一次元一軸せん断弾・塑・粘塑性応力波伝ば理論*

谷 本

昇^{*1}

One-Dimensional Theory of Uni-Axial Shear Elastic-Plastic-Viscoplastic Stress Waves of Solids

Noboru TANIMOTO

An uni-axial shear elastic-plastic-viscoplastic constitutive equation has been derived from the generalized constitutive equation. The constitutive equation is in which the understress is introduced to the shear strain and the overstress is employed in the shear viscoplastic strain rate. Using the constitutive equation, an analysis is done on the one-dimensional uni-axial shear elastic-plastic-viscoplastic stress wave propagation. And the equations describing the wave propagation speed and the relation of any physical quantities are derived. The derived equation for describing the shear wave propagation speed expresses the experimental results qualitatively. Also, from the developed theory of the shear elastic-plastic-viscoplastic wave propagation, the theories of a shear elastic-plastic, elastic-viscoplastic and elastic wave propagation are derived. The wave propagation speed of the elastic-viscoplastic theory can't express that of the experimental results at all except the precursor.

Key Words: Stress Wave, Constitutive Equation, Plasticity, Elasticity, Inelasticity, Viscoplasticity, Understress, Overstress, Wave Propagation Speed, Shear

1. 緒 言

固体材料の動的変形挙動の研究は数多くなされてきているが、一軸せん断応力波の伝ば速度の測定に関する実験的研究は非常に少ない^{(1)~(9)}。BanerjeeとMalvern⁽¹⁰⁾は、せん断弾・塑・粘塑性、弾・塑性および弾・粘塑性構成式を用いて数値計算を行い、YewとRichardson⁽¹¹⁾によるねじりせん断波伝ば実験結果との比較検討を行った。そこでは、ひずみ・時間関係について、各理論による数値解と実験結果の比較的良好一致を得たとしている。しかし、そこでは、波動伝ば速度の理論と実験の比較検討がなされていない。一方、構成式に関して、多くの議論がある⁽²⁾⁽⁴⁾⁽⁷⁾。

本論文では、固体の弾性、塑性および粘性を考慮した一軸せん断弾・塑・粘塑性構成式⁽¹²⁾を用いて、一次元一軸せん断弾・塑・粘塑性応力波伝ばを解析する。その結果、ひずみ速度依存形(あるいは、応力速度依存形)のせん断弾・塑・粘塑性応力波伝ば速度の式を示す。次に、導出した応力波伝ば速度の式で、実験

結果を定性的に説明することができることを示す。また、せん断弾・塑・粘塑性応力波伝ば理論がせん断弾・塑性、せん断弾・粘塑性およびせん断弾性応力波伝ば理論を含むことを示す。さらに、瞬間塑性について考察する。なお、ここでは、熱エネルギーを考慮しない。

2. 基 礎 式

固体の動的挙動を支配する方程式系は

$$\rho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \dots\dots\dots (1)$$

$$\dot{\rho} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2\mu} + \Psi(H) \right\} \dot{s}_{ij} + \Phi(F) s_{ij} \\ \quad + \frac{1}{9K} \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} & \text{for } F > 0 \dots\dots (3 \cdot a) \\ \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{9K} \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} & \text{for } F \leq 0 \\ \dots\dots\dots (3 \cdot b) \end{cases}$$

である。式(1)と式(2)は運動方程式と連続の式⁽¹³⁾であり、式(3)は弾・塑・粘塑性構成式⁽¹²⁾である。 $\rho, v_i, \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ および s_{ij} は密度、粒子速度、応力、ひずみおよび偏差応力である。ドット(・)は時間微分を表

* 1997年3月17日 機械学会九州支部第50期総会・講演会において講演、原稿受付 1997年3月19日。

*1 正員、宇部工業高等専門学校機械工学科 (〒755 宇部市常盤台)。

す、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、 μ と K は横弾性係数と体積弾性係数である。 $\Psi(H)$ と $\Phi(F)$ は低下応力関数(あるいは塑性関数)と超過応力関数(あるいは粘塑性関数)であり、 H と F は低下応力と超過応力である。低下応力は正を採用する。塑性は非弾性の中の定常成分であり、粘塑性は非弾性の中の非定常成分である。弾性ひずみはコーシーの法則(フックの法則)⁽¹⁴⁾に従う。塑性ひずみと粘塑性ひずみは非圧縮性を有すると仮定する。

一軸せん断弾・塑・粘塑性構成式は、式(3)から

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{\mu} + \phi(H) \right\} \dot{\epsilon} + \phi(F) \tau & \text{for } F > 0 \quad \dots\dots\dots (4\cdot a) \\ \frac{1}{\mu} \dot{\epsilon} & \text{for } F \leq 0 \quad \dots\dots\dots (4\cdot b) \end{cases}$$

となる⁽¹²⁾。ここで、 γ と τ は工学せん断ひずみとせん断応力であり、 $\gamma = 2\epsilon_{12}$ と $\tau = \sigma_{12}$ を用いた。 H と F は低下応力と超過応力

$$H = \frac{\tau^E}{\tau} - 1 \quad \dots\dots\dots (5\cdot a)$$

$$F = \frac{\tau}{\tau_s} - 1 \quad \dots\dots\dots (5\cdot b)$$

である。 $\phi(H)$ と $\phi(F)$ は低下応力関数(あるいは塑性関数)と超過応力関数(あるいは粘塑性関数)

$$\phi(H) = \frac{2}{\zeta} H^{k_1} \quad \dots\dots\dots (5\cdot c)$$

$$\phi(F) = \frac{2}{\eta} F^{k_2} \quad \dots\dots\dots (5\cdot d)$$

である。ここで、 ζ と η は塑性係数と粘塑性係数であり、 k_1 と k_2 は塑性定数と粘塑性定数である。 τ^E と τ_s は仮弾性せん断応力と静的単純せん断応力

$$\tau^E = \mu \gamma \quad \dots\dots\dots (5\cdot e)$$

$$\gamma_s = \frac{\tau_s}{\mu} + a \left(\frac{\tau_s}{\tau_Y} - 1 \right)^b \quad \dots\dots\dots (5\cdot f)$$

である。ここで、 a と b は材料定数であり、 τ_Y は静的せん断初期降伏応力である。静的応力 τ_s の関数形は、静的試験結果を表すものなら、任意である。また、 $\tau_s = (\sigma_{12})_s$ 、 $\gamma_s = 2(\epsilon_{12})_s$ および $\tau_Y = (\sigma_{12})_Y$ を用いた。式(4)は超過応力を採用しているの、式(5・f)の τ_s を式(5・b)で用いるとき、式(5・f)の静的ひずみ γ_s を現在のひずみ γ に置換しなければならない。関数形式(5・f)を用いる場合、 γ を引数とする τ_s の関数形は陽の形で求めることができないが、数値的に求めることができる。

3. 一次元問題の解析

ラグランジュ座標を採用する。各物理量は時間 t と位置 x の関数である。一次元棒の軸方向に $i=1(j=$

1)をとる。一軸せん断応力の一次元棒の運動の支配方程式は、式(1)、(2)および式(4)から

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial \gamma^e}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (8\cdot a)$$

$$\frac{\partial \gamma^p}{\partial t} = \phi \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (8\cdot b)$$

$$\frac{\partial \gamma^{vp}}{\partial t} = \phi \tau \quad \dots\dots\dots (8\cdot c)$$

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^i \quad \dots\dots\dots (8\cdot d)$$

$$\gamma^i = \gamma^p + \gamma^{vp} \quad \dots\dots\dots (8\cdot e)$$

となる。ここで、右肩 e, p, vp および i は弾性、塑性、粘塑性および非弾性を表す。また、 $v = v_1$ 、 $\gamma^e = 2\epsilon_{12}$ 、 $\gamma^p = 2\epsilon_{12}^p$ 、 $\gamma^{vp} = 2\epsilon_{12}^{vp}$ および $\gamma^i = 2\epsilon_{12}^i$ を用いた。式(6)と式(7)は運動方程式と連続の式であり、式(8)は弾・塑・粘塑性構成式である。式(6)～(8)を整理すると次式を得る。

$$L(W) \equiv A W_t + B W_x + D = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

右下添字 t と x は、それぞれの変数による偏微分を表す。 A と B はマトリックス、 W と D は列ベクトルを表す。

$$A = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu & -1 & 0 \\ 0 & \phi & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10\cdot a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10\cdot b)$$

$$W = \begin{bmatrix} v \\ \tau \\ \gamma^i \\ \gamma^e \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10\cdot c)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10\cdot d)$$

式(9)は W を未知数とする双曲形・準線形・一階偏微分方程式である。式(9)は特性曲線法で解くことができる⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾。式(9)の固有値 λ 、すなわち、特性速度は、

$$|\lambda A - B| = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

から求めることができ、特性曲線は

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \quad \dots\dots\dots (12)$$

から求めることができるので、特性速度は c , $-c$ および零となり、特性曲線は

$$\frac{dx}{dt} = c \quad \dots\dots\dots (13\cdot a)$$

$$\frac{dx}{dt} = -c \quad \dots\dots\dots (13\cdot b)$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (13\cdot c)$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (13\cdot d)$$

となる。ここで、 c は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\mu} + \phi\right)}} \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c \quad \dots\dots\dots (14\cdot a), (14\cdot b)$$

であり、せん断弾・塑・粘塑性波動伝ば速度である。また、 c は次の不等式を満足する。

$$c \leq c_2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ はせん断弾性波伝ば速度である。式(15)の等号は $\phi=0$ (せん断塑性ひずみが零) のとき成立する。さらに、

$$\frac{dc}{d\gamma} = -\frac{\mu k_1 \phi c^3 (1+H)}{2c_2^2 H \gamma} \quad \dots\dots\dots (16)$$

であり、

$$\frac{dc}{d\gamma} \leq 0 \quad \text{for} \quad \gamma > 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

である。 $\gamma < 0$ の場合、 γ の絶対値に対して、式(17)と同様な結論を得ることができる。式(17)から、せん断応力波伝ば速度は、せん断ひずみの増加に対応して、減少することがわかる。しかも、 c は、 c - γ 平面上で、 γ が初期降伏せん断ひずみ γ_Y より大きい範囲で、 c 軸に対して凹形となる。したがって、式(14)は実験結果⁽¹¹⁾ を定性的に説明する。式(11)の各固有値に対して、左固有列ベクトル $\mathbf{l}$ が存在し、式 $\mathbf{l}^T \cdot (\lambda \mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0$ から、

$$\mathbf{l}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\rho c \\ -\rho c \\ -\rho c \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18\cdot a)$$

$$\mathbf{l}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho c \\ \rho c \\ \rho c \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18\cdot b)$$

$$\mathbf{l}_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18\cdot c)$$

$$\mathbf{l}_{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18\cdot d)$$

を得る。ここで、右肩 T は転置を表す。式(9)と式(18)の線形結合

$$\mathbf{l}^T \cdot \mathbf{L} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

から、

$$\frac{d\tau}{dt} \mp \rho c \frac{dv}{dt} + \rho c^2 \phi \tau = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c \quad \dots\dots\dots (20\cdot a), (20\cdot b)$$

$$\frac{d\gamma^e}{dt} - \frac{1}{\mu} \frac{d\tau}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (21\cdot a)$$

$$\frac{d\gamma^i}{dt} - \phi \frac{d\tau}{dt} - \phi \tau = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (21\cdot b)$$

を得る。式(20)と式(21)は、弾・塑・粘塑性構成式を用いたとき、特性曲線に沿う微分方程式である。式(20)はせん断応力速度・加速度関係を、式(21・a)はせん断弾性ひずみ速度・せん断応力速度関係を、式(21・b)はせん断非弾性ひずみ速度・せん断応力速度関係を表す。式(20)と式(21)を t - x 平面上で差分法により数値計算することができ、粒子速度、応力、弾性ひずみおよび非弾性ひずみなどを求めることができる。

次に、特性曲線上で成立する、せん断弾・塑・粘塑性体の加速度・ひずみ速度関係を導出すると、

$$\frac{dv}{dt} \mp c \frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c \quad \dots\dots\dots (22\cdot a), (22\cdot b)$$

となる。式(22)は次のようにして求めることができる。式(8)は構成式であり、座標系はラグランジェ座標であるので、

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} \quad \text{for} \quad \text{Lagrange coordinate} \quad \dots\dots\dots (23)$$

である。したがって、式(8)と式(23)から次式を得る。

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{1}{\mu} + \phi \right) \frac{d\tau}{dt} + \phi \tau \quad \text{for any } x \text{ and } t \quad \dots\dots\dots (24)$$

また、「任意の位置 x と時間 t 」は特性曲線「 $dx/dt = \pm c$ 」を含むので、次の関係が成立する。

$$\{ \text{any } x \text{ and } t \} \ni \left\{ \frac{dx}{dt} = \pm c \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(14)と式(25)を考慮すると、式(24)から次式を得る。

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{d\tau}{dt} + \phi \tau \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c$$

……………(26・a), (26・b)

したがって、式(20)と式(26)から式(22)を得る。式(22)は一次元棒の初期値・境界値問題の数値計算を行うとき必ずしも必要としない。しかし、一次元棒の長さを与えなくて、加速度・ひずみ速度関係を求めるとき、式(22)を使うことができる。

次に、弾・塑・粘塑性構成式を用いたとき、波動伝ば速度式(14)の別形式を導出すると、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{d\gamma^{vp}}{d\tau} \right)}} \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c$$

……………(27・a), (27・b)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{\phi \tau}{\dot{\tau}} \right)}} \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c$$

……………(28・a), (28・b)

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{d\gamma^{vp}}{d\gamma}}} \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\gamma}} \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c$$

……………(29・a), (29・b)

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\phi \tau}{\dot{\gamma}}}} \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\gamma}} \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c$$

……………(30・a), (30・b)

を得る。式(27)～(30)は次のようにして求めることができる。式(8)から、式(23)と式(25)を考慮すると

$$\frac{1}{\mu} + \phi = \frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{d\gamma^{vp}}{d\tau} \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c$$

……………(31・a), (31・b)

を得る。したがって、式(14)と式(31)から式(27)を得る。さらに、式(8)、(23)および式(25)を考慮して、式(27)を変形すると式(28)～(30)を得る。波動伝ば速度式(14)と式(27)～(30)は等価である。式(27)は、全ひずみの応力に関する変化率と粘塑性ひずみの応力に関する変化率の差の関数が伝ば速度を与えることを表す。式(28)から伝ば速度は応力速度に依存することがわかる。式(29)は、弾・塑性伝ば理論における伝ば速度の形 $\sqrt{d\tau/d\gamma/\rho}$ に係数が掛かった形式である。この係数は粘塑性ひずみの全ひずみに関する変化率に依存する。この係数はひずみ速度の関数になる [式(30)]。式(30)から伝ば速度はひずみ速度に依存することがわかる。式(20)～(22)および式(27)～(30)から、粒子速度、応力、ひずみおよび波動伝ば速度は一対一に対応しないことがわかる。すなわち、粒子速度、応力、ひずみおよび波動伝ば速度はひずみ速度依存性(あるいは、応力速度依存性)を有する。せん断弾・塑・粘塑

性応力波伝ば理論は引張りの場合⁽¹⁷⁾と同じ形式となる。

4. 材料係数 ζ , η , k_1 および k_2 の求め方

せん断弾・塑・粘塑性構成式の材料係数は、静的および動的引張(圧縮)試験結果からの材料係数 ζ , η , k_1 および k_2 を⁽¹⁷⁾用いることができる。あるいは、薄肉円管の静的ねじり試験および動的ねじり試験から、引張りの場合と同様にして求めることができる。また、あるいは、他の方法による静的および動的せん断試験によって、引張りの場合と同様にして材料係数を求めればよい。

5. 弾・塑・粘塑性波動伝ば理論から 弾・塑性、弾・粘塑性および 弾性波動伝ば理論の導出

弾・塑性波動伝ば理論における必要な式は、粘塑性ひずみが零であるので、せん断弾・塑・粘塑性波動伝ば理論の各式において、 $\gamma^{vp}=0$, $\phi=0$, $\gamma^i=\gamma^p$ と置くことによって求めることができる。構成式は式(4)から

$$\dot{\gamma} = \left\{ \frac{1}{\mu} + \phi \right\} \dot{\tau} \quad \text{……………(32)}$$

となる。式(32)は、塑性ひずみに低下応力を導入したせん断弾・塑性構成式の一形式である。支配方程式は式(6)～(8)から

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad \text{……………(33)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \gamma^e}{\partial t} + \frac{\partial \gamma^p}{\partial t} \quad \text{……………(34)}$$

$$\frac{\partial \gamma^e}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad \text{……………(35・a)}$$

$$\frac{\partial \gamma^p}{\partial t} = \phi \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad \text{……………(35・b)}$$

を得る。式(33)と式(6)、式(35・a)と式(8・a)はそれぞれ同じであるが、理解のしやすさのために再記した。必要な場合、他も同様にする。弾・塑性体の伝ば速度を c_{e-p} と表記すると $c=c_{e-p}$ であるので、式(20)～(22)、(14)および式(27)～(30)から次式を得る。

$$\frac{d\tau}{dt} \mp \rho c_{e-p} \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c_{e-p}$$

……………(36・a), (36・b)

$$\frac{dv}{dt} \mp c_{e-p} \frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c_{e-p}$$

……………(37・a), (37・b)

$$\frac{d\gamma^e}{dt} - \frac{1}{\mu} \frac{d\tau}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (38\cdot a)$$

$$\frac{d\gamma^p}{dt} - \phi \frac{d\tau}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (38\cdot b)$$

$$c_{e-p} = \frac{1}{\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\mu} + \phi\right)}} \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c_{e-p} \quad \dots\dots\dots (39\cdot a), (39\cdot b)$$

$$c_{e-p} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{d\gamma}} \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c_{e-p} \quad \dots\dots\dots (40\cdot a), (40\cdot b)$$

式(39)は、弾・塑・粘塑性構成式を用いたときの式(14)と形式が同じである。しかし、式(39)は粘塑性ひずみを考慮していないので、式(14)と式(39)と内容が異なる。この内容の相違は式(40)と式(30)の比較から容易にわかる。

弾・粘塑性波動伝ば理論における必要な式は、塑性ひずみが零であるので、せん断弾・塑・粘塑性波動伝ば理論の各式において、 $\gamma^p=0$, $\phi=0$, $\gamma^i=\gamma^{vp}$ と置くことによって求めることができる。構成式は式(4)から

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu} \dot{\tau} + \phi \dot{\tau} \quad \dots\dots\dots (41)$$

を得る。式(41)は、超過応力関数と応力の積を粘塑性ひずみ速度としたせん断弾・粘塑性構成式の一形式である。支配方程式は式(6)～(8)から

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \gamma^e}{\partial t} + \frac{\partial \gamma^{vp}}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$\frac{\partial \gamma^e}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (44\cdot a)$$

$$\frac{\partial \gamma^{vp}}{\partial t} = \phi \dot{\tau} \quad \dots\dots\dots (44\cdot b)$$

となる。弾・粘塑性体の伝ば速度を c_{e-vp} と表記すると $c=c_{e-vp}$ であるので、式(20)～(22), (14)および式(27)～(30)から次式を得る。

$$\frac{d\tau}{dt} \mp \rho c_2 \frac{dv}{dt} + \rho c_2^2 \phi \dot{\tau} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c_2 \quad \dots\dots\dots (45\cdot a), (45\cdot b)$$

$$\frac{dv}{dt} \mp c_2 \frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c_2 \quad \dots\dots\dots (46\cdot a), (46\cdot b)$$

$$\frac{d\gamma^e}{dt} - \frac{1}{\mu} \frac{d\tau}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (47\cdot a)$$

$$\frac{d\gamma^{vp}}{dt} - \phi \dot{\tau} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (47\cdot b)$$

$$c_{e-vp} = c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c_2 \quad \dots\dots\dots (48\cdot a), (48\cdot b)$$

式(48)から、せん断弾・粘塑性理論では波動伝ば速度

は一定となり、先行波を除いて、実験結果⁽¹¹⁾をまったく表現しないことがわかる。

弾性波動伝ば理論における必要な式は、塑性ひずみと粘塑性ひずみが零であるので、せん断弾・塑・粘塑性波動伝ば理論の各式において、 $\gamma^p=0$, $\gamma^{vp}=0$, $\gamma^i=0$, $\gamma=\gamma^e$, $\phi=0$, $\psi=0$ と置くことによって求めることができる。せん断弾性構成式は式(4)から

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu} \dot{\tau} \quad \dots\dots\dots (49)$$

となる。支配方程式は式(6)～(8)から

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (51)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (52)$$

である。弾性体の伝ば速度を c_e と表記すると $c=c_e$ であるので、式(20)～(22), (14)および式(27)～(30)から次式を得る。

$$\frac{d\tau}{dt} \mp \rho c_2 \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c_2 \quad \dots\dots\dots (53\cdot a), (53\cdot b)$$

$$\frac{dv}{dt} \mp c_2 \frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c_2 \quad \dots\dots\dots (54\cdot a), (54\cdot b)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} - \frac{1}{\mu} \frac{d\tau}{dt} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (55)$$

$$c_e = c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \text{for} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c_2 \quad \dots\dots\dots (56\cdot a), (56\cdot b)$$

このように、せん断弾・塑・粘塑性応力波伝ば理論から、せん断弾・塑性、せん断弾・粘塑性およびせん断弾性応力波伝ば理論を導くことができる。

6. 瞬間塑性に関する考察

構成式に関して、弾・塑性、弾・粘塑性および弾・塑・粘塑性などについて、多くの議論がある。本章で、この構成式に関する瞬間塑性について考察を行う。瞬間塑性には二つの意味が含まれている。一つは以下のとおりである。瞬間塑性があるということは、文字どおり解釈すると、 $t=0$ で塑性ひずみが生じることを意味する。現代の物理では、有限な速さの光速より速い現象はないのだから、この意味で、瞬間塑性が存在しないことは明らかである。波動伝ば問題で、塑性ひずみ・時間平面上で(パラメータは位置)塑性ひずみ速度(傾き)が無限大になり得ないことになる。すなわち、立上り時間が零ということはある得ないことになる。この議論は塑性ひずみと時間との関係に関することで

ある。塑性ひずみを、時間を除いた他の物理量に変えても同じ議論が成り立つ。この場合の瞬間塑性を(A)と呼ぶことにする。立上り時間が零であることと立上り時間を零に近似することは別問題である。

二つめは次のとおりである。構成関係に関する「瞬間」を考えると、上述の(A)以外に、時間を除いた物理量と物理量の関係における「瞬間」も考察する必要がある。非弾性ひずみと応力との関係における「瞬間」を考えなければならない。この場合、時間に対応する非弾性ひずみの時間と時間に対応する応力の時間は、非弾性ひずみと応力の関数関係において時間項がそれらの直接のパラメータがなくなるので、時間は直接的意味がなくなる。したがって、非弾性ひずみと応力の直接の関係を考察しなければならない。応力の増分に対応して「瞬間」に非弾性ひずみが増加するかどうかを考えなければならない。すなわち、応力増分と非弾性ひずみ増分が一對一に対応するかどうかを考えなければならない。この意味で、応力に対応する瞬間塑性は存在し得る〔式(57)参照〕。この場合の瞬間塑性を(B)と呼ぶことにする。

瞬間塑性を考えると、(A)と(B)を区別しなければならない。(A)と(B)を考えると、数学形式がその意味の理解を助けるし、重要である。

$$\frac{d\gamma^i}{dt} = f(\tau) \frac{d\tau}{dt} \dots\dots\dots (57\cdot a)$$

$$d\gamma^i = f(\tau) d\tau \dots\dots\dots (57\cdot b)$$

$$\gamma^i = h(\tau) \dots\dots\dots (57\cdot c)$$

$$\frac{d\gamma^i}{dt} = g(\tau) \dots\dots\dots (58\cdot a)$$

$$d\gamma^i = g(\tau) dt \dots\dots\dots (58\cdot b)$$

$$\frac{d\gamma^i}{dt} = P(\tau) \frac{d\tau}{dt} + Q(\tau) \dots\dots\dots (59\cdot a)$$

$$d\gamma^i = P(\tau) d\tau + Q(\tau) dt \dots\dots\dots (59\cdot b)$$

$$d\gamma^i = d\gamma^p + d\gamma^{vp} \dots\dots\dots (59\cdot c)$$

ここで、 h, f, g, P および Q は応力の関数である。式(57・a)～(57・c)は等価である。式(57・a)において、(A)の意味での瞬間塑性はあり得ないのだから、 $d\gamma^i/dt \neq \infty$ および $d\tau/dt \neq \infty$ であり、適当な $f(\tau)$ の選択より式(57・a)は成立し得る。式(57・b)において、 $f(\tau) \neq 0$ である限り、 $d\tau \neq 0$ のとき $d\gamma^i \neq 0$ となる。したがって、式(57・b)は、非弾性ひずみ増分が直接時間増分に関係なく、応力増分に対応して瞬間に生じ得ることを意味する。このことが(B)の意味での瞬間塑性である。式(57・c)において $h(\tau) \neq 0$ である限り、式(57・c)は、非弾性ひずみは応力の値に対応して瞬間に生じ得ることを意味する [(B)の意味]。

式(58・a)～(58・b)は等価である。式(58・a)において、(A)の意味における瞬間塑性があり得ないから、 $d\gamma^i/dt \neq \infty$ であるので、 $g(\tau)$ は $g(\tau) \neq \infty$ 以外の値をとり得る。式(58・b)において、 $g(\tau)$ が $g(\tau) \neq \infty$ 以外の値のとき、時間増分 $dt \neq 0$ に対して $d\gamma^i$ は $d\gamma^i \neq 0$ なる値をとり得る。式(58)は(B)の意味での非瞬間塑性を表す。さらに、式(58)は(A)の意味での非瞬間塑性を表すことも明らかである。

式(59・a)～(59・c)は等価である。式(59)が式(57)と式(58)の和を表すことは明らかである。

構成関係における「瞬間」は、上述したように二つの意味を含んでいるので、「瞬間」という語に注意を要する。式(57)の非弾性ひずみ増分はいわゆる塑性ひずみ増分である。塑性ひずみ増分は時間増分に直接関係ないので、この塑性ひずみ増分を非弾性ひずみ増分の中の定常成分と呼んでよい。式(58)の非弾性ひずみ増分はいわゆる粘塑性ひずみ増分である。粘塑性ひずみ増分は時間増分に直接関係するので、この粘塑性ひずみ増分を非弾性ひずみ増分の中の非定常成分と呼んでよい。式(59)の非弾性ひずみ増分は応力増分に対応するものと時間増分に対応するものの和であるので、非弾性ひずみ増分はいわゆる塑性ひずみ増分と粘塑性ひずみ増分の和である。したがって、この非弾性ひずみ増分は定常成分と非定常成分の和であると呼んでよい。式(59)が式(57)と式(58)を含むことは明らかである。

もし、「定常」と「非定常」の言葉を使うなら、既存の典型的な構成式に関して、以下のような説明ができる。弾・塑性構成式の塑性ひずみは、非弾性ひずみの定常成分だけである。弾・粘塑性構成式の粘塑性ひずみは、非弾性ひずみの非定常成分だけである。弾・塑・粘塑性構成式の非弾性ひずみは、非弾性ひずみの定常成分と非定常成分の和である。

もし、(B)の意味で、「瞬間」と「非瞬間」の言葉を使うなら、以下のような説明ができる。弾・塑性構成式の塑性ひずみは瞬間塑性ひずみだけである。弾・塑性理論はひずみ速度不依存材、あるいは、ひずみ速度依存性の小さい材料に対してよい近似となっており、広く使われている。さらに、弾・塑性構成式はひずみ速度依存材の準静的挙動に対して適用し得る。弾・粘塑性構成式の粘塑性ひずみは非瞬間塑性ひずみだけである。弾・粘塑性理論も使われている。しかし、弾・粘塑性理論による理論波動伝ば速度〔式(48)〕はつねに一定となり、先行波の伝ば速度を除いて、実験結果をまったく表現できないことに注意すべきである。弾・塑・粘塑性構成式の非弾性ひずみは瞬

間塑性ひずみと非瞬間塑性ひずみの和である。本論文で展開したせん断弾・塑・粘塑性理論における構成式は、(B)の意味での瞬間塑性ひずみに低下応力を導入し、(A)と(B)の意味での非瞬間塑性ひずみ速度に超過応力を採用したものである。この理論は応力のひずみ速度依存性(あるいは、ひずみの応力速度依存性)と伝ば速度のひずみおよびひずみ速度依存性(あるいは、応力および応力速度依存性)を表現する。

7. 結 言

低下応力を塑性ひずみ成分に導入し、超過応力を粘塑性ひずみ速度に採用したせん断弾・塑・粘塑性構成式を用いて、一次元一軸せん断応力波伝ばを解析し、波動伝ば速度の式および各物理量の関係式を導出した。導出したせん断弾・塑・粘塑性応力波伝ば速度の式は実験結果を定性的に表現する。さらに、展開したせん断弾・塑・粘塑性応力波伝ば理論は、せん断弾・塑性、せん断弾・粘塑性およびせん断弾性応力波伝ば理論を含むことを示した。また、瞬間塑性に関して、「瞬間」には二つの関係が含まれることを考察した。

文 献

- (1) Kolsky, H., *Stress Waves in Solids*, (1963), 175-182, Dover, New York.
- (2) N・クリステスク (黒崎永治訳), 衝撃塑性, (1970), 167-179, コロナ社.
- (3) Jhonson, W., *Impact Strength of Materials*, (1972), 121-211, Edward Arnold, London.
- (4) Zukas, J. A., Nicholas, T., Swift, H. F., Greszczuk, L. B. and Curran, D. R., *Impact Dynamics*, (1982), 106-109, Krieger.
- (5) 林卓夫・田中吉之助編著, 衝撃工学, (1988), 45-49, 日刊工業新聞社.
- (6) 日本機械学会編, 衝撃破壊工学, (1990), 172-178, 技報堂.
- (7) Zukas, J. A., ed., *High Velocity Impact Dynamics*, (1990), 173-181, John Wiley and Sons.
- (8) 岸田敬三, 固体の動力学, (1993), 79-104, 培風館.
- (9) 高山和喜編, 衝撃波ハンドブック, (1995), 303-306, シュプリンガー・フェアラーク, 東京.
- (10) Banerjee, A. K. and Malvern, L. E., Computation of Incremental Torsional Plastic Waves with Rate-Dependent Models, *Int. Solids Struct.*, **11** (1975), 347-355.
- (11) Yew, C. H. and Richardson, H. A., Jr., The Strain-Rate Effect and the Incremental Plastic Wave in Copper, *Exp. Mech.*, (1969), 366-373.
- (12) 谷本昇, 一般化弾・塑・粘塑性構成式, 機講論, No. 965-1 (1996-3), 13-14.
- (13) Y・C・フアン (大橋義夫・村上澄男・神谷紀生訳) 固体の力学/理論, (1979), 121-122, 培風館.
- (14) D・C・リー (村上澄男訳), 非線形連続体力学, (1975), 6-9, 共立出版.
- (15) Courant, R. and Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics, II*, Partial Differential Equations, (1962), 424-427, Interscience.
- (16) Jeffrey, A. and Taniuti, T., *Non Linear Wave Propagation*, (1964), 65-71, Academic.
- (17) 谷本昇, 一軸応力状態における固体の一次元応力波伝ば理論, 機論, **62**-594, A (1996), 437-444.