GA と局所ルールによる薄板補強リブの最適化*

尾 田 十 八^{*1}, 劉 江 林^{*2}Rib Optimum Layout of a Thin Plate
Using a Genetic Algorithm and Local Rule

Juhachi ODA and Jianglin LIU

In this paper, a new technique for optimum rib layout in plate and shell structures is presented using the genetic algorithm. In the technique, the design model is discretized into bending plate elements. Element thicknesses such as t_{plate} and t_{rib} for plate and rib elements correspond to GA genes 0 and 1, respectively. The chromosomes of GA are arranged in a matrix and have block crossover process between the blocks of 3×3 genes. To avoid rib element concentration, this block is subjected to several constraints. According to the strain energy density of elements, a local rule is formulated. Using this local rule, manipulation among genes can progress and convergence is rapid while the reliability of the GA is simultaneously improved. In this technique, the rib elements can be placed in optional positions. According to the connection of rib elements, optimal stiffener can be obtained without any special assumptions.

Key Words: Computational Mechanics, Optimum Layout of Stiffener, Structural Analysis, Minimum Compliance Design, Design Engineering, Genetic Algorithm

1. 結 言

薄板に補強リブを付けた構造形態は軽量化と剛性の観点から、実際設計に採用されることが多い。したがって、そのような補強リブ付き構造物の最適設計手法に関する研究は実用上重要である。ところで、従来の研究の大半は予め規定した補強リブ配置形態の下で各リブの寸法や配置間隔の最適化を目的としたものが多い^{(1),(2)}。また、補強リブの配置形態そのものを論じた研究としては、無限小板厚のリブを一方方向に無数に配置した擬似連続体構造の概念によって円板の円周方向配置リブの理論的極限を取り扱ったChengとOlhoffの一連の研究がある^{(3),(4)}。さらに、山崎ら⁽⁵⁾はこの概念を二方向リブに拡張して最適リブ形態の密度について論じた。しかし、薄板の補強リブはどのように形成すべきか、その寸法とその位相はどのように関連しているか、さらに補強リブの体積と薄板の体積の比はどのように取るべきか等はいまだ明らかにされていない。

そこで、本研究では、薄板を有限要素法 (Finite

Element Method : 以下FEMと略する) の要素に分割し、各要素の位置に関する情報と2次元染色体の遺伝的アルゴリズム⁽⁶⁾ (Genetic algorithm : 以下GAと略する) の遺伝子を対応させる。FEMとGAを組合せることで、補強リブの最適配置を求めることを考える。さらに、GAの遺伝子間に簡単な設計上の局所ルールを与え、その情報により、遺伝子操作を有効に行い、GAの信頼性と収束性を図ることを考える。数値例を通してこの手法の有効性を明らかにすると同時に、リブの体積を変化させ、リブ体積と板体積、リブ位相とその寸法などの関係を明らかにする。

2. GAと薄板補強リブの位相決定問題

設計対象は図1に示すような中央に集中荷重の作用する周辺単純支持正方形板(大きさ: $1000.0 \times 1000.0 \text{ mm}$)と相対する2辺が単純支持で他の2辺が自由の正方形板の2種類のモデルを考える。支持条件と荷重条件の対称性を考え、図1に示す設計モデルの4分の1 (□OABCの部分) を解析モデルとする。このモデルを図2(a)のように分割し、与えられた要素数の板厚を薄板の中央面に対称に厚くすることで、これら要素のつながることにより、補強リ

* 原稿受付 1997年1月22日。

^{*1} 正員, 金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野 2-40-20)。^{*2} 正員, 金沢大学大学院。

Fig. 1 Thin square plate under concentrated load

(a) finite element mesh (b) two dimensional chromosome

Fig. 2 Discretization of calculation model and its chromosome

ブ位相を知ることができる（以下では、板厚を厚くした要素をリブ要素と呼ぶ）。分割した各要素に対し、リブ要素の場合を1、リブ要素でない場合を0とすると、染色体の各遺伝子は図2(b)に示すように全て1か0で示される2次元状のものとなる。このような染色体を用いて最大剛性設計を行うとき、離散化したリブ形態を得るため、以下のような制約条件を設ける。

- (1) リブ体積の制約条件としてリブ要素数を一定に設定する。
- (2) 図3(b)のように厚くした要素の密集したり、逆に他のリブ要素と全くつながっていない単独のものを避ける。

正確なリブ形態を得るためには、解析モデルを細

(a) examples of good condition (b) examples of bad condition

Fig. 3 Rib arrangement conditions

かく分割することが望ましいが、要素数の増加につれて、組合せの数は莫大になり、以上の制約条件を満足する解を求めることは限界がある。そこで、後に述べるような局所ルールをGAに加えることにより、GAの信頼性と収束性を図ることを考える。

3. 板剛性と板厚との関係

図2(a)に示す n 個の要素に分割したモデルに対し、体積制約下でその剛性を最大にする各要素の板厚 $t_i(i=1,2,\dots,n)$ は下式のように求められる⁽⁷⁾。

$$t_i = \sum_{j=1}^q \left[\frac{3\mu_j}{\rho A_i} (U^T K_i U')_j \right] \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 q は変位制約の数、 U と U' はそれぞれ実際荷重と仮想荷重に対応している一般化変位で、 μ_j はラグランジュ乗数である。また、 ρ と A_i はそれぞれ材料の密度と要素の面積である。ここで、ただ1つの点の変位を剛性評価する場合、 $q=1$ であるから、式(1)は以下ようになる。

$$t_i = \frac{3\mu}{\rho A_i} (U^T K_i U') \dots \dots \dots (2)$$

仮想荷重が実際荷重に等しく、かつ $\mu=1/2$ のとき、式(2)の右辺は要素の単位面積当たりのひずみエネルギーである。よって、体積を一定に設定している薄板の離散化したモデルに対し、荷重点の変位を最小にすると、各要素の板厚はその単位面積当たりのひずみエネルギーに比例して変化すればよいことが分かる。一方、式(1)から、2つ以上の点の変位を剛性評価する場合、各要素の板厚は仮想仕事の組合せの値によって変化することも分かる。

4. GA操作に加える局所ルール

乱数によって発生した初期染色体や、交叉した後の染色体は必ずしも2章で述べた制約条件を満足しない。そこで、薄板の力学的な性質を考慮し、以下のような局所ルールをGAの操作に加えた。

4.1 他のリブ要素と全くつながっていないリブ要素を除く。

リブ形成の目的から、他のリブ要素とつながっていない単独のリブ要素は存在しないと考えられる。よって、各染色体のリブ要素に対し、その周囲の8つの要素の中でリブ要素が存在するかどうかを判断し、全く存在していない場合、この要素をリブ要素としないことにする。また、交叉した後の染色体にリブ要素数が与えられた要素数より少ないとき、乱

数でリブ要素を選択するが、選択された要素が他のリブ要素同士とつながっていないとき、この要素はリブ要素とせずに、再び他の要素を選択する。

4・2 隣接する4つの要素が同時にリブ要素の場合、その1つを次の方法で除く

周辺単純支持モデルでは、リブを付ける付けないに関わらず、その最大変位は荷重点である。したがって、一様分布板厚のときの単位面積当たりのひずみエネルギーの最も小さい要素のリブを取り除くことにした。

一方、相対する2辺が単純支持で他の2辺が自由のモデルでは、リブを付けることにより、その最大変位は O から A 点に変化する場合がある。本研究での最大剛性は最大変位を最小にすると定義しているので、1つの点の変位を最小にするのではなく、全ての最大になりうる点の変位を同時に最小にしなければならない。このようなモデルに対し、荷重点 O の変位が最大のとき、この変位を染色体の適応度とするが、リブ要素の分布によって点 A の変位が最大になる場合、この点の変位を染色体の適応度とする。このことによって、点 O 、 A の変位が同じようになるとき、薄板の剛性が最大になると予想される。したがって、このモデルにおいて任意要素 i の最適板厚は式(1)より下式のように与えられる。

$$t_i = \frac{3\mu_o}{\rho A_i} (U^T K_i U'_o) + \frac{3\mu_A}{\rho A_i} (U^T K_i U'_A) \dots (3)$$

ここで、 U'_o, U'_A は点 O 、 A で別々に単位仮想荷重を作用させるときの各要素の仮想変位であり、 μ_o, μ_A はラグランジ乗数である。本研究では、 μ_o を1、 μ_A を一様分布板厚の点 A と O の変位の比とした。隣接する4つの要素が同時にリブ要素のとき、式(3)より t_i の最も薄い要素のリブを取り除くことにした。

ただし、交叉した後の染色体でリブ要素数が設定したリブ要素数より多いとき、単なる乱数によってリブ要素を取り除くことにした。

5. 解析結果と考察

通常、単純GAでは最適解が局所解に陥らないため、突然変異という過程を設定しているが、本研究では乱数によって多すぎたリブ要素を取り除いたり、増加させたりしており、偶然的な因子はこれらの操作に含まれているので、突然変異を特に行わなかった。そして、解析モデルを図2(a)のように 10×10 に分割し、人口数を100、交叉率を0.8に設定して

解析を行い、連続的に30世代を経てもより良い解が更新されない場合のみ計算を終了した。また、エリート戦略として人口数5%の適応度上位の染色体は選択せずに強制的に他の染色体と交叉を行った。交叉手法としては 3×3 のブロックを用いる⁽⁸⁾。リブのない要素の板厚 t_{plate} を 10.0 mm に固定し、リブ要素の板厚(板厚を含む) t_{rib} をそれぞれ $1.5t_{plate}$ 、 $3t_{plate}$ 、 $5t_{plate}$ に、また、リブ要素数をそれぞれ15、25、35に設定した。

5・1 周辺単純支持モデル

GAの探索で得られた結果を図4に示す。 $t_{rib}=1.5t_{plate}$ のとき、リブ要素は単位面積当たりのひずみエネルギーの最も大きい点 O の近傍に集まっている(図4(a))。リブ要素数の増加に伴い、点 O と離れているもう1つの単位面積当たりのひずみエネルギーの大きい点 B の近傍でも、リブを形成する(図4(d),(g))。この結果は最適板厚の分布と類似している⁽⁹⁾。

また、リブの高さの増加に伴い、 $t_{rib}=3t_{plate}$ のとき、リブの配置は $t_{rib}=1.5t_{plate}$ の結果より、その O 点近傍のリブ領域は広がっている(図4(b),(e),(h))。

リブの高さをさらに増加させ、 $t_{rib}=5t_{plate}$ とすると、リブの形態は明確になっている。つまり、リブの配置は2つの単位面積当たりのひずみエネルギーの大きい点 O と B を中心にほぼ同心円状となり、さらに、この2つの離れている点(対角線)をつなぐリブも形成されてくる(図4(c),(f),(i))。

以上より、薄板に比較的高さの低いリブを配置させるときは、最適板厚の分布に基づき、小さな間隔で局部的にリブを発生させるのことが分かる。また、リブの間隔はその高さに対応して広がっていることも分かる。一方、リブの高さを薄板の5倍に取ると、リブの形態が明確になる。リブの配置は2つの離れている単位面積当たりのひずみエネルギーの大きい点を中心にほぼ同心円状になるものと、これらをつなぐリブが形成され、薄板の全体的な剛性を増加させる。

以上述べたことをより定量的に評価するため、表1にリブ付き板の最大変位 W とその等価体積(リブの体積を含む)の一様分布板厚の最大変位 W_0 との比を示す。また、図5にはこれを基に、横軸にリブ体積(リブ要素の板厚を含まない) V_{rib} と薄板体積 V_{plate} の比を、縦軸に W/W_0 を取って、リブ要素数と W/W_0 、リブの高さと W/W_0 の関係を示す。この図から、次のようなことが明らかとなる。

(1)リブ要素数を一定としたとき、リブの高さの増

Fig. 4 All edges simply supported square plate

Table 1 Comparisons of the maximum displacements under all edges simply supported square plate

Ribs	Thickness of rib element (t_{rib})	Specific maximum deflection W/W_0
15	$1.5t_{\text{plate}}$	0.691
	$3t_{\text{plate}}$	0.444
	$5t_{\text{plate}}$	0.272
25	$1.5t_{\text{plate}}$	0.705
	$3t_{\text{plate}}$	0.412
	$5t_{\text{plate}}$	0.293
35	$1.5t_{\text{plate}}$	0.715
	$3t_{\text{plate}}$	0.395
	$5t_{\text{plate}}$	0.356

Fig. 5 W/W_0 with various thicknesses and number of rib elements under all edges simply supported square plate

加に伴いリブの効果が上がる。

- (2) リブの体積を一定としたとき、リブ要素数の少ないほうが効果が大きい。
- (3) リブ要素数が少ないほど、リブの高さによる変化が激しい。
- (4) リブの高さを一定としたとき、リブ要素数による変化は小さい。

また、以上の計算から、リブ体積が薄板体積の約60%、リブの高さが板厚の5倍のとき、 W/W_0 を最小とする最適リブ形態が得られている。

5・2 相対する2辺が単純支持で他の2辺が自由のモデル

GAの探索で得られた結果を図6に示す。

$\text{trib}=1.5t_{\text{plate}}$ のとき、リブ要素が少ない場合、リブ

要素は最大変位点 O の近傍に集まっている(図6(a))。リブ要素数の増加に伴い、GAの探索で明確な傾向を示す収束解が得られなかった(図6(d),(g))。しかし、リブの高さの増加につれてその形態は明確になる。つまり、リブは2つの最大変位の生じる点 O, A の間で、この2点の変位が同じようになるバランスを取りながら、支持辺へ向かって形成される。リブ要素数が少ないとき、リブはやや点 O に近付いているが(図6(b),(c))、リブ要素数が多いとき、一様分布板厚のときのこの2点の変位値に比例する場所から支持辺に向かって形成される(図6(e), (f), (h), (i))。また、周辺単純支持モデルと同じようにリブの間隔はその高さに対応して広がっていることが分かる。周辺単純支持モデルと同様に、表2にリ

Fig. 6 Two opposite edges simply supported and others free square plate

Table 2 Comparisons of the maximum displacements under two opposite edges simply supported and others free square plate

Ribs	Thickness of rib element (trib)	Specific maximum deflection W/W_0
15	1.5t _{plate}	0.735 (O)*
	3t _{plate}	0.365 (A)*
	5t _{plate}	0.245 (A)
25	1.5t _{plate}	0.744 (O)
	3t _{plate}	0.350 (A)
	5t _{plate}	0.193 (A)
35	1.5t _{plate}	0.717 (O)
	3t _{plate}	0.374 (O)
	5t _{plate}	0.409 (O)

* (A) or (O) means the biggest deflection point

Fig. 7 W/W_0 with various thicknesses and No. of rib elements under two opposite edges simply supported square plate

ブ付き板の最大変位 W とその等価体積の一樣分布板厚の最大変位 W_0 との比を示す。また、これを基に、図 7 には図 5 と同様にリブ要素数と W/W_0 、リブの高さと W/W_0 の関係を示す。この図から次のようなことが明らかとなる。

- (1) リブ要素数を一定としたとき、リブの高さの増加に伴い、リブの効果が大きくなる。一方、リブの高さは $t_{rib}=5t_{plate}$ の場合、リブ要素数が 25 までリブの効果は増加していくが、その後、リブの効果が次第に小さくなっていく。
- (2) リブの高さは薄板の 1.5 倍から 3 倍までは、図 5 と同じようその高さが高くなるのに伴い、リブの効果が急激に増加していく。一方、リブ要素数が 15, 25 のとき、リブの高さが薄板の 3 倍を越えて高くすると、リブの効果が緩やかに増加していくが、リブ要素数が 35 のとき、リブの高さが高くなるのに伴い、リブの効果が次第に小さくなっている。

また、以上の計算から、リブ体積は薄板体積と同じで、かつリブの最適高さが板厚の 5 倍のとき、 W/W_0 を最小とする最適リブ形態が得られており、このことは周辺支持モデルと同じと言える。

要するに、リブの高さが薄板の約 5 倍で、その体積を薄板の 60% から 100% までの間で取ったほうが効果的である。ただし、薄板の支持が弱いとき、リブの体積はやや多く取るべきである。

6. 結言

本研究では、薄板の力学的な性質を考慮し、GA に局所ルールを加える薄板補強リブの最適化手法を提案し、数値例を通してその有効性を確認した。また、数値例から得られた結果は以下の通りである。

- (1) 周辺支持のモデルでは、リブは 2 つの離れている単位面積当たりのひずみエネルギーの大きい点を中心にほぼ同心円状のリブとこれらをつなぐリブを形成する。
- (2) 相対する両辺が単純支持で他の両辺が自由のモデルでは、リブは 2 つの最大変位の生じる点の間で、一方、一樣分布板厚のとき、この 2 点の変位値に比例する場所から支持辺に向かって形成される。
- (3) 最適リブ体積は薄板体積の約 60% から 100% までの間である。ただし、薄板の支持が弱いとき、リブ体積はやや多く取るべきである。
- (4) リブの最適高さは板厚の約 5 倍である。
- (5) リブの間隔はその高さに対応して広がる。

最後に本研究に協力された当時卒業研究生の出村康熙君に対して感謝の意を表する。

文 献

- (1) Patnaik, S.N. and Sankaran, G.V., Int.J. Num. Methods Engng., 10-2(1976), 283.
- (2) Richards, D.M., Int.J. Solids & Struct., 12-11(1976), 791.
- (3) Cheng, K.T., Int.J. Solids & Struct., 17-8(1981), 795.
- (4) Cheng, K.T. and Olhoff, N., Int.J. Solids & Struct., 18-2,(1982), 153.
- (5) 山崎・小林, 薄板のステイフナ形態の最大剛性設計法, 機論, 54-501, A (1989-5), 1165.
- (6) David E. Goldberg, Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning, Addison-Wesley Publ, (1989).
- (7) Jean-louis Armand and Bernard Lodier, International Journal for numerical methods in engineering, Vol. 13, 373-384(1978).
- (8) 尾田・白井・劉, 多次元染色体を用いた GA 法とその構造位相決定問題への応用, 機論, 62-593, A (1996-1), 287.
- (9) 日本機械学会, 構造・材料の最適設計, (1989.7), 技報堂出版.