部分的に内圧を受ける厚肉円筒に関する
実験的要素を加味した弾塑性解析*望 月 孝 道^{*1}Elastic-Plastic Analysis with Experimental Results for Thick Cylinder
Partially Subjected to Internal Pressure in Longitudinal Direction

Takamichi MOCHIZUKI

Deformation and stress of a thick cylinder are analyzed by use of only a two-dimensional theory, not a three-dimensional one. Most thick cylinders actually used, for example, tubes in heat exchangers, are partially subjected to internal pressure in the longitudinal direction in the manufacturing stage, but no practical and applicable methods in which elastic-plastic deformation and yield strength of a thick cylinder are dealt with easily in three dimensions have been developed from the viewpoint of field application. In this work an applicable method based on thin cylinder theory and experimental results is proposed. This method yields results which are consistent with the behavior of thick cylinders, and enables one-step elastic-plastic analysis of double thick cylinders, for example, expanding tubes in heat exchangers.

Key Words: Plasticity, Elasticity, Numerical Analysis, Thin Cylinder, Thick Cylinder, Two-Dimensional Theory, Three Dimensional Theory, Partial Pressure Loading, Tube Expansion, Heat Exchangers

1. 結 言

熱交換器等においては、熱交換を担う管とそれを支持する管板とを固着させ、かつその固着部分での漏洩を防止する必要がある。そのための主要な方法の一つとして、エキスパンダ加工(拡張加工)による方法が用いられており、この場合には、管が管板と接する部分の一部を塑性変形させて管を管板に固着させている。

この固着法に関する従来の理論解析においては、管と管板とを二重円筒として、且つ、管の長さ・管板の厚さは同一であってその管の長さ・管板の厚さに等しい長さにわたって内圧をかけ塑性変形させるものとして、扱ってきている。

しかし、管板の厚さに等しい範囲に内圧をかけることは不可能であってかつ実情に反しており、これを最大の理由として従来の理論解析は定性的な考察に一部利用されるだけであって全く実用に供されていない。

理論解析を有用なものとするためには、円筒を三次元として扱い得る理論、それも管も管板も厚肉円筒で

あるから厚肉円筒としての三次元理論が不可欠であるが、簡易かつ実用的に扱い得る理論は見あたらない。

そこで、本研究は、エキスパンダ加工のメカニズムの解明に先立ち、その解明の前提となる厚肉円筒の弾性変形・塑性変形および降伏圧力について実用的手法を見い出すために行い、有用な手法を得た。

2. 理 論

2-1 部分的に内圧を受ける薄肉円筒の弾性理論

図1に示すような部分的に内圧を受ける、即ち三次元理論としての薄肉円筒の弾性変形について検討する。

Fig. 1 Thin cylinder loaded partially

* 原稿受付 1997年2月19日。

*¹ 正員, (有)神戸テクボ (☎ 658-0003 神戸市東灘区本山北町5-2-2)。

一般解を得るために図1中の内圧を受ける部分 l_2 を取りだし、図2に示すような、肉厚中心半径 a 、肉厚 t 、

長さ l で、素材の縦弾性係数 E 、ポアソン比 ν の円筒が、内圧 p 、せん断力 Q 、 Q' 、軸力 N 、曲げモーメント M 、 M' を受け、径方向に w の変位を生じる場合を考える。この場合、次式が得られる⁽¹⁾。

Fig. 2 Coordinate systems of a cylinder

$$w = e^{\beta x} (C_{11} \cos \beta x + C_{12} \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_{13} \cos \beta x + C_{14} \sin \beta x) - \frac{p - \frac{\nu N}{a}}{4\beta^4 D} \quad \dots (1)$$

$$\beta^4 = \frac{Et}{4Da^2} = \frac{3(1-\nu^2)}{a^2 t^2} \quad \dots (2)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots (3)$$

受圧部分 l_2 についての算式は、 $l_2 \leftarrow l$ 、 $N = 0$ 、 $M_1 \leftarrow M$ 、 $Q_1 \leftarrow Q$ 、 $M_2 \leftarrow M'$ 、 $Q_2 \leftarrow Q'$ とおくと次式が得られる。

$$w_2 = e^{\beta x} (C_{21} \cos \beta x + C_{22} \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_{23} \cos \beta x + C_{24} \sin \beta x) - \frac{p}{4\beta^4 D} \quad \dots (4)$$

$$G_2 = -6 + 4 \cos^2 \varphi_2 + e^{2\varphi_2} + e^{-2\varphi_2} \quad \dots (5)$$

$$\varphi_2 = \beta l_2 \quad \dots (6)$$

$$C_{21} = \frac{M_1}{2\beta^2 D G_2} \left(\frac{-1 + 2 \cos^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{-e^{-2\varphi_2}} \right) - \frac{Q_1}{2\beta^3 D G_2} (1 - 2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 - e^{-2\varphi_2}) + \frac{M_2}{2\beta^2 D G_2} \left[\frac{e^{\varphi_2} (\sin \varphi_2 - \cos \varphi_2)}{+e^{-\varphi_2} (-3 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2)} \right] + \frac{Q_2}{2\beta^3 D G_2} \left[\frac{e^{\varphi_2} \cos \varphi_2 - e^{-\varphi_2} (2 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2)}{+e^{-\varphi_2} (-3 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2)} \right] \quad \dots (7)$$

$$C_{22} = \frac{M_1}{2\beta^2 D G_2} \left(\frac{3 - 2 \cos^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{-e^{-2\varphi_2}} \right) - \frac{Q_1}{2\beta^3 D G_2} (-2 \sin^2 \varphi_2) + \frac{M_2}{2\beta^2 D G_2} \left[\frac{e^{\varphi_2} (-\sin \varphi_2 - \cos \varphi_2)}{+e^{-\varphi_2} (-\sin \varphi_2 + \cos \varphi_2)} \right] + \frac{Q_2}{2\beta^3 D G_2} (e^{\varphi_2} \sin \varphi_2 - e^{-\varphi_2} \sin \varphi_2) \quad \dots (8)$$

$$C_{23} = \frac{M_1}{2\beta^2 D G_2} \left(\frac{-1 + 2 \cos^2 \varphi_2 - 2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{-e^{2\varphi_2}} \right) - \frac{Q_1}{2\beta^3 D G_2} (-1 - 2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + e^{2\varphi_2}) + \frac{M_2}{2\beta^2 D G_2} \left[\frac{e^{\varphi_2} (3 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2)}{+e^{-\varphi_2} (-\sin \varphi_2 - \cos \varphi_2)} \right] + \frac{Q_2}{2\beta^3 D G_2} \left[\frac{e^{\varphi_2} (-2 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2) - e^{-\varphi_2} \cos \varphi_2}{+e^{-\varphi_2} (-\sin \varphi_2 - \cos \varphi_2)} \right] \quad \dots (9)$$

$$C_{24} = \frac{M_1}{2\beta^2 D G_2} \left(\frac{-3 + 2 \cos^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{+e^{2\varphi_2}} \right) - \frac{Q_1}{2\beta^3 D G_2} (-2 \sin^2 \varphi_2) + \frac{M_2}{2\beta^2 D G_2} \left[\frac{e^{\varphi_2} (-\sin \varphi_2 - \cos \varphi_2)}{+e^{-\varphi_2} (-\sin \varphi_2 + \cos \varphi_2)} \right] + \frac{Q_2}{2\beta^3 D G_2} (e^{\varphi_2} \sin \varphi_2 - e^{-\varphi_2} \sin \varphi_2) \quad \dots (10)$$

非受圧部分 l_1 および l_3 においても同様に求められる。

当該円筒における連続の条件により、 Q_1 、 Q_2 、 M_1 、 M_2 は下記の連立方程式の解として与えられる。

$$M_1 \left[-\frac{1}{G_1} (2 - 4 \cos^2 \varphi_1 + e^{2\varphi_1} + e^{-2\varphi_1}) + \frac{1}{G_2} (2 - 4 \cos^2 \varphi_2 + e^{2\varphi_2} + e^{-2\varphi_2}) \right] + Q_1 \left[\frac{1}{\beta G_1} (-4 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + e^{2\varphi_1} - e^{-2\varphi_1}) + \frac{1}{\beta G_2} (-4 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + e^{2\varphi_2} - e^{-2\varphi_2}) \right] + M_2 \left[-\frac{1}{G_2} 4 \sin \varphi_2 (-e^{\varphi_2} + e^{-\varphi_2}) \right] + Q_2 \left\{ \frac{1}{\beta G_2} 2 [e^{\varphi_2} (\sin \varphi_2 - \cos \varphi_2) + e^{-\varphi_1} (\sin \varphi_2 + \cos \varphi_2)] \right\} = -\frac{p}{2\beta^2} \quad \dots (11)$$

$$M_1 \left[-\frac{2}{G_1} (4 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + e^{2\varphi_1} - e^{-2\varphi_1}) - \frac{2}{G_2} (4 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + e^{2\varphi_2} - e^{-2\varphi_2}) \right] + Q_1 \left[\frac{1}{\beta G_1} (2 - 4 \cos^2 \varphi_1 + e^{2\varphi_1} + e^{-2\varphi_1}) - \frac{1}{\beta G_2} (2 - 4 \cos^2 \varphi_2 + e^{2\varphi_2} + e^{-2\varphi_2}) \right] + M_2 \left\{ \frac{1}{G_2} 4 [e^{\varphi_2} (\sin \varphi_2 + \cos \varphi_2) + e^{-\varphi_2} (\sin \varphi_2 - \cos \varphi_2)] \right\} + Q_2 \left[\frac{1}{\beta G_2} 4 \sin \varphi_2 (-e^{\varphi_2} + e^{-\varphi_2}) \right] = 0 \quad \dots (12)$$

$$M_1 \left[-\frac{1}{G_2} 4 \sin \varphi_2 (-e^{\varphi_2} + e^{-\varphi_2}) \right] + Q_1 \left\{ \frac{1}{\beta G_2} 2 [e^{\varphi_2} (\sin \varphi_2 - \cos \varphi_2) + e^{-\varphi_1} (\sin \varphi_2 + \cos \varphi_2)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& +M_2 \left[-\frac{1}{G_2} \left(2 - 4 \cos^2 \varphi_2 + e^{2\varphi_2} + e^{-2\varphi_2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{G_3} \left(2 - 4 \cos^2 \varphi_3 + e^{2\varphi_3} + e^{-2\varphi_3} \right) \right] \\
& +Q_2 \left[\frac{1}{\beta G_2} \left(-4 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + e^{2\varphi_2} - e^{-2\varphi_2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\beta G_3} \left(-4 \sin \varphi_3 \cos \varphi_3 + e^{2\varphi_3} - e^{-2\varphi_3} \right) \right] \\
& = -\frac{p}{2\beta^2} \quad \dots\dots(13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_1 \left\{ \frac{1}{G_2} 4 \left[e^{\varphi_2} (\sin \varphi_2 + \cos \varphi_2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e^{-\varphi_2} (\sin \varphi_2 - \cos \varphi_2) \right] \right\} \\
& +Q_1 \left[-\frac{1}{\beta G_2} 4 \sin \varphi_2 (-e^{\varphi_2} + e^{-\varphi_2}) \right] \\
& +M_2 \left[-\frac{2}{G_3} \left(4 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + e^{2\varphi_2} - e^{-2\varphi_2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{G_3} \left(4 \sin \varphi_3 \cos \varphi_3 + e^{2\varphi_3} - e^{-2\varphi_3} \right) \right] \\
& +Q_2 \left[\frac{1}{\beta G_2} \left(2 - 4 \cos^2 \varphi_2 + e^{2\varphi_2} + e^{-2\varphi_2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\beta G_3} \left(2 - 4 \cos^2 \varphi_3 + e^{2\varphi_3} + e^{-2\varphi_3} \right) \right] = 0 \quad \dots\dots(14)
\end{aligned}$$

2.2 部分的に内圧を受ける薄肉円筒についての弾性理論の厚肉円筒への適用 上記理論によって、薄肉円筒が部分的に内圧を受ける場合には三次元としての弾性変形・応力等がもとめられるが、厚肉円筒についてはこのような三次元理論が存在しない。

しかし、変形・応力状態は内圧を受ける部分の広狭によって大きく変動することが知られており、事実、後述する実験結果もそれを示している。また円筒内面全面に内圧を受ける場合（二次元理論の場合）の薄肉円筒理論と厚肉円筒理論においても、肉厚が厚くなるにつれて理論解の乖離は甚だしくなる。

したがって、これらの相違を吸収し得るなんらかの方法が求められる。これについては実験結果を踏まえて検討するので、4.2において考察する。

2.3 部分的に内圧を受ける厚肉円筒の塑性変形

完全弾塑性的な挙動を示す材料は、全面に内圧を受ける場合、即ち二次元理論の場合、内半径 b 、外半径 R の厚肉円筒が全域にわたり塑性状態となる場合の内圧力 p_y は、次式で与えられる⁽³⁾。

$$\begin{aligned}
p_y &= mY \ln \frac{R}{b} \quad \dots\dots\dots(15) \\
m &= \text{Tresca の降伏条件 } (\sigma_\theta - \sigma_r = mY) \\
&\quad \text{における係数 (1.00~1.155)} \\
Y &= \text{引張又は圧縮降伏応力}
\end{aligned}$$

この式によれば、同質材料の円筒については、外径／内径＝一定であれば、円筒を塑性状態にさせる内圧（以下「降伏圧力」という。） p_y は同一であることを意味し、部分的に内圧を受ける場合を考慮することができない。

しかし、種々の実験・経験から、

- 内圧を受ける部分と内圧を受けない部分との関係（以下「受圧状態」という。）によって降伏圧力は大きく変化することが判明している。
- また、外径／内径が一定であっても、内径が異なれば降伏圧力は変化することが知られている。
- さらには、降伏圧力は内径の絶対値そのものにも影響を受けることもわかってきた。

そこで、これらについては、3.3に示す多数の実験値を基に、実用性ある便法を考察することとした。

詳細については、2.2と同様、4.3において論ずる。

3. 実験

3.1 部分的に内圧を受ける薄肉円筒の弾性変形に関する実験 円筒の供試片には、内面から高圧を与え、与えた圧力は高圧センサにより検出し、また、供試片に生じる円周方向のひずみはひずみゲージ（図3～図5）により検出し、共に動ひずみ計により校正・増幅し、データレコーダに収録した。供試片は、SB 410（ボイラ及び圧力容器用炭素鋼 JIS G3103）から削りだしたものである。

Table 1 Test pieces for elastic deformation unit: mm

Test piece name			In.dia.	Out.dia.	Length
Type	Out/In.dia.	ID.NO.			
TC-1	1.2	5	14.58	17.23	36.4
	1.6	2	14.67	22.77	36.4
TC-2	1.4	4	19.27	26.89	36.4
	1.6	5	19.10	30.66	36.4
	1.8	1	19.17	34.45	36.4
TC-3	1.2	4	25.70	30.57	36.4
	1.6	3	25.89	40.86	36.4

弾性変形試験用として試験に供した全試験片は、表1の通りであるが、特に薄肉円筒用として意図して試験に使用した試験片は、外径／内径が1.2のものである。表中の供試片名称のうち、呼称のTC-1は内径14.6 mm程度、TC-2は19.2 mm程度、TC-3は25.7 mm程度の供試片を表わす。供試片にはリングで一定の幅（以下「受圧幅」という。）に区切って内圧を付加したが、試験には受圧幅として31、21および11 mmを採用した。また受圧中心を偏心させた試験も行ったが、その偏心量は、受圧幅31 mmについては1 mm、受圧幅21及び11 mmの場合は2及び5 mmとした。

ひずみゲージは供試片の中央から5 mm間隔に7枚貼りつけた。

データレコーダに収録したデータは、解析図として整理したが、その一例を図3にあげる。図中、TC-3-1.2-4

の1.2は外径／内径を、4は供試片識別番号を示し、線図の中程にある凹凸は高圧付加機が低圧発生時に発生するノイズによるものである。

Fig. 3 Load-strain diagram of TC-3-1.2-4 (width 31)

3.2 部分的に内圧を受ける薄肉円筒についての弾性理論の厚肉円筒への適用に関する実験 厚肉円筒用として意図した供試片は、外径／内径が1.8のものである。薄肉円筒から厚肉円筒への遷移状態を調べるため、外径／内径が1.4および1.6のものも実験した。厚肉円筒の解析データとして、TC-2-1.8-1-11-5 (受圧幅11 mm, 偏心5 mm) の一例を図4に示す。

Fig. 4 Load-strain diagram of TC-2-1.8-1 (width 11)

このデータは、外径／内径が1.8と供試片中で最大で、受圧幅が11 mm ともっとも狭く、そのうえ偏心量が5 mm と大きいため、実験と理論がもっとも乖離し易いと解される例として挙げたものである。測定点7は、ひずみが負、即ち径が縮小することを示している。これは、数値計算(例、表3)でも算出され、また、拡張の実作業においても経験することでもある。

3.3 部分的に内圧を受ける円筒の塑性変形に関する実験 使用した試験片は表2の通りである。

Table 2 Test pieces for plastic deformation unit: mm

Test piece name			Width	In.dia.	Out.dia.	Length
Type	Out/In.dia.	ID.NO.				
TC-1	1.2	2	31	14.48	17.24	36.4
		3	21	14.52	17.23	36.4
		1	11	14.52	17.24	36.4
	1.4	3	31	14.60	20.13	36.4
		2	21	14.62	20.11	36.4
		1	11	14.67	20.16	36.4
	1.6	3	31	14.49	22.91	36.4
		1	21	14.64	22.85	36.4
		4	11	14.51	22.88	36.4
	1.8	1	31	14.60	24.80	36.4
		3	21	14.63	24.81	36.4
		2	11	14.62	24.82	36.4
TC-2	1.2	1	31	19.21	22.76	36.4
		2	21	19.16	22.91	36.4
		3	11	19.13	22.83	36.4
	1.4	6	31	19.23	26.91	36.4
		7	21	19.17	26.81	36.4
		8	11	19.10	26.81	36.4
	1.6	1	31	19.14	30.82	36.4
		2	21	19.09	30.71	36.4
		4	11	19.15	30.42	36.4
	1.8	3	31	19.24	34.54	36.4
		2	21	19.20	34.55	36.4
		4	11	19.20	34.33	36.4
TC-3	1.2	1	31	25.61	30.52	36.4
		2	21	25.71	30.37	36.4
		3	11	25.57	30.53	36.4
	1.4	3	31	25.56	35.45	36.4
		2	21	25.60	35.84	36.4
		1	11	25.69	35.71	36.4
	1.6	1	31	25.48	40.85	36.4
		4	21	25.62	41.04	36.4
		2	11	25.47	40.90	36.4
	1.8	1	31	25.78	45.95	36.4
		4	21	25.78	46.06	36.4
		3	11	25.64	46.05	36.4

Fig. 5 Load-strain diagram of TC-2-1.8-4 (width 11)

ひずみゲージは供試片の中央部の1枚だけとした。解析例として、3.2と同様、実験と理論がもっとも乖離し易いものの例を図5に示す。また、実際に生じた塑性変形を、円筒外側に沿って表面あらさ計で測定した一例を図6に示す。このデータも、最も差違が生じやすい外径／内径が1.8と供試片中で最大なものを取りあげた。

Fig. 6 Deformation diagram of TC-2-1.8

最上部は、受圧幅が 31 mm の場合、中段部は、受圧幅が 21 mm の場合、最下部は、受圧幅が 11 mm の場合であり、最上部のものは受圧幅が広いために、全体になだらかな曲線を描いて塑性変形しているが、最下部のものは受圧幅が狭いために、中央部がスチープな曲線を描いて塑性変形している。なお、最下部のものは図 5 にあげた供試片のものでもある。

4. 理論計算と実験値との比較

4.1 部分的に内圧を受ける薄肉円筒の弾性変形

Fig. 7 Strain diagram of a) TC-3-1.2-4-31-0 at 9.8 MPa

Fig. 8 Strain diagram of b) TC-3-1.2-4-21-0 at 9.8 MPa

実験上内径が大きいもののほど誤差が生じる程度が少なく理論の検証に適切であることから、ここでは供試片中で内径が最大である供試片 TC-3 を取りあげ、かつ、外径／内径が 1.2 と最小である供試片 TC-3-1.2 を例として挙げ考察する。

受圧幅 31 mm の場合について数値計算と実験値とをグラフにしたものを図 7 にあげる。グラフは横幅全長が供試片の長さに相当し、グラフ中の 2 本の縦線の間が受圧部分 (PressPart(x)) を示す。また、グラフ中、全面に内圧を受ける薄肉円筒としての「ひずみ」は、「ThinCylinder」として破線の水平な直線で、全面に内圧を受ける厚肉円筒としての「ひずみ」は、「ThickCylinder」として実線の水平な直線で示してある。ここで取り上げた例は、外径／内径が 1.2 と比較的に小さいため両直線間の差が小さく、薄肉円筒として扱っても大きな差は生じないことがわかる。

ひずみ曲線には、4.2 において提案する厚肉円筒に対する修正方法を適用してある。図中、菱形は実験値を示し、これは、既に図 3 に示した値である。

この a) TC-3-1.2-4-31-0 に加え、さらに、この供試片について受圧幅を変えたり、受圧中心を偏心させた場合について、b) TC-3-1.2-4-21-0, c) TC-3-1.2-4-11-0, d)

Fig. 9 Strain diagram of c) TC-3-1.2-4-11-0 at 9.8 MPa

Fig. 10 Strain diagram of d) TC-3-1.2-4-11-5 at 9.8 MPa

TC-3-1.2-4-11-5 として、図 8、図 9、図 10 に示す。a) b) c) は、受圧幅が狭くなる時の影響をみるために、特に、d) は、受圧部分が 11 mm と小さく、かつ、受圧中心が 5 mm ずれていて、理論と最も乖離するおそれのあるものとして、取りあげた。

これら 4 図から明らかなように、受圧幅の大小、偏心の如何を問わず、理論と実験値とは、極めて良く一致している。このことは、2.1 で述べた「部分的に内圧を受ける薄肉円筒の弾性理論」、即ち三次元理論が、適確に現象を捉えており、充分に実用に供し得ることを示している。

なお受圧幅の取り扱いには本来 Oリングの幅の影響を考慮すべきでありグラフもそのような傾向を示しているが、今回は本数値解析方法の適用性の可否を論ずることを主としており、問題視される場合には別個に考察すれば足りると解されることから、今回の数値解析には便宜的に Oリング溝間の最大寸法を受圧幅とした。

また、実験結果も理論計算も共に、受圧幅が相対的に小さくなる (b) TC-3-1.2-4-21-0, c) TC-3-1.2-4-11-0, d) TC-3-1.2-4-11-5) と、既述のとおり、円筒の両端部においては管径が初期より小さくなることを示している。

4.2 部分的に内圧を受ける薄肉円筒についての弾性理論の厚肉円筒への適用 実験は 3.2 に示すようにに多種多数について行ったが、厚肉円筒の実験例としては、供試片中で外径/内径が最大の 1.8 である TC-2-1.8 の場合を取り上げて考察する。また、薄肉円筒と厚肉円筒との遷移状況を見るために、TC-1 および TC-3 の外径/内径が 1.6 の場合も取り上げる。

理論計算と実験値をグラフにしたものの例として、e) TC-1-1.6-2-31-0, f) TC-2-1.8-1-31-0, g) TC-2-1.8-1-11-5, h) TC-3-1.6-3-31-0 の場合を、図 11、図 12、図 13、図 14 に示す。

f) g) は、肉厚が厚い円筒の例として、e) h) は、薄肉円筒と厚肉円筒との遷移状況を見るために肉厚が比較的

Fig. 11 Strain diagram of e) TC-1-1.6-2-31-0 at 49 MPa

Fig. 12 Strain diagram of f) TC-2-1.8-1-31-0 at 49 MPa

Fig. 13 Strain diagram of g) TC-2-1.8-1-11-5 at 49 MPa

Fig. 14 Strain diagram of h) TC-3-1.6-3-31-0 at 49 MPa

に厚い例として、挙げたものである。また、e) f) h) は、受圧部分が広い円筒の例として、g) TC-2-1.8-1-11-5 は、理論と最も乖離するおそれのあるものとして、とりあげたものであり、図 13 中に菱形で示す実験値は、図 4 に示した値である。これらの例は厚肉円筒に関するものであるから、諸図において「ThinCylinder」としての破線の水平な直線と「ThickCylinder」としての実線の水平な直線との差が大きくなり、特に供試片 TC-2-1.8 においては、その比が 1.52 にもなる。薄肉円筒と厚肉

円筒との間のこのような差違を吸収するため、即ち部分的に内圧を受ける薄肉円筒の弾性理論を厚肉円筒へ適用するため、式(16)に示すように薄肉円筒の理論値に、厚肉円筒理論と薄肉円筒理論による変位の比を乗じて厚肉円筒のひずみ曲線とした。

$$\begin{aligned}
 & \text{部分的に内圧を受ける場合の厚肉円筒の外径部の変位} \\
 &= \frac{\text{部分的に内圧を受ける薄肉円筒の板厚中心の変位}}{\text{全面に内圧を受ける厚肉円筒の外径部の変位}} \\
 &\times \frac{\text{全面に内圧を受ける薄肉円筒の板厚中心の変位}}{\text{全面に内圧を受ける厚肉円筒の外径部の変位}} \\
 &= \frac{\text{全面的に内圧を受ける厚肉円筒の外径部の変位}}{\text{部分的に内圧を受ける薄肉円筒の板厚中心の変位}} \\
 &\times \frac{\text{全面に内圧を受ける薄肉円筒の板厚中心の変位}}{\text{全面に内圧を受ける厚肉円筒の外径部の変位}} \\
 &= \frac{1}{X_{ctr}} \quad (\text{受圧部中心における場合, 表 3}) \quad \dots\dots (16)
 \end{aligned}$$

諸図から、明らかなように、厚肉円筒の場合も、受圧幅の大小、偏心の如何を問わず、実験値と修正理論による計算値とは、極めて良好な一致性を示している。

また、以下に式(16)と実測ひずみ(図4, 図13, 表3)から精度の良い縦弾性係数が求められるか否か検討してみる。表3から「全面に内圧を受ける厚肉円筒の外径部の変位」の理論値は、縦弾性係数 205.9 GPa のとき、3.679 μm であり、 X_{ctr} (受圧中心) は 1.535 であるから、式(16)から「部分的に内圧を受ける場合の厚肉円筒の外径部の変位」は 2.396 μm となる。

Table 3 Numerical solution of e) TC-2-1.8-1-11-5

Material			SB410	
Inner diameter			19.17	
Outer diameter			34.45	
Modulus of elasticity(GPa)			205.9	
Poisson's ratio			0.30	
Length of non press. part			7.70	
Length of pressured part			11.00	
Length of non press. part			17.70	
Test pressure(MPa)			49.00	
Strain at test press.($\times 10^{-6}$)			140	
Location		Deflect.	Strain($\times 10^{-6}$)	
		(μm)	Inside	Outside
End of cylinder	X= 7.7	0.148	15	9
		4.0	152	85
Beginning of pressure part	X= 0.0	2.779	290	161
		1.5	331	184
		3.5	368	205
		5.5	381	212
		7.5	368	205
		9.5	333	185
End of press.part	11.0	2.834	296	165
		4.0	179	100
		8.0	78	43
		12.0	2	1
End of cylinder	17.7	-0.800	-83	-46
Thick cylinder loaded entirely				
Radial deflection of inside(μm)			5.014	
outside(μm)			3.679	
Circumfer. strain of inside($\times 10^{-6}$)			523	
outside($\times 10^{-6}$)			214	
Thin cylinder loaded entirely				
Radial deflection of mid.plane(Ht)(μm)			5.600	
Circumfer. strain of inside($\times 10^{-6}$)			584	
mid.plane($\times 10^{-6}$)			418	
outside($\times 10^{-6}$)			325	
Thin cylinder loaded partially				
Mean radial deflectin in press.part(He)(μm)			3.355	
Radial deflection in center of press.part(Hctr)(μm)			3.647	
Coefficient for modification(Xe) =Ht/He			1.669	
Coefficient for modification(Xctr)=Ht/Hctr			1.535	
Modulus of elasticity(GPa)			205.9	
Modulus of elasticity obtained from test(GPa)			204.6	

一方、実測ひずみによると円筒外径の受圧中心部では 2.412 μm の変位が生じた。したがって、上記変位を比較すると、実測ひずみに相当する縦弾性係数は 204.6 GPa となって、これは計算に使用した縦弾性係数とほぼ等しいことになる。

このことは、厚肉円筒の外径部のひずみを計測して上式の修正を行えば、部分内圧や内径・外径の影響等を考慮したうえで精度の良い縦弾性係数を簡易に求められることをも意味する。

4.3 部分的に内圧を受ける円筒の塑性変形

a. 3.3 で示した 36 個の供試片について、その降伏圧力から、全面に内圧を受ける場合の厚肉円筒としての mY 値を式(15)に示す $p_y = mY \ln(R/b)$ から単純に逆算して求めた値を、表4中に「実験値」として示す。

この式によれば、同質材料の円筒については、外径／内径＝一定(例えば、供試片の外径／内径が 1.2 のグループ内)であれば、実験値は一定値にならなければならないことになるが、そのような結果にはなっていない。また、実験結果は、受圧幅が小さくなると実験値は大きくなり、それも、外径／内径が大きくなればなるほど、また、内径が大きくなればなるほど、乖離が甚だしくなることを示している。

したがって、上記事情を勘案し得る何等かの適切な修正方法が必要であり、式(15)を修正した式(17)の如き修正式を用いて試行錯誤しながら最小二乗法で偏差がどうなるか調べてみた。

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{降伏圧力}}{mY \text{ 値} \times \ln \frac{R}{b}} &= 1 + \alpha \left(\frac{\text{外径}}{\text{内径}} - 1 \right) + \beta \left(\frac{\text{外径}}{\text{内径}} - 1 \right)^2 \\
 &+ \gamma (\text{受圧状態による修正係数} - 1) \\
 &+ \delta (\text{受圧状態による修正係数} - 1)^2 \\
 &+ \epsilon \left(\frac{\text{内径}}{\text{基準径 (25.4mm)}} - 1 \right) \quad \dots\dots (17)
 \end{aligned}$$

この結果の一例として式(17)の場合を表4に5修正係数の場合として示す。表中の mY_{adj} は mY 値に式(17)の右辺の値を乗じた供試片個々の値を示す。これによれば受圧幅の影響(受圧状態による修正係数)については、「全面に内圧を受ける薄肉円筒の変位と部分的に内圧を受ける薄肉円筒の受圧部分の平均変位との比(表3の数値計算例中の X_e) を使用する方法」が精度・実用性を考慮して最適であるとした。この修正方法は内圧によるひずみエネルギー(「内圧×変位」に相当)を考慮し得ると考えられることから、概念的にも妥当なものと考えられる。さらに、外径／内径および内径の影響についても、実験値との偏差が小さくなることから、式(17)による修正方法は実用に供し得るものと解しこれを採用することとした。

なお、比較のため、内径そのものの値を考慮しない

場合、即ち4つの修正係数を使用した場合の計算例を併せて表4に示すが、この場合は偏差が大きく、使用に適しないことがわかる。

Table 4 Coefficients for getting mY value

Test piece	In.dia.	Xe	Test val.	5 coef.		4 coef.	
				Alpha	Beta	Gamma	Epsilon
				-0.4279	0.3584	1.6061	-0.5421
				-0.1302			
TC-1-1.2-2	14.48	1.0374	356.9	354.6	2.3	336.4	20.6
-3	14.52	1.0664	381.1	368.6	9.8	352.2	29.0
-1	14.52	1.1315	391.2	406.8	-15.5	385.9	5.3
-1.4-3	14.60	1.0534	334.3	347.9	-13.5	334.4	-0.1
-2	14.62	1.0942	371.8	370.4	1.3	355.9	15.9
-1	14.67	1.2269	444.2	439.9	4.4	421.8	22.5
-1.6-3	14.49	1.0672	342.5	349.9	-7.4	336.6	5.9
-1	14.64	1.1115	370.1	373.8	-3.7	360.0	10.1
-4	14.51	1.3343	492.0	485.0	7.1	464.5	27.5
-1.8-1	14.60	1.0745	344.3	354.8	-10.6	340.5	3.8
-3	14.63	1.1245	386.2	381.9	4.3	366.3	19.8
-2	14.62	1.4025	517.9	515.8	2.0	492.6	25.3
TC-2-1.2-1	19.21	1.0473	338.3	343.2	-4.9	342.1	-3.8
-2	19.16	1.0872	367.6	364.5	3.1	362.5	5.1
-3	19.13	1.1936	443.7	421.3	22.4	416.2	27.5
-1.4-6	19.23	1.0708	330.4	339.2	-8.8	342.8	-12.5
-7	19.17	1.1175	361.4	365.1	-3.7	367.2	-5.8
-8	19.10	1.3668	494.0	487.1	6.8	482.3	11.7
omitted							
TC-3-1.6-1	25.48	1.6032	344.9	329.4	15.5	356.0	-11.1
-4	25.62	1.2287	393.3	393.3	0.0	417.1	-23.7
-2	25.47	1.7372	586.0	594.6	-8.6	604.3	-18.3
-1.8-1	25.78	1.1202	350.4	341.2	9.2	365.5	-15.1
-4	25.78	1.3137	421.6	438.1	-16.5	457.0	-35.4
-3	25.64	1.9646	662.9	655.8	7.1	657.1	5.8
mY(MPa)				364.6		332.2	

b. 上記の修正方法を用いて数値計算をすることにより厚肉円筒の弾塑性解析が可能となるが、TC-2-1.8-4についての数値計算例を表5に掲げる。

c. 計算例に相当する実験例は既に図5で示した。両者を比較すると計算による降伏圧力は、345.3 MPaであり、一方、実験結果は、339.3 MPa、ひずみ 10000×10^{-6} で 344.2 MPa、ひずみ 20000×10^{-6} で 368.7 MPa であって、両者は極めて良好な一致性を示す。他の例に関しても同様の一致性が得られた。

5. 結言・応用

本論文は、拡張継手のメカニズムについて理論解析を行うのに先だち、その理論の核となる「部分的に内圧を受ける厚肉円筒」について理論的に且つ実験的に検討を加えたが、その結果以下の結論が得られた。

a. 部分的に内圧を受ける場合の薄肉円筒についての弾性理論、即ち薄肉円筒の三次元弾性理論は、極めて適確に実現象を捉えており、且つ、厚肉円筒の弾性変形についても、本理論による簡単な修正によれば三次元的に精度良く適用が可能である。

b. 上記のことは、見方を変えれば、通常は正確な測定が比較的困難な縦弾性係数を、円筒による簡便な試験により、部分的な内圧荷重の影響および円筒形状の相違の影響を排除して、簡易にかつ実用に耐えうる精度

Table 5 Elastic-plastic analysis of cylinder

Material	SB410		
Inner diameter	19.20		
Outer diameter	34.33		
Modulus of elasticity(GPa)	205.9		
Poisson's ratio	0.30		
mY value of material(MPa)	364.6		
Pressure(MPa)	245.2		
Non pressured part	12.70		
Pressured part	11.00		
Non pressured part	12.70		
Coefficient Alpha	-0.4279		
Coefficient Beta	0.3584		
Coefficient Gamma	1.6061		
Coefficient Delta	-0.5421		
Coefficient Epsilon	-0.1302		
Coefficient Xe =Ht/He	1.646		
Coefficient Xctr=Ht/Hctr	1.516		
Yield press. of cylinder(MPa)	345.3		
At expanding pressure			
Inner diameter	19.2348		
Elastic-plastic boundary	21.4068		
Outer diameter	34.3554		
Location	Direction	Stress(MPa)	Strain($\times 10^{-6}$)
Inside	radial	-245.4	-1532
	circumfer.	348.6	1810
	longitudinal	0.0	-147
E-p bound.	radial	-181.6	-978
	circumfer.	412.6	1496
	longitudinal	0.0	-222
Outside	radial	0.0	-222
	circumfer.	231.1	740
	longitudinal	0.0	-222
At expanding pressure			
Inner diameter	19.2014		
Outer diameter	34.3309		
Location	Direction	Stress(MPa)	Strain($\times 10^{-6}$)
Inside	radial	0.0	-297
	circumfer.	-120.4	74
	longitudinal	0.0	67
Outside	radial	0.0	-8
	circumfer.	7.9	25
	longitudinal	0.0	-8

で測定できることを意味する。

c. 更に、厚肉円筒の塑性変形・降伏荷重についても、薄肉円筒の三次元弾性理論を加味した本文の手法を適用することにより、部分的な内圧荷重および円筒形状の影響を考慮した解析が可能となった。

d. このことは、別の見方をすれば、塑性変形に重大な影響を及ぼすmY値を、簡易な実験によって手軽にかつ的確に得ることができることをも意味する。

e. 本論文の結果を応用すれば、二重円筒の弾塑性解析による拡張のメカニズム(耐漏洩性との関係)について実情に合った説明も可能と考えられる。

なお最後に、本研究にあたり多大な助言・指導をいただいた東京大学町田教授に深く感謝の意を表する。

文 献

- (1) エキスパンダ加工研究会「エキスパンダ加工技術総覧」,(1966),39,丸善.
- (2) Timoshenko,S. and Woinowsky-Krieger,S., *Theory of Plates and Shells*.(1959),467, McGRAW-HILL.
- (3) Hill,R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, (1950),106,Oxford.