$

である。また、式(9)の $\bar{A}_i, \bar{B}_i$ は、連立方程式(10)を A_i, B_i について解き、その解を次式のように表したものである。

$$\left. \begin{aligned} A_i &= -\bar{A}_i / \{\mu_j^2 \Delta(\mu_j)\} \\ B_i &= -\bar{B}_i / \{\mu_j^2 \Delta(\mu_j)\} \\ \Delta(\mu_j) &= \det a_{ik} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

さらに固有値 μ_j は

$$\Delta(\mu) = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

を満たす j 番目の正根であり、 $\Delta'(\mu_j)$ は次式を意味する。

$$\Delta'(\mu_j) = \lim_{\mu \rightarrow \mu_j} \frac{d\Delta(\mu)}{d\mu} \quad \dots\dots\dots (15)$$

2・2 熱曲げ解析

2・1 節で求められた温度変化による不均質円板の熱曲げ問題について、平板の古典曲げ理論⁽⁴⁾に基づいて理論解析を行う。板の変形に関する Kirchhoff-Love の仮説に基づき、加熱条件の軸対称性を考慮する。 u_0, w をそれぞれ、中央面の半径方向の面内変位および面外変位とすれば、このとき、各層のひずみ成分 $\varepsilon_{rri}, \varepsilon_{\theta\theta i}$ は、次式のように無次元表示される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rri} &= \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{r}} - \bar{z} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{r}^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta i} &= \frac{\bar{u}_0}{\bar{r}} - \bar{z} \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

次に各層の応力成分を $\sigma_{rri}, \sigma_{\theta\theta i}$ とし、 E_i, ν_i, α_i を縦弾性係数、ポアソン比および線膨張係数とすれば、応力-ひずみ関係式の無次元表示は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rri} &= \frac{\bar{\sigma}_{rri} - \nu_i \bar{\sigma}_{\theta\theta i}}{\bar{E}_i} + \bar{\alpha}_i \bar{T}_i \\ \varepsilon_{\theta\theta i} &= \frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta i} - \nu_i \bar{\sigma}_{rri}}{\bar{E}_i} + \bar{\alpha}_i \bar{T}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

このとき、円板の平衡方程式は次式のように無次元表示される。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\bar{r}} \left[\bar{r} \frac{d}{d\bar{r}} \left\{ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} (\bar{r} \bar{u}_0) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\bar{A}_1 \bar{D}_1 - \bar{B}_1^2} \left\{ \bar{D}_1 \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \frac{d\bar{N}^T}{d\bar{r}} \right) \right. \\ & \quad \left. - \bar{B}_1 \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \frac{d\bar{M}^T}{d\bar{r}} \right) \right\} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\bar{r}} \left[\bar{r} \frac{d}{d\bar{r}} \left\{ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} \right) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\bar{A}_1 \bar{D}_1 - \bar{B}_1^2} \left\{ \bar{B}_1 \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \frac{d\bar{N}^T}{d\bar{r}} \right) \right. \\ & \quad \left. - \bar{A}_1 \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \frac{d\bar{M}^T}{d\bar{r}} \right) \right\} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ただし、 $\bar{N}^T, \bar{M}^T$ は熱合力、熱合モーメント N^T, M^T の無次元値、 $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{D}_1$ は円板の剛性成分 A_1, B_1, D_1 の無次元値を意味し、次式で表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N}^T \\ \bar{M}^T \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^N \frac{\bar{E}_i \bar{\alpha}_i}{1 - \nu_i} \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{T}_i \left\{ \frac{1}{\bar{z}} \right\} d\bar{z} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_1 \\ \bar{B}_1 \\ \bar{D}_1 \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^N \frac{\bar{E}_i}{1 - \nu_i^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{h}_i - \bar{h}_{i-1}}{2} \\ \frac{\bar{h}_i^2 - \bar{h}_{i-1}^2}{2} \\ \frac{\bar{h}_i^3 - \bar{h}_{i-1}^3}{3} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

上式において、 $\bar{h}_i$ は中央面から i 番目の層の上面までの距離 h_i の無次元表示を意味し、次式で与えられる。

$$\bar{h}_i = \sum_{p=1}^i \bar{l}_p - \frac{\bar{H}}{2} \quad \dots\dots\dots (22)$$

平衡方程式(18)、(19)を逐次積分により解けば、円板の熱変形および熱応力の解は以下のように求められる。

$$\bar{u}_0 = \frac{1}{\bar{A}_1 \bar{D}_1 - \bar{B}_1^2} (\bar{D}_1 \bar{N}^T - \bar{B}_1 \bar{M}^T) \frac{\bar{r}^2}{2} + c_2 \bar{r} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\bar{w} = \frac{1}{\bar{A}_1 \bar{D}_1 - \bar{B}_1^2} (\bar{B}_1 \bar{N}^T - \bar{A}_1 \bar{M}^T) \frac{\bar{r}^2}{4} + c_1' \bar{r}^2 + c_2' \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i (&= \bar{\sigma}_{rri} = \bar{\sigma}_{\theta\theta i}) \\ &= \frac{\bar{E}_i}{1 - \nu_i^2} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\bar{A}_1 \bar{D}_1 - \bar{B}_1^2} (\bar{D}_1 \bar{N}^T - \bar{B}_1 \bar{M}^T) \right. \\ & \quad \left. - \bar{z} (\bar{B}_1 \bar{N}^T - \bar{A}_1 \bar{M}^T) \right] + c_2 - 2 \bar{z} c_1' - \bar{\alpha}_i \bar{T}_i \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし、 c_2, c_1', c_2' は力学的境界条件から決定される未定定数である。

ここで、円板の端面で半径方向変位が自由な単純支持条件を想定する。 $\bar{N}, \bar{M}$ をそれぞれ、合力および合モーメント N, M の無次元値とすれば、円板の力学的境界条件は次式で表される。

$$\bar{r} = 1: \bar{N} = 0, \bar{M} = 0, \bar{w} = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

また、 $\bar{N}, \bar{M}$ は次式で表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N} \\ \bar{M} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^N \int_{\bar{h}_{i-1}}^{\bar{h}_i} \bar{\sigma}_i \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \bar{z} \end{array} \right\} d\bar{z} \dots\dots\dots (27)$$

式(23)～(25), (27)を式(26)へ代入すれば, 未定定数 c_2, c'_1, c'_2 が求められる。

以上の熱曲げに関する解析, すなわち式(15)～(26)において導入された無次元量は次式で定義される。

$$\left. \begin{array}{l} (\bar{r}, \bar{z}, \bar{h}_i, \bar{H}) = (r, z, h_i, H)/R \\ (\bar{u}_0, \bar{w}) = (u_0, w)/(\alpha_0 T_0 R) \\ (\bar{\varepsilon}_{rri}, \bar{\varepsilon}_{\theta\theta i}) = (\varepsilon_{rri}, \varepsilon_{\theta\theta i})/(\alpha_0 T_0) \\ (\bar{\sigma}_i, \bar{\sigma}_{rri}, \bar{\sigma}_{\theta\theta i}) = (\sigma_i, \sigma_{rri}, \sigma_{\theta\theta i})/(\alpha_0 T_0 E_0) \\ \bar{E}_i = E_i/E_0 \\ \bar{\alpha}_i = \alpha_i/\alpha_0 \\ \bar{A}_i = A_i/(E_0 R) \\ \bar{B}_i = B_i/(E_0 R^2) \\ \bar{D}_i = D_i/(E_0 R^3) \\ (\bar{N}^r, \bar{N}) = (N^r, N)/(\alpha_0 T_0 E_0 R) \\ (\bar{M}^r, \bar{M}) = (M^r, M)/(\alpha_0 T_0 E_0 R^2) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ただし, α_0, E_0 はそれぞれ基準となる線膨張係数および縦弾性係数である。

2.3 材料組成の最適化問題 熱応力に対する強度の確保と熱負荷に対する遮熱性の向上という二つの目的を同時に達成する最適材料組成分布の決定を多目的最適化問題として取扱う。

まず, 不均質体の材料組成を, 図2に示すように, 冷却側表面で金属, 加熱側表面でセラミックの組成を持ち, かつ, 体積組成分率が円板の板厚方向に関して連続的に変化する次の関数として設定する。

$$V_m = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{H} \right)^{1/M}, 0 < M \leq 1 \\ 1 - \left(\frac{z}{H} + \frac{1}{2} \right)^M, M \geq 1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

$$V_c = 1 - V_m$$

ただし, V_m, V_c はそれぞれ, 金属およびセラミックの体積分率, M は材料組成分布に関する傾斜パラメー

Fig. 2 Volume fraction

タである。

次に, 熱応力に対する強度を示す指標として, 次式で表される応力比の絶対値の全空間での最大値を採用する。

$$f_{\max} = \max(|\bar{\sigma}_i / \bar{\sigma}_{Bi}|) \left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_{Bi} = \bar{\sigma}_{ci}, \bar{\sigma}_i < 0 \\ \bar{\sigma}_{Bi} = \bar{\sigma}_{ti}, \bar{\sigma}_i \geq 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ただし, σ_{ci}, σ_{ti} はそれぞれ, 各層の圧縮および引張りに対する強度を意味する。

一方, 遮熱性の指標としては, 次の二つの定常および非定常状態での熱流束を代表する各量を取りあげる。

(1) 円板を通過する熱流束の最大値

$$\bar{q}_{t\max} = \bar{K}(\bar{T}_b - \bar{T}_a) \dots\dots\dots (31)$$

$$\frac{1}{\bar{K}} = \frac{1}{H_a \bar{\lambda}_1} + \frac{1}{H_b \bar{\lambda}_N} + \sum_{i=1}^N \frac{\bar{l}_i}{\bar{\lambda}_i} \dots\dots\dots (32)$$

ただし, $\bar{K}$ は熱通過率⁽⁵⁾⁽⁶⁾ K ($1/K$: 熱抵抗)の無次元表示を意味する。

(2) 円板の加熱側表面から流入する熱流束の最大値

$$\bar{q}_{i\max} = \bar{\lambda}_N \left\{ B'_N + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_j D'(\mu_j)} \times (-\bar{A}_N \beta_{Nj} \sin \beta_{Nj} \bar{l}_N + \bar{B}_N \beta_{Nj} \cos \beta_{Nj} \bar{l}_N) \right\} \dots\dots\dots (33)$$

そして, 材料組成最適化の目的関数として, 強度と遮熱性を考慮した, 次式で表されるスカラー関数 $F(M)$ を導入する。

$$F(M) = \frac{1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}} \times (w_1 f_{\max} + w_2 \bar{q}_{t\max} + w_3 \bar{q}_{i\max}) \dots\dots\dots (34)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{q}_{t\max} = \bar{q}_{t\max} / \bar{q}_{t0} \\ \bar{q}_{i\max} = \bar{q}_{i\max} / \bar{q}_{i0} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

ただし, $\bar{q}_{t\max}, \bar{q}_{i\max}$ は最大通過熱流束比および最大流入熱流束比を意味する。また, それらの基準となる $\bar{q}_{t0}, \bar{q}_{i0}$ としては, 円板の半径に対する板厚の比 $\bar{H}$ が等しく, かつ $H_a = H_b = \infty$ の条件下での金属均質体の通過熱流束および流入熱流束の各最大値を採用する。

また, w_i ($0 \leq w_i \leq 1, i=1, 2, 3$) は強度および遮熱性の各評価指標にかける重み係数⁽⁷⁾である。

式(30)～(35)で導入された無次元量は次式で定義される。

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\sigma}, \bar{\sigma}_{Bi}) = (\sigma, \sigma_{Bi})/(\alpha_0 T_0 E_0) \\ (\bar{q}_{t\max}, \bar{q}_{i\max}, \bar{q}_{t0}, \bar{q}_{i0}) = (q_{t\max}, q_{i\max}, q_{t0}, q_{i0}) \\ \quad \times (\lambda_0 T_0)/R \\ \bar{K} = K \cdot R / \lambda_0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

式(34)で表される目的関数の最適化にあたり、式(32)で表される重み係数 $w_i (i=1, 2, 3)$ として、任意の値を与えて材料組成分布の関数 $V_m(z)$, $V_c(z)$ に関するパラメータ M を決定変数として最小化を行う。なお、最適化手法として、修正 Powell 法⁽⁸⁾を使用した。

3. 数値計算例と考察

2章で述べた理論解析結果および材料組成最適化手法を用いて、片側表面から一様加熱を受ける傾斜機能円板を対象として、強度と遮熱性を考慮した材料組成の多目的最適化の数値シミュレーションを行った。

本数値計算では、不均質体の一例として、チタン合金(Ti-6Al-4V)とジルコニアセラミック(ZrO_2)とからなる傾斜機能材料をとりあげた。数値計算で用いた各物性値を表1に示す。なお、不均質体の各物性値はKernerの混合則を用いて推定し、物性値の無次元化の基準値 λ_0 , c_0 , ρ_0 , α_0 , E_0 として、チタン合金の値を用いた。

また、円板の加熱条件、基準となる温度変化、板厚比、仮想的な層の数および各層の厚さに関する計算諸元を次式のように与えた。

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= 300 \text{ K} \\ \theta_a &= 300 \text{ K} \\ \theta_b &= 800 \text{ K} \\ H_a &= \infty \\ H_b &= \infty \\ T_0 &= 500 \text{ K} \\ \bar{H} &= 0.3 \\ N &= 20 \\ \bar{l}_i &= \bar{H}/N, i=1, \dots, N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

そして、式(34)の目的関数に含まれる重み係数 $w_i (i=1, 2, 3)$ については、次の二とおりにより変化する場合を考えた。

Case 1: $w_1, w_2 \geq 0, w_3 = 0$ (38)
(最大応力比と最大通過熱流束比を考慮した材料組成最適化)

Case 2: $w_1, w_3 \geq 0, w_2 = 0$ (39)

Table 1 Material properties

Properties	Ti-6Al-4V	ZrO_2
Thermal conductivity [W/mK]	6.2	1.7834
Specific heat [kJ/kgK]	0.5377	0.4614
Density [kg/m ³]	4.420×10^3	3.657×10^3
Coefficient of linear thermal expansion [1/K]	8.8559×10^{-6}	8.7830×10^{-6}
Young's modulus [GPa]	1.0575×10^2	1.1638×10^2
Poisson ratio	0.2984	0.3333
Tensile strength [MPa]	0.9974×10^3	0.1456×10^3
Compressive strength [MPa]	0.9974×10^3	0.3128×10^4

(最大応力比と最大流入熱流束比を考慮した材料組成最適化)

以下に上述の Case 1, Case 2 に対する数値計算結果を示す。

表2(a), (b)は、重み係数比、最適材料組成パラメータ値 M_{opt} , 最大応力比 f_{max} , 最大通過熱流束比

Table 2 Results of optimization for each weights

(a) Case 1

w_2/w_1	w_1/w_2	M_{opt}	f_{max}	$Q_{l,max}$	$Q_{r,max}$	$1/f_{max}$	$1/R$
0.0		2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
0.2		2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
0.4		2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
0.6		2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
0.8		2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
1.0	1.0000	1.6842	0.28303	0.60452	0.39910	3.5332	0.49626
	0.83333	1.1917	0.34517	0.54784	0.38102	2.8971	0.54761
	0.71429	1.0000	0.37896	0.52091	0.37178	2.6388	0.57592
	0.62500	1.0000	0.37896	0.52091	0.37178	2.6388	0.57592
	0.55556	1.0000	0.37896	0.52091	0.37178	2.6388	0.57592
	0.50000	1.0000	0.37896	0.52091	0.37178	2.6388	0.57592
	0.45455	0.95005	0.39806	0.51190	0.36795	2.5122	0.58606
	0.41667	0.89442	0.42183	0.50156	0.36371	2.3706	0.59814
	0.38462	0.84372	0.44607	0.49186	0.35987	2.2418	0.60994
	0.35714	0.79642	0.47117	0.48256	0.35630	2.1224	0.62169
	0.33333	0.75110	0.49765	0.47343	0.35290	2.0094	0.63368
	0.31250	0.70614	0.52644	0.46414	0.34956	1.8996	0.64636
	0.29412	0.65889	0.55946	0.45414	0.34607	1.7874	0.66059
	0.27778	0.60169	0.60311	0.44169	0.34192	1.6581	0.67921
	0.26316	0.52741	0.66454	0.42497	0.33657	1.5048	0.70594
	0.25000	0.52741	0.66454	0.42497	0.33657	1.5048	0.70594
	0.23810	0.52741	0.66454	0.42497	0.33657	1.5048	0.70594
	0.22727	0.52741	0.66454	0.42497	0.33657	1.5048	0.70594
	0.21739	0.48927	0.70457	0.41613	0.33381	1.4193	0.72094

(b) Case 2

w_3/w_1	w_1/w_3	M_{opt}	f_{max}	$Q_{l,max}$	$Q_{r,max}$	$1/f_{max}$	$1/R$
0.00		2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
0.40		2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
0.80		2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
1.00		2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
	0.8333	2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
	0.6250	2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
	0.5000	2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
	0.4167	2.0891	0.24898	0.64130	0.41061	4.0164	0.46780
	0.3571	2.0032	0.25501	0.63410	0.40834	3.9214	0.47312
	0.3125	1.6967	0.28178	0.60577	0.39949	3.5489	0.49524
	0.2778	1.1923	0.34507	0.54792	0.38105	2.8980	0.54753
	0.2500	1.0000	0.37896	0.52091	0.37178	2.6388	0.57592
	0.2273	1.0000	0.37896	0.52091	0.37178	2.6388	0.57592
	0.2083	0.99167	0.38201	0.51943	0.37114	2.6177	0.57756
	0.1923	0.95537	0.39593	0.51287	0.36836	2.5257	0.58495
	0.1786	0.92249	0.40949	0.50681	0.36585	2.4421	0.59194
	0.1667	0.89102	0.42337	0.50092	0.36346	2.3620	0.59891
	0.1562	0.86164	0.43720	0.49532	0.36123	2.2873	0.60568
	0.1471	0.83538	0.45032	0.49023	0.35924	2.2206	0.61196
	0.1389	0.80961	0.46392	0.48518	0.35729	2.1555	0.61834
	0.1316	0.78468	0.47779	0.48022	0.35542	2.0930	0.62473
	0.1250	0.76177	0.49120	0.47560	0.35370	2.0358	0.63079
	0.1190	0.73982	0.50464	0.47112	0.35206	1.9816	0.63679
	0.1136	0.71812	0.51852	0.46664	0.35044	1.9286	0.64290
	0.1087	0.69767	0.53215	0.46237	0.34893	1.8792	0.64884
	0.1042	0.67726	0.54629	0.45806	0.34742	1.8305	0.65494
	0.1000	0.65634	0.56133	0.45359	0.34589	1.7815	0.66139
	0.09615	0.63583	0.57659	0.44917	0.34439	1.7343	0.66791
	0.09259	0.61448	0.59302	0.44451	0.34284	1.6863	0.67491
	0.08929	0.59034	0.61220	0.43918	0.34110	1.6335	0.68310
	0.08621	0.55993	0.63714	0.43237	0.33891	1.5695	0.69386
	0.08333	0.52798	0.66405	0.42510	0.33662	1.5059	0.70573
	0.08065	0.52743	0.66453	0.42497	0.33658	1.5048	0.70594
	0.07812	0.52740	0.66454	0.42497	0.33657	1.5048	0.70595
	0.07576	0.52743	0.66452	0.42497	0.33658	1.5048	0.70594
	0.07353	0.52741	0.66454	0.42497	0.33657	1.5048	0.70594
	0.07143	0.50001	0.69308	0.41864	0.33460	1.4428	0.71662

Fig. 3 Variations of optimal parameter M_{opt} with weight ratio

Fig. 4 Variations of maximum absolute stress ratio f_{max} with weight ratio

Fig. 5 Variations of maximum heat flux ratio of transmission Q_{tmax} with weight ratio

Fig. 6 Variations of maximum heat flux ratio of flow-in Q_{fmax} with weight ratio

$Q_{t\max}$, 最大流入熱流束比 $Q_{i\max}$, 最大応力比の逆数 $1/f_{\max}$ および無次元熱抵抗 $1/\bar{K}$ の各値を示している。ここで, 最大応力比の逆数 $1/f_{\max}$ は円板に生じる最大応力を許容応力とした際の熱応力破壊に対する安全率, また, 無次元熱抵抗 $1/\bar{K}$ は遮熱性の各指標を表すものとみなすことができる。各表の第2行め ($w_2/w_1=0$ あるいは $w_3/w_1=0$) は, 最大応力比 $f_{\max}$ のみを考慮した材料組成最適化の計算結果であり, 重み係数比 $w_1/w_2, w_1/w_3$ の値が小さくなるにつれ, 最大通過熱流束比あるいは最大流入熱流束比の考慮を重視した計算結果に対応する。

図3は各ケースの最適材料組成パラメータ値 M_{opt} の重み係数比による変化を示している。Case 1では重み係数比が $w_2/w_1 \leq 0.8$, また Case 2では $w_1/w_3 \geq 0.4$ の領域で, 最適材料組成パラメータ値 M_{opt} は2.0891となり, ジルコニアセラミックの体積分率 V_c よりもチタン合金の体積分率 V_m の多い材料組成分布を示す。そして, 重み係数比 $w_1/w_2, w_1/w_3$ の減少とともに, 最適材料組成パラメータ値 M_{opt} は低下し, 材料組成分布はジルコニアセラミックの体積分率の多い分布へ変化することがわかる。

図4は各ケースの最大応力比 $f_{\max}$ の重み係数比に

(a) Case 1

(b) Case 2

Fig. 7 Variations of inverse of absolute stress ratio $1/f_{\max}$ and normalized heat resistance $1/R$ with weight ratio

よる変化を示している。両ケースとも重み係数比 $w_1/w_2, w_1/w_3$ の減少とともに, 最大応力比 $f_{\max}$ は増大する。また, Case 1ではCase 2に比べて, 重み係数比の変化に対する最大応力比 $f_{\max}$ の増大の割合は小さい。

図5, 6は各ケースの最大通過熱流束比 $Q_{t\max}$ および最大流入熱流束比 $Q_{i\max}$ の重み係数比による変化を示している。両ケースとも重み係数比 $w_1/w_2, w_1/w_3$ の減少とともに, 最大通過熱流束比 $Q_{t\max}$ および最大流入熱流束比 $Q_{i\max}$ は減少する。最大流入熱流束比 $Q_{i\max}$ は最大通過熱流束比 $Q_{t\max}$ よりも, 重み係数比による値の変化は小さい。また, Case 2ではCase 1に比べて, 重み係数比 $w_1/w_2, w_1/w_3$ の減少による最大通過熱流束比 $Q_{t\max}$ および最大流入熱流束比 $Q_{i\max}$ の減少の割合は小さい。

図7は各ケースの最大応力比の逆数 $1/f_{\max}$ および無次元熱抵抗 $1/\bar{K}$ の重み係数比による変化を示している。重み係数比 $w_1/w_2, w_1/w_3$ の減少とともに, 最大応力比の逆数 $1/f_{\max}$ は減少する一方, 無次元熱抵抗 $1/\bar{K}$ は増加し, 両者の間にトレードオフの関係が見られる。すなわち, 重み係数比 $w_1/w_2, w_1/w_3$ を減少させることによって, 円板の遮熱性は向上するが, 熱応力破壊に対する強度の余裕度は低下することがわかる。

図8はCase 1について, 三通りの重み係数比に対する最大応力比 $f_{\max}$, 最大通過熱流束比 $Q_{t\max}$ および最大流入熱流束比 $Q_{i\max}$ との関係を示したものである。重み係数比が $w_2/w_1=0.0$ のとき, 最大応力比 $f_{\max}$ は他の重み係数比の場合に比べて最も小さいが, 最大通過熱流束比 $Q_{t\max}$ および最大流入熱流束比 $Q_{i\max}$ は大きく, 熱応力に対する強度の確保を重視した材料組成設計となる。また, 重み係数比 $w_1/w_2=$

Fig. 8 Relationship of absolute stress ratio $f_{\max}$ and maximum heat flux ratios $Q_{t\max}$ and $Q_{i\max}$

0.5, 0.25 では, $w_2/w_1=0.0$ の場合に比べて, 熱負荷に対する遮熱性の向上を重視した材料組成設計となる。したがって, 重み係数比の適切な選択によって, 最大応力比 $f_{\max}$ の増大をある値までに抑え, かつ, 最大通過熱流束比 $Q_{t\max}$ を減少させることが可能であると考えられる。すなわち, 重み係数比の制御によって, 熱応力に対する強度と熱負荷に対する遮熱性の両特性を考慮した材料組成の設計が可能であるといえる。

4. 結 言

本研究では, 表面一様加熱を受ける不均質円板の一次元非定常熱伝導問題および熱曲げ問題を軸対称条件のもとで理論解析した。次に, 熱応力に対する強度と熱負荷に対する遮熱性の向上という二つの目的を考慮した不均質円板の材料組成の最適化問題を, 多目的計画法の一つである重み係数法に基づいて取扱った。そして, 片側表面加熱を受けるチタン合金-ジルコニアセラミックス系傾斜機能円板を対象として, 熱応力に対する強度の確保と熱負荷に対する遮熱性の向上という二つの目的を同時に達成するための材料組成の多目

的最適化の数値シミュレーションを実行した。数値シミュレーション結果から, 最大応力比と最大通過熱流束比および最大流入熱流束比とのトレードオフ関係が明らかにされた。さらに, 熱応力に対する強度の確保と熱負荷に対する遮熱性の向上を考慮した不均質材料組成の多目的最適設計に対する本手法の有効性が示された。

文 献

- (1) 傾斜機能材料研究会・社団法人未踏科学技術協会編, 傾斜機能材料, (1993), 3, 工業調査会.
- (2) Tanigawa, Y., Ootao, Y. and Kawamura, R., *J. Thermal Stresses*, **14**-3 (1991), 285-308.
- (3) 谷川義信・河村隆介, 機論, **57**-540, A (1991), 1847-1853.
- (4) Hetnarski, R. B. 編, *Thermal Stresses I*, (1986), 45, Elsevier.
- (5) 川崎亮・目比野敦・渡辺龍三, 日本金属学会誌, **56**-4 (1992), 472-480.
- (6) 熱力学教育研究会編, 機械技術者のための熱力学, (1995), 179, 産業図書.
- (7) 坂和正敏, 非線形システムの最適化, (1986), 114, 森北出版.
- (8) 嘉納秀明, システムの最適理論と最適化, (1987), 82, コロナ社.