極異方性弾性体に対する二次元面内問題
および面外せん断問題の基本解*平 島 健 一^{*1}, 倪 信 義^{*2}Fundamental Solutions of Two-Dimensional In-Plane Problems and
Out-of-Plane Shear Problems for Cylindrically Anisotropic Elastic Medium

Ken-ichi HIRASHIMA and Shin-i NI

In the present paper, we summarize the basic equations for a cylindrically anisotropic elastic medium of two-dimensional in-plane problems and out-of-plane shear problems, and show the fundamental closed-form solutions of displacement and stress components by using stress functions. The results contain some new multivalued solutions for in-plane problems and can be widely utilized for the fields of solid mechanics, strength of materials and theory of structures. Further, we show general solutions for a circular hollow ring with given stress boundary conditions of Fourier trigonometric series.

Key Words: Cylindrical Anisotropy, Elasticity, Fundamental Solutions, Concentrated Forces, Circular Hollow Ring, In-Plane Loading, Out-of-Plane Shear Loading

1. 緒 言

円筒状の繊維複合材は製作の容易さや力学的諸特性のすぐれていることなどを踏えて各方面で多用されている。それらの動向に合わせて、理論解析が実施され、例えば、*Lekhnitskii* の系統的な研究⁽¹⁾を踏えて、*Pagano*⁽²⁾, *Pagano & Tandon*⁽³⁾ および *Mikata & Taya*⁽⁴⁾らの *Coated - Fiber*を有する極異方性繊維材料の解析、*Hoff*⁽⁵⁾による円孔を有する極異方性平板の応力解析、*Das & Hazen, Liu & Bert*⁽⁵⁾による補強リングを有する無限弾性体の応力・変位解析がある。また、内外圧を受ける極異方性円筒問題を取り扱ったものに *Nowinski*⁽⁸⁾, *Hogan & Baxter*⁽⁹⁾らの研究がある。

この他に単一層や多層状の極異方性円筒シェルを対象とした数多くの研究^{(10)~(12)}がなされている。さらに、それ以外にも膨大な数の論文が発表されている。しかしながら、この極異方性弾性体問題について、面外せん断問題を含めて系統的に取り扱った論文は見当たらないのが現状である。

本論文はこの視点に立って面内荷重問題および面外せん断荷重問題の基礎式を整理し、新しく得られた解を含めて系統的な閉じた型の厳密解を誘導すると共に、円形リングの内外境界に一般的な面内の外荷重が作用する問題の解析結果を示す。

2. 基礎関係式

基礎式を示す前に、ここでの問題の分類を明確にしておく。まず面内問題 (In-Plane Problems) とは通常の平面応力、平面ひずみ状態に対する問題であって、力学量としての応力、ひずみが面外方向の座標 z に依存しないような状態を指すものであり、面外せん断問題 (Out-of-Plane Shear Problems; Anti-Plane Shear Problems) とは St. Venant の単純ねじり問題に代表されるようなもので、 x, y 平面内の応力、およびひずみの成分は恒等的に零であって、座標 z に関係するせん断応力、およびせん断ひずみ成分のみが存在し、しかも平面内の座標 (x, y) ないしは (r, θ) のみに依存する問題である。以下に、それぞれの問題に分けて基礎関係式を示す。

まず、通常の 2 次元直交デカルト座標系 (x, y) と極座標系 (r, θ) との関係は、図 1 から次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \theta &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

基本的な Laplace 演算子は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

図 1 のような座標系において、それぞれの座標系での変位ならびに応力成分の変換関係式は次のような形で与えられる。

* 原稿受付 1997 年 1 月 16 日。

^{*1} 正員、山梨大学工学部 (〒400 甲府市武田 4-3-11)。^{*2} 山梨大学工学部学生。

Fig.1 Relation between rectangular Cartesian coordinates and cylindrical(polar) coordinates

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta, \\ u_y &= u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta, \\ u_z &= u_z, \\ \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_z &= \sigma_z, \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ \tau_{xz} &= \tau_{rz} \cos \theta - \tau_{\theta z} \sin \theta, \\ \tau_{yz} &= \tau_{rz} \sin \theta + \tau_{\theta z} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

なお、ひずみについての変換関係式は、上式の直応力 $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ および $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z)$ を直ひずみ $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$ および $(\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z)$ で置き換え、せん断応力 $(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ および $(\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z})$ を工学的せん断ひずみ $(\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ および $(\gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{\theta z})$ の $\frac{1}{2}$ 倍したもので置き換えれば、式(3)がそのまま成立する。

以下の基礎関係式ならびに解においては、物体力をすべて無視したものを提示する。

2.1 面内問題の極座標系での基礎関係式

(a) 釣合方程式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(b) 幾何学(ひずみ-変位)関係式：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(c) 構成関係式：

$$\begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここに、 a_{ij} は弾性コンプライアンスであり、平面応力状態に対しては、次のような値をとる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_r}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} = -\frac{\nu_{\theta r}}{E_r}, \\ a_{22} &= \frac{1}{E_\theta}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{r\theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

また、平面ひずみ状態に対しては、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}}{E_r}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{r\theta} + \nu_{\theta r} \nu_{\theta z}}{E_\theta}, \\ a_{22} &= \frac{1 - \nu_{\theta z} \nu_{z\theta}}{E_\theta}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{r\theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

上式において、 E_r および E_θ はそれぞれ半径方向および円周方向の弾性係数であり、 $G_{r\theta}$ は (r, θ) 面内のせん断弾性係数、 ν_{ki} は k 方向に応力を受けたときの k 方向のひずみに対するそれと直交する i 方向のひずみの比に関するポアソン比を意味する。なお、等方性体の場合の a_{ij} は次式のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = \frac{1}{E}, \quad a_{12} = -\frac{\nu}{E}, \\ a_{66} &= \frac{1}{G} = \frac{2(1 + \nu)}{E}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、 E, ν および G はそれぞれ等方性体に対する弾性係数、ポアソン比およびせん断弾性係数である。

(d) 変位表示した基礎方程式：

式(5)を(6)に代入し、それを応力表示し、その結果を式(4)に代入すれば、変位表示した釣合方程式(面内の Navier 方程式)が、以下のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} a_{22} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - a_{11} \frac{1}{r^2} u_r + \eta \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \\ + (\eta - a_{12}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - (\eta + a_{11}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \\ (\eta - a_{12}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + (\eta + a_{11}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ + \eta \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + a_{11} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに、 η は次式のように定義した量である。

$$\eta = \frac{1}{a_{66}} (a_{11} a_{22} - a_{12}^2). \quad (11)$$

(e) 応力関数 $F(r, \theta)$ の満たすべき基礎方程式：

釣合方程式(4)を満たすように Airy の応力関数 $F(r, \theta)$ を以下のように導入する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

さらに、ひずみ成分 $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$ は式(5)の関係式より次式の適合条件式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} - r^2 \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial r} \right) + r \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} - \frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \theta^2} = 0. \quad (13)$$

式(6), (12) を式(13)に代入することにより次の支配方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_{22} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} \right) \\ - a_{11} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} \right) \\ + (2a_{12} + a_{66}) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} \right) \\ + (2a_{11} + 2a_{12} + a_{66}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Table1 (a) List of Airy's stress functions, stress and displacement components components of in-plane problem for cylindrical anisotropy (Double signs in same order)

No.	F	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$	u_r	u_θ
[1]	1	0	0	0	0	r
[2]	$rsc\theta$	0	0	0	0	r
[3]	r^2	2	2	0	$2(a_{11} + a_{12})r$	$2(a_{22} - a_{11})r\theta$
[4]	$r \ln r$ $\times sc\theta$	$\frac{1}{r}sc\theta$	$\frac{1}{r}sc\theta$	$-\frac{1}{r}c\hat{s}\theta$	$-\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + 2a_{12} + a_{66})\theta c\hat{s}\theta$ $+ \{(a_{11} + a_{12}) \ln r - \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + 2a_{12} + a_{66})\}sc\theta$	$\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + a_{12} + a_{66})\theta sc\theta$ $+ \{(a_{11} + a_{12}) \ln r - (a_{12} + a_{22})\}sc\theta$
[5]	θ	0	0	$\frac{1}{r^2}$	0	$-\frac{1}{2}a_{66}\frac{1}{r}$
[6]	$r^2\theta$	2θ	2θ	-1	$2(a_{11} + a_{12})r\theta$	$(a_{22} - a_{11})r\theta^2 - (a_{66} + 2(a_{11} + a_{12}))r \ln r$
[7]	$r\theta sc\theta$	$\frac{2}{r}c\hat{s}\theta$	0	0	$(a_{11} + a_{12})\theta sc\theta + \{(a_{11} + a_{12}) + 2a_{11} \ln r\}c\hat{s}\theta$	$(a_{11} + a_{12})\theta c\hat{s}\theta - (2a_{11} \ln r - 2a_{12}) \times sc\theta$
[8]	$r^{1\pm\alpha}$	$(1 \pm \alpha) \times r^{\pm\alpha-1}$	$(\pm\alpha) \times (1 \pm \alpha) \times r^{\pm\alpha-1}$	0	$(1 \pm \alpha) \times (\frac{a_{11}}{\pm\alpha} + a_{12})r^{\pm\alpha}$	$(1 \pm \alpha) \times \{-\frac{a_{11}}{\pm\alpha} + (\pm\alpha) \times a_{22}\}\theta r^{\pm\alpha}$
[9]	$r^{1\pm\beta} \times sc\theta$	$(\pm\beta) \times r^{\pm\beta-1} \times sc\theta$	$(\pm\beta) \times (1 \pm \beta) \times r^{\pm\beta-1} \times sc\theta$	$-(\pm\beta) \times r^{\pm\beta-1} \times c\hat{s}\theta$	$\{a_{11} + (1 \pm \beta) \times a_{12}\} \times r^{\pm\beta}sc\theta$	$\{a_{11} + a_{12} + (\pm\beta)(1 \pm \beta)\} \times r^{\pm\beta}c\hat{s}\theta$
[10]	$sc(\pm\xi\theta)$	$-\xi^2\frac{1}{r^2} \times sc(\pm\xi\theta)$	0	$\pm\xi \times c\hat{s}(\pm\xi\theta)$	$\xi^2a_{11} \times \frac{1}{r}sc(\pm\xi\theta)$	$\pm\xi(a_{11} + a_{12}) \times \frac{1}{r}c\hat{s}(\pm\xi\theta)$
[11]	$r^{1\pm\alpha} \times \theta$	$(1 \pm \alpha) \times \theta \times r^{\pm\alpha-1}$	$(\pm\alpha) \times (1 \pm \alpha) \times \theta \times r^{\pm\alpha-1}$	$-(\pm\alpha) \times r^{\pm\alpha-1}$	$(1 \pm \alpha)\{\frac{a_{11}}{(\pm\alpha)} + a_{12}\}\theta r^{\pm\alpha}$	$\frac{(1 \pm \alpha)}{(-1 \pm \alpha)}\{\frac{a_{11}}{(\pm\alpha)} + a_{22} + \frac{(\pm\alpha)}{(1 \pm \alpha)} \times a_{66}\}r^{\pm\alpha}$
[12]	$r\theta \times \ln r \times sc\theta$	$\frac{2}{r} \ln r \times c\hat{s}\theta + \frac{\theta}{r}sc\theta$	$\frac{\theta}{r}sc\theta$	$-\frac{1}{r}sc\theta - \frac{\theta}{r}c\hat{s}\theta$	$(a_{11} + a_{12})\theta \times \ln rsc\theta - (a_{11} - a_{12})\theta sc\theta + a_{11}(\ln r)^2c\hat{s}\theta - (a_{11} + a_{12})c\hat{s}\theta - \frac{1}{2}(a_{11} + a_{12}) \times \theta^2c\hat{s}\theta$	$\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})\theta^2sc\theta - (a_{11} - a_{12}) \ln r \times sc\theta + a_{11}(\ln r)^2c\hat{s}\theta + (a_{11} + a_{12})sc\theta + (a_{11} + a_{12}) \times \theta \ln rc\hat{s}\theta$

Table1 (b) List of Airy's stress functions, stress and displacement components of in-plane problem for cylindrical anisotropy (Double signs in same order)

No.	F	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$	u_r	u_θ
[13]	$r^2\theta$ $\times sc\theta$	$\theta sc\theta$ $+2c\hat{s}\theta$	$2\theta sc\theta$	$-(sc\theta$ $+c\hat{s}\theta)$ $\times\theta$	$(a_{11} + 2a_{12})r$ $\times\theta sc\theta$ $+2a_{11}rc\hat{s}\theta$	$(-a_{11} - a_{12} + 2a_{22})$ $\times r(sc\theta - \theta c\hat{s}\theta)$ $+2(-a_{11} + a_{12})rsc\theta$ $+(a_{11} - 2a_{12} - a_{66})r \ln r$
[14]	$r^{1\pm\alpha_n}$ $\times sc(n\theta)$	$(1 - n^2$ $\pm\alpha_n)$ $\times r^{\pm\alpha_n-1}$ $\times sc(n\theta)$	$(\pm\alpha_n)$ $\times (1 \pm \alpha_n)$ $\times r^{\pm\alpha_n-1}$ $\times sc(n\theta)$	$-n$ $\times (\pm\alpha_n)$ $\times r^{\pm\alpha_n-1}$ $\times c\hat{s}(n\theta)$	$\{a_{11}$ $\times (1 - n^2 \pm \alpha_n)$ $+a_{12}(1 \pm \alpha_n)$ $\times (\pm\alpha_n)\} \frac{1}{(\pm\alpha_n)}$ $\times r^{\pm\alpha_n} sc(n\theta)$	$\{a_{11} \frac{1}{(\pm\alpha_n)n}$ $\times (1 - n^2 \pm \alpha_n)$ $+na_{12} - a_{22} \frac{1}{n}$ $\times (1 \pm \alpha_n)(\pm\alpha_n)\}$ $\times r^{\pm\alpha_n} c\hat{s}(n\theta)$
[15]	$r^{1\pm\beta_n}$ $\times sc(n\theta)$	$(1 - n^2$ $\pm\beta_n)$ $\times r^{\pm\beta_n-1}$ $\times sc(n\theta)$	$(\pm\beta_n)$ $\times (1 \pm \beta_n)$ $\times r^{\pm\beta_n-1}$ $\times sc(n\theta)$	$-n$ $\times (\pm\beta_n)$ $\times r^{\pm\beta_n-1}$ $\times c\hat{s}(n\theta)$	$\{a_{11}(1 - n^2 \pm \beta_n)$ $+a_{12}(1 \pm \beta_n)$ $\times (\pm\beta_n)\} \frac{1}{\pm\beta_n}$ $\times r^{\pm\beta_n} sc(n\theta)$	$\{a_{11}(1 - n^2 \pm \beta_n)$ $\times \frac{1}{n} \frac{1}{(\pm\beta_n)} + na_{12}$ $-a_{22} \frac{1}{n}$ $\times (1 \pm \beta_n)(\pm\beta_n)\}$ $\times r^{\pm\beta_n} c\hat{s}(n\theta)$

Table2 List of Airy's stress functions, stress and displacement components of out-of-plane shear problem for cylindrical anisotropy (Double signs in same order)

No.	$\varphi(r, \theta)$	τ_{rz}	$\tau_{\theta z}$	$\frac{1}{a_{44}} u_z$
[1]	$\ln r$	0	$-\frac{1}{r}$	$-\theta$
[2]	θ	$\frac{1}{r}$	0	$\lambda^2 \ln r$
[3]	$\theta \ln r$	$\frac{1}{r} \ln r$	$-\frac{\theta}{r}$	$\frac{1}{2} \{\lambda^2 (\ln r)^2 - \theta^2\}$
[4]	$\theta^2 - (\lambda \ln r)^2$	$2 \frac{\theta}{r}$	$2 \frac{\lambda^2}{r} \ln r$	$2\lambda^2 \theta \ln r$
[5]	$r^{\pm n\lambda} sc(n\theta)$	$r^{\pm n\lambda-1} c\hat{s}(n\theta)$	$\mp n\lambda r^{\pm n\lambda-1} sc(n\theta)$	$\pm \lambda r^{\pm n\lambda} c\hat{s}(n\theta)$
[6]	$e^{\epsilon\theta} sc(\pm\epsilon\lambda \ln r)$	$\frac{\epsilon}{r} e^{\epsilon\theta} sc(\pm\epsilon\lambda \ln r)$	$\mp \epsilon\lambda e^{\epsilon\theta} \frac{1}{r} c\hat{s}(\pm\epsilon\lambda \ln r)$	$\mp e^{\epsilon\theta} c\hat{s}(\pm\epsilon\lambda \ln r)$

なお、変位成分 u_r 、 u_θ はひずみ成分との関係を通して Airy の応力関数 $F(r, \theta)$ と次式のような関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = a_{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + a_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \\ &= a_{12} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + a_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = -a_{66} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

もちろん、ここで列挙した諸式において a_{ij} を式 (9) のように設定すれば、すべて等方性体の場合の結果に帰着する。例えば、式 (14) は重調和方程式になる。

2.2 面外せん断問題の極座標系での基礎関係式

(a) 釣合条件式：

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (16)$$

(b) 幾何学関係式：

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (17)$$

(c) 構成関係式：

$$\gamma_{\theta z} = a_{44} \tau_{\theta z}, \quad \gamma_{rz} = a_{55} \tau_{rz} \quad (18)$$

ここに、 a_{44} および a_{55} は極異方性体のせん断弾性コンプライアンスであり、せん断弾性係数 $G_{\theta z}, G_{rz}$ と次式の関係がある。

$$a_{44} = \frac{1}{G_{\theta z}}, \quad a_{55} = \frac{1}{G_{rz}} \quad (19)$$

なお、等方性体の場合には次式となる。

$$a_{44} = a_{55} = \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \quad (20)$$

(d) 変位表示した基礎方程式：

式(16),(17),(18)より、変位 u_z の満足すべき基礎方程式(面外の Navier 方程式)は次のようになる。

$$a_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + a_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + a_{55} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0 \quad (21)$$

(e) 応力関数 $\varphi(r, \theta)$ の満たすべき基礎方程式：

式(16)を満たすような応力関数 $\varphi(r, \theta)$ を次式のように導入する。

$$\tau_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (22)$$

式(17)から得られるひずみ成分は次式の関係式(適合方程式)を満たさなければならない。

$$\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \gamma_{\theta z} = 0 \quad (23)$$

上式と式(18),(22)を組み合わせ代入すれば、 $\varphi(r, \theta)$ の満たすべき基礎方程式が次のような偏微分方程式として求められる。

$$a_{44} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + a_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + a_{55} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (24)$$

したがって、この面外問題に対しては式(21)および(24)との比較から、変位 u_z および応力関数 $\varphi(r, \theta)$ は、ともに同一の偏微分方程式に支配されることになる。

なお、等方性体の場合には式(20)の関係式から、式(21),(24)は周知のように調和方程式に帰着する。

3. 基礎方程式の解析解——応力成分と変位成分

3.1 面内問題の解析解

前章で示したように応力関数 $F(r, \theta)$ が求められれば、応力成分は式(12)より、また変位成分は式(15)を適切に積分することにより、それぞれ求められる。そのことを実行して一覧表として示したものが表1(a),(b)である。

この表中に用いられている文字、記号は後述の式(26),(32)で与えられる。この表は Dundurs & Mura⁽¹³⁾、平島⁽¹⁴⁾ および Karasudhi⁽¹⁵⁾ らの論文等において表形式で示されている等方性体の場合の結果を、極異方性体に拡張したものとなっている。

なお、表中および式(31)において複号となっている項および式(32)の $sc(n\theta)$ 、 $cs(n\theta)$ の項は複号同順(すなわち、複号は上から同じ順序に採用すること)とする。

この結果から極座標系で表示した場合の基本的な問題に対する解が計算できることになる。例えば、図2のうちの集中力 P が作用する場合を考えると、この問題に対する応力、変位等は表1の[2],[4],[8],[9]および[10]を適切に組み合わせた次式により求められる。

$$F(r, \theta) = -\frac{P}{\pi} \left\{ r_1 \theta_1 \sin \theta_1 - \left(\zeta \beta a^{-\beta} - \frac{1}{2} \right) \times r \ln r \cos \theta + \frac{1}{2(1-\alpha)} a^\alpha r^{1-\alpha} - \frac{1}{2} r \theta \sin \theta - \zeta r^{1-\beta} \cos \theta \right\} \quad (25)$$

ここに、 r_1 および θ_1 は図2に示した距離および角度であり、また、 α, β, ζ および G_1 は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}, \quad G_1 = \frac{1}{a_{22}}(a_{11} + 2a_{12} + a_{66}), \\ \beta &= \sqrt{(1+G_1)}, \quad \zeta = \frac{a^2}{16} \left\{ 6 + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

同様に、図2のうちの集中力 Q が作用する場合を考えると、この問題に対する応力、変位等は表1の[2],[4],[5],[8]および[10]を適切に組み合わせた次式によって閉じた型の厳密解がえられる。

Fig.2 Infinite plate with circular hole under concentrated forces P and Q at the boundary

$$F(r, \theta) = \frac{Q}{\pi} \left\{ r_1 \theta_1 \cos \theta_1 - \frac{1}{2} r \theta \cos \theta + \zeta r^{1-\beta} \sin \theta + \left(\zeta \beta a^{-\beta} - \frac{1}{2} \right) r \ln r \sin \theta + \frac{a}{2} \theta \right\} \quad (27)$$

これらの問題は孔縁に作用する集中力を通常の Fourier 級数展開によって同表中の[14],[15]の無限級数で求めることももちろん可能である。なお、式(25),(27)の基本解はこの論文で初めて求められたものであるが、これを特殊化して等方性の弾性定数に縮退させれば、従来までの Timoshenko & Goodier の著書⁽¹⁶⁾で示された解に帰着する。

ところで、同表中の[10]に示すような非周期性の解が存在することも注目すべきものであるが、これについては Karasudhi の著書⁽¹⁵⁾では与えられてない。

3.2 面外せん断問題の場合 この場合は既述したように、変位 u_z および応力関数 $\varphi(r, \theta)$ は同一の調和型の基礎方程式を満たせばよいことから、ある程度簡単に解析解が求められて、その最終結果は表2のようにまとめられる、この場合も、複号同順で項を採用するものとしている。

ここに、表中の ε は任意の実数であり、 λ は次式のように定義した量である。

$$\lambda = \sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}} \quad (28)$$

なお、この表は平島⁽¹⁴⁾によって求められている等方性体の場合の結果を極異方性体に拡張したものとなっている。

Fig.3 Circular ring under loadings of Fourier trigonometric series at their boundaries

4. 円リングの両境界に外力が与えられる面内問題の一般解

2章で示したように極座標系における応力関数 F が求められたので、ここで対象とするような円リングの両境界で外力が与えられる問題の解析が実行できる。すなわち、半径 $r = a, b$ の内外境界上に作用する外力が次式のように Fourier 級数で与えられる問題を考える。

(a) 境界条件：

図3における $r = b$ (外部半径) の位置に対し、次式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{r=b} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \\ \tau_{r\theta}|_{r=b} &= \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos n\theta + b'_n \sin n\theta). \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

および $r = a$ (内部半径) の位置に対し、次式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{r=a} &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta), \\ \tau_{r\theta}|_{r=a} &= \frac{c'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c'_n \cos n\theta + d'_n \sin n\theta). \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

でそれぞれ与えられる場合を考える。このときの応力関数 $F(r, \theta)$ は最終的に次式のように求められる。

(b) 応力関数：

$$\left. \begin{aligned} F(r, \theta) &= C_0 r^{1+\alpha} + D_0 r^{1-\alpha} + \hat{B}_1 r \theta \operatorname{sc} \theta \\ &+ \{ \hat{B}_0 r^2 + \hat{C}_0 r^{1+\alpha} + \hat{D}_0 r^{1-\alpha} \} \theta \\ &+ E_1 \left\{ \frac{\hat{A}_1}{E_1} \theta + \sin(\pm \xi \theta) \right\} \\ &+ E_2 \left\{ \frac{\hat{A}_2}{E_2} \theta + \cos(\pm \xi \theta) \right\} \\ &+ \{ A_1 r + B_1 r \ln r + C_1 r^{1+\beta} + D_1 r^{1-\beta} \} \operatorname{sc} \theta \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \{ A_n r^{1+\alpha_n} + B_n r^{1-\alpha_n} + C_n r^{1+\beta_n} \\ &\quad + D_n r^{1-\beta_n} \} \operatorname{sc}(n\theta). \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sc}(n\theta) &= \begin{bmatrix} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{bmatrix}, \quad \operatorname{cs}(n\theta) = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) \\ -\sin(n\theta) \end{bmatrix}, \\ \xi &= \sqrt{\left(2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{66}}{a_{11}} \right)}, \quad H_n = \frac{a_{11}}{a_{22}} (n^2 - 1)^2, \\ G_n &= \frac{1}{a_{22}} \{ a_{11} + n^2 (2a_{12} + a_{66}) \}. \end{aligned} \right\} (32)$$

なお、式(31)の係数 $\alpha_n, \beta_n (n \geq 2)$ は上式の G_n および H_n から次式によって求められるものである。

$$\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 1 + G_n, \quad \alpha_n^2 \beta_n^2 = H_n \dots (33)$$

この式より、 $H_n (> 0)$ と G_n の大小関係によって α_n, β_n は幾つかの場合分けされた値をとることになるが、その詳細は省略する⁽⁵⁾。

その他の各係数は次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= -\frac{1}{2(1+\alpha)(b^{2\alpha} - a^{2\alpha})} \\ &\quad \times (c_0 a^{\alpha+1} - a_0 b^{\alpha+1}), \\ D_0 &= \frac{1}{2(1-\alpha)(b^{2\alpha} - a^{2\alpha})} \\ &\quad \times (c_0 a^{\alpha+1} b^{2\alpha} - a_0 b^{\alpha+1} a^{2\alpha}). \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{2\pi}{(b^2 - a^2)} (c'_0 a^2 - a'_0 b^2) \frac{\sin(\pm \xi \theta)}{\xi^2 \sin(\pm \xi)}, \\ \hat{A}_1 &= \frac{1}{b^2 - a^2} \left\{ a'_0 b^2 \left(\frac{2\pi \cos(\pm \xi \theta)}{\pm \xi \sin(\pm \xi)} - 2a^2 \right), \right. \\ &\quad \left. - c'_0 a^2 \left(\frac{4\pi \cos(\pm \xi \theta)}{\pm \xi \sin(\pm \xi)} - b^2 \right) \right\}, \\ E_2 &= \frac{2\pi}{(b^2 - a^2)} (c'_0 a^2 - a'_0 b^2) \frac{\sin(\pm \xi \theta)}{\xi^2 (\cos(\pm \xi) - 1)}, \\ \hat{A}_2 &= \frac{1}{b^2 - a^2} \left\{ a'_0 b^2 \left(\frac{2\pi \cos(\pm \xi \theta)}{\pm \xi (\cos(\pm \xi) - 1)} - 2a^2 \right), \right. \\ &\quad \left. - c'_0 a^2 \left(\frac{4\pi \cos(\pm \xi \theta)}{\pm \xi (\cos(\pm \xi) - 1)} - b^2 \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}_0 &= \frac{1}{2(b^2 - a^2)} (c'_0 a^2 - a'_0 b^2), \\ \hat{C}_0 &= -\frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)} \cdot \frac{(ab^{-\alpha} - ba^{-\alpha})}{(ab^{\alpha} - ba^{\alpha})} \hat{D}_0. \end{aligned} \right\} \dots (36)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2(b^{\beta} - a^{\beta})} \\ &\quad \times \{ (d'_1 - c'_1) ab^{\beta} - (b'_1 - a'_1) ba^{\beta} \}, \\ C_1 &= -\frac{1}{2\beta(b^{\beta} - a^{\beta})} \\ &\quad \times \{ (d'_1 - c'_1) a - (b'_1 - a'_1) b \}, \\ D_1 &= \frac{1}{2\beta} (d'_1 + c'_1) a^{\beta+1}, \quad \hat{B}_1 = -\frac{a}{4} (d_1 - c_1). \end{aligned} \right\} \dots (37)$$

さらに、式(31)中の A_n, B_n, C_n および $D_n, (n \geq 2)$ は次の連立方程式を解いて得られるものである。

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (k_1 - n^2)b^{-k_2} & (k_2 - n^2)b^{-k_1} & (l_1 - n^2)b^{-l_2} \\ (k_2 - 1)b^{-k_2} & (k_1 - 1)b^{-k_1} & (l_2 - 1)b^{-l_2} \\ (k_1 - n^2)a^{-k_2} & (k_2 - n^2)a^{-k_1} & (l_1 - n^2)a^{-l_2} \\ (k_2 - 1)a^{-k_2} & (k_1 - 1)a^{-k_1} & (l_2 - 1)a^{-l_2} \end{array} \right\} \quad (38)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (l_2 - n^2)b^{-l_1} \\ (l_1 - 1)b^{-l_1} \\ (l_2 - n^2)a^{-l_1} \\ (l_1 - 1)a^{-l_1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} a_n \\ a'_n \\ c_n \\ c'_n \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = 1 + \alpha_n, \quad k_2 = 1 - \alpha_n, \\ l_1 = 1 + \beta_n, \quad l_2 = 1 - \beta_n. \end{array} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

式(38)の A_n, B_n, C_n および D_n は式(33)の $sc(n\theta)$ の内の上側の $\sin(n\theta)$ に対応する場合の結果であるのに対し、下側の $\cos(n\theta)$ に対応する場合には式(38)の右辺の列ベクトルを $\{b_n, -b'_n, d_n, -d'_n\}^T$ と設定して得られるものである。

さらに、式(35)の内の $\hat{C}_0$ と $\hat{D}_0$ は $\hat{D}_0$ を任意定数とすると、 $\hat{C}_0$ はそれに従属する関係にあることを示すものである。

以上によって応力関数の関数形とその係数が具体的に得られたので、この結果と表1を組み合わせれば応力、変位は容易に求められることになる。

なお、ここでの結果は、例えば森口の著書⁽¹⁷⁾で与えられている結果を極異方性体に拡張したものとなっている。また、式(29),(30)で a_0, c_0 の項のみを採用した結果はHoganらの論文⁽⁹⁾に、さらに円形リングの外側に媒体を設定し、 c_0 の項を採用して解析すればNowinskiの論文⁽⁸⁾に一致する。

5. 結 言

等方性体に対する古典弾性論の基本的な問題の場合と同様に、極異方性体に対する極座標表示の面内問題および面外せん断問題における、閉じた型の基本解とそれらに対応する応力、変位成分を具体的に求め、それらを表形式で整理した。それらの解を利用して、無限板内の円孔周縁に集中力が作用する問題に対する閉じた型の解析解を提示した。

ここでの成果は従来までにまだ求められない、幾つかの新しい解析解の提示もなされており、それらを利用した今後の応用や具体例への適用が種々期待できるものである。

さらに、円形リングの内外境界に最も一般的なFourier展開した外荷重分布が与えられた場合に対して、Airyの応力関数の係数を具体的に求めた結果を示した。

参 考 文 献

- (1) Lekhnitskii, SG, Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, (1981), Mir Publishers, Moscow.
- (2) Pagano, NJ, The stress field in a cylindrically anisotropic body under two-dimensional surface tractions, J. Appl. Mech., 39(1972), 791~796.
- (3) Pagano, NJ and Tandon, GP, Elastic response of multi-directional coated-fiber composites, Composites Sci. Tech., 31(1988), 562~568

- (4) Mikata, Y and Taya, M, Stress field in a coated continuous fiber composites subjected to thermo-mechanical loadings, J. Comp. Mat., 19(1985), 554~578.
- (5) Hoff, NJ, Stress concentration in cylindrically orthotropic composite plates with a circular hole, J. Appl. Mech., 48(1981), 563~569.
- (6) Das, YC and Hazan, GA, Cylindrically orthotropic medium with lined hole, J. Eng. Mech., Proc. ASCE, 112(1986), 904~915.
- (7) Liu, KY and Bert, CW, Stress analysis of thick walled reinforced tunnel, J. Eng. Mech., Proc. ASCE, Vol.112(1986), 916~931.
- (8) Nowinski, J, States of stress in an orthotropic thick-walled tube surrounded by an elastic medium, Arch. Mech. Stos., 9(1957), 221~226.
- (9) Hogan, CO and Baxter, SC, Effects of curvilinear anisotropy on radially symmetric stresses in anisotropic linear elastic solids, J. Elasticity, 42(1996), 31~48.
- (10) Bhaskar, K and Varadan, TK, Exact elasticity solution for laminated anisotropic cylindrical shells, J. Appl. Mech., 60(1993), 41~47.
- (11) Jolicœur, C and Cardou, A, Analytical solution for bending of coaxial orthotropic cylinders, J. Eng. Mech., Proc. ASCE, 120(1994), 2556~2574.
- (12) Karam, GN and Gibson, LJ, Elastic buckling of cylindrical shells with elastic corer, Int. J. Solids Structures, 32(1995), 1259~1306.
- (13) Dundurs, J and Mura, T, Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion, J. Mech. Phys. Solids, 12(1964), 177~189.
- (14) 平島 健一, 線形弾性論の二次元面内および面外問題の極座標系における基本解, 山梨大学工学部研究報告, 32(1981), 119~125.
- (15) Karasudhi, P, Foundations of Solid Mechanics, (1991), Kluwer Academic Pub., 147~153.
- (16) Timoshenko, SP and Goodier, JN, Theory of Elasticity, 3rd ed.(1970), Mc Graw-Hill.
- (17) 森口 繁一, 2次元弾性論, (1957), 岩波書店.