大変形弾塑性材料の均質化法による解析*

(第 1 報, 周期性の仮定を厳密に満足するための定式化)

岡 田 裕^{*1}, 福 井 泰 好^{*1}
熊 澤 典 良^{*2}, 丸 山 拓 也^{*3}

A Homogenization Method for Nonlinear Materials undergoing Large Deformation

(1st Report, Mathematical Formulations, Which Can Rigorously Satisfy the Assumption of Periodicity)

Hiroshi OKADA, Yasuyoshi FUKUI,
Noriyoshi KUMAZAWA and Takuya MARUYAMA

The homogenization method has been known as a powerful tool to investigate the macroscopic material properties of composite materials, whose microstructures are periodic. This methodology can also be considered to be an advanced version of unit cell approach. However, the assumption of periodic structure becomes somewhat suspicious after the material has undergone a large deformation, because each unit cell also deforms finitely. In the context of homogenization method presented by Guedes and Kikuchi, the periodicity condition has to be satisfied rigorously. In this paper, a formulation which can rigorously satisfy the condition of periodicity even after the microstructure has undergone a finite deformation, is presented. It is accomplished by referring the initial undeformed configuration of microstructure, when we define the periodicity condition. Some simple numerical results of two-dimensional finite strain elasto-plastic problem are also presented and discussed. The outcome of the present research may find some application in analyzing Metal Matrix Composite Materials.

Key Words: Homogenization Method, Geometric Nonlinear Problem, Material Nonlinear Problem, Finite Element Method, Microstructure

1. 緒言

近年、均質化法を利用した有限要素法による構造最適化や複合材料の力学解析が盛んに行われ、大きな成果を挙げている^{1)~8)}。均質化法は周期的な微視構造を持つ固体の巨視的な材料挙動を解析的に求める手法として大変注目されている。しかし、均質化法は微小変形の弾性理論に基づくため、材料非線形性や幾何学的非線形性を考慮するためには特別な取り扱いが必要となる。そのため、寺田ら^{4)~6)}は線形化された増分理論を用いることにより、均質化法を形状・材料非線形問題に拡張している。高野ら⁷⁾は繰り返し計算による弾塑性解析の手法を取り入れ、形状・材料非線形問題を取り扱っている。また、野口ら⁸⁾は構成方程式を記述する応力とひずみに、初期配置にもとづく第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力と Green-Lagrange ひずみを用

いた歪弾性体の応力-ひずみ関係を使用することにより、均質化法の有限変形問題への拡張を行っている。しかしながら、寺田ら⁶⁾も指摘したように、有限変形問題ではユニットセル自体の形状が変化するため周期性の仮定が危うくなることがある。Up-Dated Lagrange 法に基づく定式化においても、変形後の現在配置を基準としてステップ毎の増分計算を行うので厳密な意味での周期性が保たれない。

以上の観点より本報では、大変形後も変形前の微視構造の配置を基準として周期性を定義する手法を提案する。Up-Dated Lagrange 法を用い、形状非線形性と材料非線形性の両者が共存する場合について、均質化法の定式化を行う。ここでは、微視構造内部にボイドの存在しない場合だけを示すが、Guedes ら²⁾のような内部空洞を持つ場合への一般化は容易である。さらに、提案した手法の妥当性を検討するため、簡単な数値解析例として非線形性が極端に現れる巨視的な単純せん断と大回転問題の結果を示す。

* 原稿受付 1997 年 5 月 19 日。

^{*1} 正員、鹿児島大学工学部 (〒890-0065 鹿児島市郡元 1-21-40)。

^{*2} 鹿児島大学工学部。

^{*3} 学生員、鹿児島大学大学院。

Fig. 1 A Body in the Initial Undeformed and in Current Deformed Configurations

2. 有限変形弾塑性問題の定式化

一般に弾塑性有限変形問題の解析では、Up-Dated Lagrange 法が用いられることが多く本研究でもそれを踏襲する(例えば、文献⁹⁾など)。そのため、図1に示すような、基準配置(初期配置)を B_0 、変形後の現在配置が B で表わされる物体を考える。基準配置 B_0 のとき、ある材料点 P の位置ベクトルを X_i で表わし、変形後の現在配置における材料点 p の位置ベクトルを x_i とする。材料点 P における変形勾配 F_{ik} は次式で表わされる。

$$F_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \quad (1)$$

Up-Dated Lagrange 法においては、現在配置を基準配置として、速度形の定式化を行うことにより問題を単純化する。Up-Dated Lagrange 法を用いた大変形問題では、第1種 Piola-Kirchhoff 応力速度を使用して仮想仕事の原理を次のように表わすことができる。

$$\int_B \dot{T}_{ji} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dB = \int_{\partial B_i} n_j \dot{T}_{ij} \delta v_j d(\partial B_i) + \int_B \dot{f}_i \delta v_i dB \quad (2)$$

ここで、 $\dot{T}_{ij}$ は現在配置を基準とする第1種 Piola-Kirchhoff 応力、 δv_i は材料点の速度 v_i の変分、 $\dot{f}_i$ は材料の単位体積あたりに働く物体力の時間微分を表わす。また、 ∂B_i は物体 B の表面のうち、外力が働いている部分を表わす。さらに、Up-Dated Lagrange 法では、基準配置と現在配置が同一なので、以下の議論では物体領域を B とだけ表わす。

ところで、各材料点では、速度型構成則により応力速度 $\dot{\tau}_{ij}$ とひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{kt}$ の関係が表わされる。

$$\dot{\tau}_{ij}^J = E_{ijkl}^{\text{ep}} \dot{\epsilon}_{kt} \quad (3)$$

ここで、 $\dot{\tau}_{ij}^J$ は Kirchhoff 応力の Jaumann 速度であり、 E_{ijkl}^{ep} は速度形の構成方程式を表わす4階テンソルである。J₂-Flow Theory など、用いる構成方程式によりその詳細は異なる。さらに、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{kt}$ は速度ベク

トル v_i を用いて次式で定義される。

$$\dot{\epsilon}_{kt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

また、Kirchhoff 応力速度 $\dot{\tau}_{ij}$ と Jaumann 速度 $\dot{\tau}_{ij}^J$ の関係と Kirchhoff 応力速度と Cauchy 応力速度の関係は次のように表わされる。

$$\dot{\tau}_{ij}^J = \dot{\tau}_{ij} - \omega_{ik} \tau_{kj} + \tau_{ik} \omega_{kj} \quad (5)$$

$$\dot{\tau}_{ij} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} \quad (6)$$

ただし、 $\omega_{ij} = \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) / 2 \right]$ はスピンテンソルである。

一方、第一種 Piola-Kirchhoff 応力と Kirchhoff 応力の速度の関係は次式で表わされる。

$$\dot{T}_{ji} = \dot{\tau}_{ji} - \tau_{ki} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \quad (7)$$

従って、式(3) - (7)の関係より、式(2)で表わされた速度形の仮想仕事の原理を次式のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \int_B \left[E_{ijkl}^{\text{ep}} \dot{\epsilon}_{kl} + \omega_{jk} \tau_{ki} - \tau_{jk} \omega_{ki} - \tau_{ki} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \right] \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dB \\ = \int_{\partial B_i} n_j \dot{T}_{ij} \delta v_j d(\partial B_i) + \int_B \dot{f}_i \delta v_i dB \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、式(8)左辺カッコ内は次式のように速度勾配 $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ と係数の積として表わすことができるので、

$$\left[E_{ijkl}^{\text{ep}} \dot{\epsilon}_{kl} + \omega_{jk} \tau_{ki} - \tau_{jk} \omega_{ki} - \tau_{ki} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \right] = Q_{ijk\ell} \frac{\partial v_\ell}{\partial x_j} \quad (9)$$

を、得る。結局、式(8)の仮想仕事の原理は、

$$\int_B Q_{ijk\ell} \frac{\partial v_\ell}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dB = \int_{\partial B_i} n_j \dot{T}_{ij} \delta v_j d(\partial B_i) + \int_B \dot{f}_i \delta v_i dB \quad (10)$$

と、書き表わすことができる。

3. 幾何学的非線形性を考慮した均質化法の定式化

速度形 Up-Dated Lagrange 法を用いて、問題を線形化した後に均質化法の定式化を行うという概念では、寺田⁴⁾と同じ考え方である。しかし本報の特色は、以下に示すように微小構造の周期性の仮定において常に変形前の状態を基準とすることにより、大変形後も周期性の仮定が厳密に保たれるように定式化を行うことである。

(a) Initially Y-Periodic Microstructure (b) Deformed Microstructure; Y-Periodicity is lost

Fig. 2 Microstructure before and after the deformation

最初に、材料の微視構造は変形前の状態で周期的であると考える。即ち、図 2 (a) に示すように、微視的構造は X_1 と X_2 方向に周期的である。ここで、全体の座標系 X_A とは別のスケールを持つ Y_A 座標系を導入する (文献^{1, 2)} 参照)。 Y_A 座標系と全体座標系 X_A は、

$$Y_A = X_A / \varepsilon \quad (11)$$

と与えられる。ただし、 ε はスケールパラメータで、微視構造単位の大さを表す。それゆえ、変位や応力等の物理量は物体全体における材料点の位置と Y_A の関数として表すことができ、これが以下で取り扱う γ -周期性である。

しかし、図 2 (b) に示すように、有限変形後の微視構造は x_i 方向に周期的でない。周期性を厳密に満足するためには、変形前の形状を参照する Total Lagrange 標記を使用することも考えられる。しかし、弾塑性構成方程式の多くは現在配置における Jaumann 応力速度とひずみ速度の関係で記述され、これには Up-Dated Lagrange 標記が適している。そこで、Up-Dated Lagrange 標記の定式化の中で、微視構造の周期性については変形前の形状を参照する。そのため、Up-dated Lagrange 法の大変形問題において、速度などの物理量を次式で表わし、変形前の微視構造に対する周期性を表現する。

$$\phi = \phi(x_i, Y_A) = \phi\left(x_i, \frac{X_A}{\varepsilon}\right) \quad (12)$$

即ち、それらの物理量は、現在配置における材料点の位置 x_i と変形前の微視構造内での位置 Y_A の関数である。現在配置における、座標 x_i に関する導関数は次式で表わされる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial Y_A}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial Y_A} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial X_A}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial Y_A} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} F_{Ai}^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial Y_A} \quad \dots (13)$$

ただし、 $F_{Ai}^{-1} = \left(\frac{\partial X_A}{\partial x_i} \right)$ は変形前から現在配置への変形

勾配 $F_{Ai} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_A} \right)$ の逆関係を表わす。さらに、変形前から現在配置への各材料点の変位を、変形前の全体座標 X_A と微視構造内の座標 Y_A の関数として表わすと、変形勾配を次のように表わすことができる。

$$F_{Ai} = \delta_{Ai} + \frac{\partial u_i}{\partial X_A} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_i}{\partial Y_A} \quad (14)$$

ただし、 δ_{Ai} はクロネッカーのデルタ記号、 u_i は変位であり、式 (12) と類似の形で、

$$u_i = u_i(X_A, Y_A) = u_i\left(X_A, \frac{X_A}{\varepsilon}\right) \quad (15)$$

と表される。

ここで、Guedes²⁾ らが導入した、変位を微視構造の大きさ ε に関する成分に分解する。即ち、

$$u_i = u_i(X_A, Y_A) = u_i^0(X_A, Y_A) + \varepsilon u_i^1(X_A, Y_A) + \varepsilon^2 u_i^2(X_A, Y_A) + O(\varepsilon^3) \quad (16)$$

と表わす。ただし、 $O(\varepsilon^N)$ は ε に関する N 次の微少量を表す。式 (16) を式 (14) に代入すれば、変形勾配を表わすことができる。

$$F_{Ai} = \delta_{Ai} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_i^0}{\partial Y_A} + \frac{\partial u_i^0}{\partial X_A} + \frac{\partial u_i^1}{\partial Y_A} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_i^1}{\partial X_A} + \frac{\partial u_i^2}{\partial Y_A} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (17)$$

ここで、式 (17) 右辺第 2 項が $\varepsilon \rightarrow 0$ において有界であるためには u_i^0 が X_A だけの関数でなければならない。即ち、変位 u_i は、

$$u_i = u_i(X_A, Y_A) = u_i^0(X_A) + \varepsilon u_i^1(X_A, Y_A) + \varepsilon^2 u_i^2(X_A, Y_A) + O(\varepsilon^3) \quad (18)$$

であり、変形勾配は

$$F_{Ai} = \delta_{Ai} + \frac{\partial u_i^0}{\partial X_A} + \frac{\partial u_i^1}{\partial Y_A} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_i^1}{\partial X_A} + \frac{\partial u_i^2}{\partial Y_A} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u_i^2}{\partial X_A} + \frac{\partial u_i^3}{\partial Y_A} \right) + O(\varepsilon^3) \quad (19)$$

である。これを簡単のため次のように書き表わす。

$$F_{Ai} = (F_{Ai})^0 + \varepsilon (F_{Ai})^1 + \varepsilon^2 (F_{Ai})^2 + O(\varepsilon^3) \quad (20)$$

また、 F_{Ai} の逆関係 F_{Ai}^{-1} も、 $\varepsilon = 0$ のまわりで Taylor 展開を行った結果として、 F_{Ai}^{-1} も式 (20) と同様な形で表わす。

$$F_{Ai}^{-1} = (F_{Ai}^{-1})^0 + \varepsilon (F_{Ai}^{-1})^1 + \varepsilon^2 (F_{Ai}^{-1})^2 + O(\varepsilon^3) \quad (21)$$

ただし、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のときを考慮すると、 $(F_{Ai}^{-1})^0$ は $(F_{Ai})^0$ の逆関係である。

γ -周期性より、Up-Dated Lagrange 法で用いる、材料点の速度 v_i を式 (12) より、現在配置における

全体座標系 x_i と変形前の微視構造内の座標 Y_A の関数として表わすことができる。即ち、

$$v_i = v_i(x_i, Y_A) = v_i\left(x_i, \frac{X_A}{\varepsilon}\right) \quad (22)$$

また変位と同様に、微視構造の大きさ ε に関する成分に漸近展開し、次式で表わす。

$$v_i = v_i(x_i, Y_A) = v_i^0(x_i, Y_A) + \varepsilon v_i^1(x_i, Y_A) + \varepsilon^2 v_i^2(x_i, Y_A) + O(\varepsilon^3) \quad (23)$$

さらに、速度勾配は式(13)の関係より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial Y_A}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial Y_A} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial X_A}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial Y_A} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} F_{Ai}^{-1} \frac{\partial v_i}{\partial Y_A} \end{aligned} \quad (24)$$

と、表わすことができる。次に、式(10)中の材料点の速度 v_i の変分 δv_i も、 x_i と Y_A の関数として定義をすると、

$$\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} F_{Ai}^{-1} \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_A} \quad (25)$$

である。式(23) - (25) の関係を式(10)に代入すると、

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} n_i \dot{T}_{ij} \delta v_j d(\partial B_i) + \int_B \dot{f}_i \delta v_i dB &= \int_B Q_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dB \\ &= \int_B Q_{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} F_{Ai}^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \right) \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} F_{Bj}^{-1} \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_B} \right) dB \end{aligned} \quad (26)$$

となる。さらに整理を行い次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} n_i \dot{T}_{ij} \delta v_j d(\partial B_i) + \int_B \dot{f}_i \delta v_i dB &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_B Q_{ijk} (F_{Ai}^{-1})^p (F_{Bj}^{-1})^q \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_B} dB \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_B Q_{ijk} \left[(F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right. \\ &+ \left. \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \right\} (F_{Bj}^{-1})^q \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_B} \right. \\ &\quad \left. + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} (F_{Bj}^{-1})^q \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_B} \right] dB \\ &+ \int_B Q_{ijk} \left[\left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \right\} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \right\} (F_{Bj}^{-1})^q \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \right) (F_{Bj}^{-1})^q + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} (F_{Bj}^{-1})^q \right] \\ &\quad \left. + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} (F_{Bj}^{-1})^q \right\} \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_B} dB \\ &+ O(\varepsilon) \end{aligned}$$

… (27)

ただし、寺田ら⁴⁾によれば、速度形構成方程式を表す

4階テンソル Q_{ijkl} は、 ε について漸近展開を施す必要はない。式(27)において右辺が $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限において有界であるためには、 $\frac{1}{\varepsilon^2}$ と $\frac{1}{\varepsilon}$ に関する項が $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限においてそれぞれ独立にゼロでなければならない^{1, 2)}。即ち、

$$\int_B Q_{ijk} (F_{Ai}^{-1})^p (F_{Bj}^{-1})^q \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_B} dB = 0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \int_B Q_{ijk} \left[(F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} (F_{Bj}^{-1})^q \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_B} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \right\} (F_{Bj}^{-1})^q \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_B} \right. \\ \left. + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} (F_{Bj}^{-1})^q \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_B} \right] dB = 0 \end{aligned}$$

… (29)

しかし、材料点の速度 v_i についても、変位勾配のときと同様に速度勾配が極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ において有界であるためには、 $v_i^0 = v_i^0(x_j)$ でなければならない。この条件 $v_i^0 = v_i^0(x_j)$ は、式(23)を式(24)に代入して得られる式において、極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ での有界条件を課しても導くことができる。ここで、 v_i^0 は Y_A 座標に依存しない巨視的な物理量と考えられる。それゆえ、式(28)左辺はゼロであり、式(29)も整理でき、

$$\int_B Q_{ijk} \left[\left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \right\} (F_{Bj}^{-1})^q \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_B} \right] dB = 0 \quad (30)$$

を得る。この式(30)より、 v_i^0 と v_i^1 の関係が求まる。また、 ε に関して0次の項は、 $\frac{\partial v_i^0}{\partial Y_A} = 0$ を考慮し、

次式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} n_i \dot{T}_{ij} \delta v_j d(\partial B_i) + \int_B \dot{f}_i \delta v_i dB &= \int_B Q_{ijk} \left[\left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \right\} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right. \\ &+ \left. \left\{ \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \right) (F_{Bj}^{-1})^q \right. \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \right) (F_{Bj}^{-1})^q \right\} \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_B} \right] dB \end{aligned} \quad (31)$$

式(30)、式(31)において、 δv_i を Y_A の関数として $\delta v = \delta \hat{v}(Y_A)$ と表わすことによりそれぞれ次の2つの式が得られる。

$$\int_B Q_{ijk} \left[\left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + (F_{Ai}^{-1})^p \frac{\partial v_k}{\partial Y_A} \right\} (F_{Bj}^{-1})^q \frac{\partial \delta \hat{v}_i}{\partial Y_B} \right] dB = 0 \quad (32)$$

$$\int_B \dot{f}_i \delta v_i dB = \int_B Q_{ijk} \left\{ \left(\frac{\partial v_k^1}{\partial x_i} + (F_{A_i}^{-1})^p \frac{\partial v_k^1}{\partial Y_A} + (F_{A_i}^{-1})^p \frac{\partial v_k^2}{\partial Y_A} \right) (F_{B_j}^{-1})^p \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_k^2}{\partial x_i} + (F_{A_i}^{-1})^p \frac{\partial v_k^2}{\partial Y_A} \right) (F_{B_j}^{-1})^p \right\} \frac{\partial \delta v_i}{\partial Y_B} dB \quad \dots (33)$$

式(32)により、 v_i^0 と v_i^1 の関係、式(33)から v_i^0 、 v_i^1 と v_i^2 の間の関係がそれぞれ定まる。また、 δv_i を巨視的な物理量として選択をすれば式(31)より、巨視的な平衡を表わす式を導くことができる。即ち、 $\delta v_i = \delta \tilde{v}_i(x_i)$ とおけば、

$$\int_{\partial B_i} n_i \dot{T}_{ij} \delta \tilde{v}_j d(\partial B_i) + \int_B \dot{f}_i \delta \tilde{v}_i dB \\ = \int_B Q_{ijk} \left\{ \frac{\partial v_k^0}{\partial x_i} + (F_{A_i}^{-1})^p \frac{\partial v_k^1}{\partial Y_A} \right\} (F_{B_j}^{-1})^p \frac{\partial \delta \tilde{v}_i}{\partial Y_B} dB \quad (34)$$

を得る。ここで、積分領域を変換して変形前の初期配置で式(30)を再定義する。

$$\int_{B_0} Q_{ijk} \left\{ \left(\frac{\partial v_k^0}{\partial x_i} + (F_{A_i}^{-1})^p \frac{\partial v_k^1}{\partial Y_A} \right) (F_{B_j}^{-1})^p \frac{\partial \delta \tilde{v}_i}{\partial Y_B} \right\} \det[F_C] dB_0 = 0 \quad \dots (35)$$

さらに、Guedes ら²⁾ で用いられている積分公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_0} \phi \left(\frac{X_A}{\varepsilon} \right) dB_0 = \frac{1}{|U_0|} \int_{B_0} \int_{U_0} \phi(Y_A) dU_0 dB_0 \quad (36)$$

により、極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ における積分変換を行う。ただし、 B_0 、 U_0 は変形前の物体とユニットセルの体積を表わす。その結果は、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_0} Q_{ijk} \left\{ \left(\frac{\partial v_k^0}{\partial x_i} + (F_{A_i}^{-1})^p \frac{\partial v_k^1}{\partial Y_A} \right) (F_{B_j}^{-1})^p \frac{\partial \delta \tilde{v}_i}{\partial Y_B} \right\} \det[F_C] dB_0 \\ = \frac{1}{|U_0|} \int_{B_0} \int_{U_0} Q_{ijk} \left\{ \left(\frac{\partial v_k^0}{\partial x_i} + (F_{A_i}^{-1})^p \frac{\partial v_k^1}{\partial Y_A} \right) (F_{B_j}^{-1})^p \frac{\partial \delta \tilde{v}_i}{\partial Y_B} \right\} \det[F_C] dU_0 dB_0 \\ = 0 \quad \dots (37)$$

である。また、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial X_A}{\partial x_i} = (F_{A_i}^{-1})^p \quad (38)$$

であることを利用し、

$$\int_{U_0} Q_{ijk} \left\{ (F_{A_i}^{-1})^p \left(\frac{\partial v_k^0}{\partial X_A} + \frac{\partial v_k^1}{\partial Y_A} \right) (F_{B_j}^{-1})^p \frac{\partial \delta \tilde{v}_i}{\partial Y_B} \right\} \det[F_C] dU_0 = 0 \quad (39)$$

が得られる。従って、 v_i^1 を v_i^0 から次式により定めることができる。

$$\int_{U_0} \left\{ Q_{ijk} (F_{A_i}^{-1})^p (F_{B_j}^{-1})^p \right\} \frac{\partial v_k^1}{\partial Y_A} \frac{\partial \delta \tilde{v}_i}{\partial Y_B} \det[F_C] dU_0 \\ = - \left(\int_{U_0} \left\{ Q_{ijk} (F_{A_i}^{-1})^p (F_{B_j}^{-1})^p \right\} \frac{\partial \delta \tilde{v}_i}{\partial Y_B} \det[F_C] dU_0 \right) \frac{\partial v_k^0}{\partial X_A} \quad (40)$$

ところで、 v_i^1 が任意の $\frac{\partial v_k^0}{\partial X_A}$ より定まる量として、

$$v_i^1 = -\chi_i^{kl} \left(\frac{\partial v_k^0}{\partial X_A} \right) \quad (41)$$

と表わし、式(34)を積分公式(36)と式(38)の関係を用いて変換することにより次式を得る。

$$\int_{\partial B_i} n_i \dot{T}_{ij} \delta \tilde{v}_j d(\partial B_i) + \int_B \dot{f}_i \delta \tilde{v}_i dB \\ = \int_{B_0} \frac{1}{|U_0|} \left[\int_{U_0} Q_{ijk} \left\{ \frac{\partial v_k^0}{\partial x_i} - (F_{A_i}^{-1})^p \frac{\partial X_k^{mc}}{\partial Y_A} \frac{\partial v_m^0}{\partial X_C} \right\} \det[F_D] dU_0 \right] \frac{\partial \delta \tilde{v}_i}{\partial x_j} dB_0 \\ = \int_{B_0} \frac{1}{|U_0|} \left[\int_{U_0} Q_{ijk} \left\{ \frac{\partial v_k^0}{\partial x_i} - (F_{A_i}^{-1})^p \frac{\partial X_k^{mc}}{\partial Y_A} (F_{n_c})^p \frac{\partial v_m^0}{\partial x_n} \right\} \det[F_D] dU_0 \right] \frac{\partial \delta \tilde{v}_i}{\partial x_j} dB_0 \\ = \int_{B_0} \frac{1}{|U_0|} \left[\int_{U_0} Q_{ijk} \left\{ \delta_{mk} \delta_{n_i} - (F_{A_i}^{-1})^p \frac{\partial X_k^{mc}}{\partial Y_A} (F_{n_c})^p \right\} \det[F_D] dU_0 \right] \frac{\partial v_m^0}{\partial x_n} \frac{\partial \delta \tilde{v}_i}{\partial x_j} dB_0 \quad \dots (42)$$

さらに、積分領域を変換すると、次式が導かれる。

$$\int_{\partial B_i} n_i \dot{T}_{ij} \delta \tilde{v}_j d(\partial B_i) + \int_B \dot{f}_i \delta \tilde{v}_i dB \\ = \int_{B_0} \frac{1}{|U_0|} \left[\int_{U_0} Q_{ijk} \left\{ \delta_{mk} \delta_{n_i} - (F_{A_i}^{-1})^p \frac{\partial X_k^{mc}}{\partial Y_A} (F_{n_c})^p \right\} \det[F_D] dU_0 \right] \left| \frac{dB_0}{dB} \right| \frac{\partial v_m^0}{\partial x_n} \frac{\partial \delta \tilde{v}_i}{\partial x_j} dB \quad \dots (43)$$

ただし、 $\left| \frac{dB_0}{dB} \right|$ は変形前後の巨視的な体積変化を表わす。

ここで、式(43)右辺のカッコ内を、

$$\bar{Q}_{ijmn} = \frac{1}{|U_0|} \left[\int_{U_0} Q_{ijk} \left\{ \delta_{mk} \delta_{n_i} - (F_{A_i}^{-1})^p \frac{\partial X_k^{mc}}{\partial Y_A} (F_{n_c})^p \right\} \det[F_D] dU_0 \right] \left| \frac{dB_0}{dB} \right| \quad \dots (44)$$

と置けば $\bar{Q}_{ijmn}$ を巨視的な問題に対する見かけの接線剛性係数と考えることができ、巨視的な釣合いの式を、

$$\int_{\partial B_i} n_i \dot{T}_{ij} \delta \tilde{v}_j d(\partial B_i) + \int_B \dot{f}_i \delta \tilde{v}_i dB = \int_B \bar{Q}_{ijmn} \frac{\partial v_m^0}{\partial x_n} \frac{\partial \delta \tilde{v}_i}{\partial x_j} dB \quad (45)$$

と、書くことができる。式(45)は平均化された見かけの接線剛性係数により、巨視的な有限要素法解析を一般的な Up-Dated Lagrange 法による場合と同様

Table 1. Material Properties in the Unit Cell Problems

(a) The Case of Hard Inclusion				
	Young's Modulus	Poisson's Ratio	Yield Stress	Strain Hardening Ratio
Shaded Area	1000000	0.3	Infinity	N/A
Surrounding	10000	0.3	10	1

(b) The Case of Soft Inclusion				
	Young's Modulus	Poisson's Ratio	Yield Stress	Strain Hardening Ratio
Shaded Area	10000	0.3	10	1
Surrounding	1000000	0.3	Infinity	N/A

に行えることを表わしている。

4. 簡単な数値解析例

二次元平面ひずみ状態を仮定した、大変形を受けるユニットセルの解析例を図3に示す。このユニットセルは表1に示すような2種類の材料からなり、 J_2 -Flow Theory に従う弾塑性固体がより固い弾性体を取り囲む場合とその逆である。用いた計算アルゴリズムは、図4に示すような2種類の解析を平行し、繰り返し行うものである。巨視的な変形場を仮定しユニットセルの微視的変形挙動を解析するために、式(40)を用いて微視的変形場の仮定した巨視的変形量 v_i^0 からのずれ v_i^1 を求める(均質化法による解析)。さらに、ユニットセル外周上での変位増分 $(v_i^0 + \epsilon v_i^1) \Delta t$ を、大変形有限要素法解析の変位境界条件として与えた。この手法は高野ら⁷⁾と類似のものである。ここでは、それぞれの解析を1000回のステップに分割して行った。

大変形の結果としての非線形性が極端に現われる例として、巨視的な単純せん断を与えた場合と、剛体回転を与えた場合の解析を行い、周期性の仮定を厳密には満足しない、

$$\int_U Q_{ijk} \frac{\partial v_k^1}{\partial y_i} \frac{\partial \delta \hat{v}_i}{\partial y_j} dU = - \left(\int_U Q_{ijk} \frac{\partial \delta \hat{v}_i}{\partial y_j} dU \right) \frac{\partial v_k^0}{\partial x_i} \quad (y_i = x_i / \epsilon)$$

... (46)

Fig. 3 Problems to be analyzed; Macroscopic Rigid Rotation of π and Simple Shear of $\pi/4$

Fig. 4 Algorithm adopted to carry out the present simple analysis

として微視的変形を計算した寺田ら⁶⁾の定式化による場合と比較を行った。微視構造の有限要素分割を図5に示すが、使用した要素は平面ひずみ4節点選択低減積分要素(例えば、文献⁹⁾)である。図5の有限要素分割では斜線により材料の違いを表わしている。図6に巨視的な単純せん断を与えた場合の微視構造の変形状態を示す。ただし、単純せん断問題に対しては、中央の固い物質が柔らかい弾塑性材料で包まれている場合だけ示す。図6(a)、(b)はそれぞれ、周期性の仮定を厳密に満足する場合としない場合である。この解析では変形状態に著しい違いは見られなかった。しかし、巨視的な剛体回転を与えた場合では、厳密な定式化を行わなかった場合に著しい解析精度の低下が見られる。図7と図8にそれぞれ、固い材料が柔らかい弾塑性材料に囲まれているときとその逆の場合の解析結果を示す。図7(a)と図8(a)に示す本報で提案する厳密に周期性の仮定を満足する手法を用いた場合、微視構造も剛体回転するだけである。これに対し、厳密な周期性が満足されない場合は、剛体回転を与えたにもかかわらず、それ以外の変形モードが発生している。この原因は、周期性の仮定を満足しないために発生する微視構造の変形モードが加わったためと考えられる。よって、本報の定式化が大変形問題(特に大回転を含む場合)に有効であると言える。

Fig. 5 Finite Element Mesh for the Simple Analyses,

(a) Present formulation (b) Using eq. (46)

Fig. 6 Deformed geometry of the unit cell under Macroscopic pure shear of $\pi/4$

5. 結言

1. 有限変形非線形固体に対する均質化法の厳密な定式化を行った。周期性の仮定を変形前の初期配置において満足している。
2. 本報で導かれた、巨視的変形と微視的変形場の関係式は、弾性問題の場合と類似である。弾性問題と比較して、計算量の大幅な増加は無い。
3. 数値解析例として、巨視的な単純せん断と剛体回転問題を取り上げた。単純せん断問題では厳密な周期性を満足しなくても、特に著しい不都合は認められなかった。一方、剛体回転問題では、厳密に周期性の条件を満足しない定式化を用いた場合に解析精度が著しく低下するが、本報で提案した定式化によれば、不都合は一切見られなかった。それゆえ、本報で提案した大変形問題に対する均質化法の定式化の妥当性が証明できたと考える。
4. 今後は、さらに手法の妥当性の検証を行い、金属基複合材料等の分野へ応用を試みる予定である。

謝辞

本研究の一部は、(財)天田金属加工機械技術振興財団による研究助成(奨励研究 No. AF-96032)により行われている。関係者各位に謹んでお礼を申し上げます。

文献

- (1) Bendosøe, M.P., and Kikuchi, N., *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 71, (1988), pp. 197-224
- (2) Guedes, M.J. and Kikuchi, N. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 83, (1990), pp. 143-198
- (3) 高野ほか2名、機論 61-585, A (1995), 1038-1043
- (4) 寺田ほか2名、機論 61-601, A (1995), 2199-2205
- (5) 弓削、菊池、機論 62-600, A (1996), 1910-1917
- (6) 寺田ほか2名、機論 62-601, A (1996), 2072-2079
- (7) 高野ほか3名、機論 62-595, A (1996), 859-864
- (8) 野口、石原、機講論 No. 97-1, 234-235
- (9) 日本塑性加工学会編、非線形有限要素法、コロナ社 (1994)

(a) Present formulation (b) Using eq. (46)

Fig. 7 Deformed geometry of the unit cell under macroscopic rigid rotation of angle π (hard particle at the center and soft elastic plastic material surrounding it)

(a) Present formulation (b) Using eq. (46)

Fig. 8 Deformed geometry of the unit cell under macroscopic rigid rotation of angle π (hard particle surrounding soft elastic plastic material surrounding it)