ASI 法を用いた退化型チモシェンコ梁要素の 大変位大回転弾塑性問題への適用*

宮 村 倫 司^{*1}, 都 井 裕^{*2}

Application of Degenerated Timoshenko Beam Element Using the Adaptively Shifted Integration Technique to Elastic-Plastic Analyses of Frames Considering Large Displacements/Rotations

Tomoshi MIYAMURA and Yutaka TOI

Appropriate positions of plastic hinges can be evaluated by using the adaptively shifted integration (ASI) technique in the elastic-plastic analyses of framed structures. In this paper the ASI technique is applied to the degenerated Timoshenko beam element developed by Dvorkin et al., which is considering the effect of large displacements/rotations. By slightly modifying the shape functions of Dvorkin's element, the effect of large rotations can be precisely taken into account with the use of the ASI technique. Therefore, precise rigid body rotation about a plastic hinge can be represented by the presented element. Stresses at the hinge are also evaluated appropriately.

Key Words: Plasticity, Plastic Hinge, Finite Element Method, Structural Analysis, Framed Structure, Finite Deformation Theory, Large Rotation, ASI Technique, Degenerated Beam Element

1. はじめに

骨組構造の弾塑性解析においてしばしば用いられる塑性ヒンジ法では、弾性変形に対しては梁の弾性解を用い、塑性化後の変形は塑性ヒンジを中心とした剛体回転により表わす。つまり、塑性ヒンジ発生後の変形モードはそれまでの弾性変形モードと異なっており、弾塑性状態における梁の変形は両者の和となる。

ところで、一般に有限要素法では数値積分点においてのみ応力を評価するため、塑性ヒンジの位置は積分点の位置に限定される。また、塑性ヒンジ発生後にヒンジ位置で折れ曲がるような不連続な変形は、連続体力学を基礎とする有限要素法では表現しにくい。

著者のひとりである都井が中心となって開発を行ってきた順応型 Shifted Integration 法 (以下 ASI 法) は、一般的な梁要素により塑性ヒンジ法と同等の解析を行うための手法である^{1)~10)}。ASI 法は梁要素と一次元剛体ばねモデル (RBSM) の等価性に基づいており、微小変形の範囲では塑性ヒンジ法と全く等価となる。しかも、必要な操作は積分点のシフトのみであり、既存の有限要

素法の解析コードへの組み込みも簡単である。ASI 法は軸方向に一点積分した線形 (内挿関数が一次の) チモシェンコ梁要素と軸方向に二点積分した三次梁要素に対して適用可能であり、都井等は多くの事例によりその有効性を実証している。

ASI 法は微小変形解析のみならず、幾何学的非線形解析にも適用されている^{11)~13)}。文献 3), 4) では線形チモシェンコ梁要素を近似的な total Lagrange 法、あるいは要素座標系の更新と updated Lagrange 法の併用により幾何学的非線形問題に拡張し、Shifted Integration 法を適用している。ただしここでは順応的な積分点のシフトは行われていない。特に後者の要素は大変位、大回転を伴うクラッシュ解析を目的としており、骨組構造の大変形崩壊挙動について良好な結果が得られている。文献 7) ではこの要素が爆破解体解析に応用されている。文献 5) では近似的な total Lagrange 法に基づく三次梁要素により座屈解析を行っているが、変形が小さい問題のみを扱っている。

本論文では大変位、大回転を考慮した要素として一般的なもののひとつである Dvorkin 等の連続体退化型 (以下、退化型) チモシェンコ梁要素¹⁴⁾に ASI 法を適用する。ただし、大変位、大回転問題に ASI 法を適用するためには、この要素に多少の修正を加える必要があ

* 原稿受付 1997 年 6 月 19 日。

^{*1} 正員, 東京大学大学院工学系研究科 (☎ 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1) [研究当時: 東京大学生産技術研究所]。

^{*2} 正員, 東京大学生産技術研究所 (☎ 106-8558 東京都港区六本木 7-22-1)。

る。これについては4節に詳述する。なお、本要素の開発の過程は文献3), 4), 19)に一部発表している。

本論文の内容を以下に示す。2節ではASI法の概要と幾何学的非線形問題への適用のための理論を示す。3節ではDvorkin等の要素の要点、構成式、および退化型要素へのASI法の適用法と適用時の問題点について述べる。4節では3節の問題点を回避するために、変形後の形状を逐次直線梁により近似する方法を示す。5節では4節の応用例として、立体骨組構造の崩壊解析を行う。6節は結論である。

2. ASI法の概要

2.1 Shifted Integration法 都井¹⁹⁾はせん断ロッキング回避のために、一点積分を行った線形チモシェンコ梁要素の積分点を、適当な位置にシフトすれば、任意の位置に曲げ、せん断ばねを持つ一次元剛体ばねモデル(以下RBSM)と力学的に等価となることを示した。すなわち、図1に示すように、積分点を例えば右に s^1 だけシフトしたチモシェンコ梁要素は、中央より左に s^1 ずれた位置に曲げせん断ばねを持つRBSMと力学的に等価となる。従って、ばねを塑性ばねとすれば、積分点のシフトによりチモシェンコ梁要素内の任意の位置に塑性ヒンジを設定することができる。

2.2 幾何学的非線形の考慮 幾何学的非線形問題へのASI法の適用が可能であることを説明するために、文献1)に示される線形チモシェンコ梁とRBSMの等価性が、初期応力の影響を考慮しても成立することを証明

Fig 1: Equivalence between the linear Timoshenko beam element and 1D RBSM.

Fig. 2: Shifting an integration point and replacement of a RBSM by another RBSM.

する。以下では剛体回転は小さいと仮定するが、4節に詳述するように共回転系(文献14)等)を考えて以下の理論を逐次的に適用すれば大回転問題も扱える。退化型要素を扱うので、断面内に分布する直応力を考え、対応するRBSMでは図1のように断面内にばね群が分布しているものとする。なお、既に文献8)において層分割法による要素(二次元の退化型要素)に対してもASI法は適用されており、良好な結果が得られている。

退化型要素の基礎式との整合性を考えて、文献1)と一部異なる記号を用いる。また、二次元の梁についての理論を示すが、直線梁では曲げと振りの連成を無視できるので、容易に三次元の梁へ拡張できる。なお、文献1)では歪エネルギーの等価性を示しているが、ここでは仮想仕事式の等価性を示す。

最初に退化型線形チモシェンコ梁要素について考える。 a を梁幅、 L を梁の長さとし、紙面と直交方向の梁幅は1とする。座標軸や変位成分の記号は図1を参照する。次のような時刻 t から $t + \Delta t$ への増分変位場を仮定する。

$$\begin{Bmatrix} u^{\Delta t} \\ w^{\Delta t} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^2 N^n(s^1) \begin{Bmatrix} u^n \\ w^n \end{Bmatrix} + \frac{a}{2} s^2 \begin{Bmatrix} \theta^n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに、

$$N^1(s^1) = \frac{1}{2}(1 - s^1), \quad N^2(s^1) = \frac{1}{2}(1 + s^1) \quad (2), (3)$$

である。以下では $u^{\Delta t}$ 等は u のように表記する。

$\delta U =$ チモシェンコ梁の内力の仮想仕事は

$$\begin{aligned} & \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-a/2}^{a/2} C_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dy dx + \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-a/2}^{a/2} C_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \delta \theta \right) dy dx \\ & + \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-a/2}^{a/2} \sigma_1 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dy dx + \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-a/2}^{a/2} \sigma_1 \frac{\partial \delta u}{\partial x} dy dx \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここに $C_1(s^2)$ 、 C_2 は材料定数、 σ_1 は軸方向の初期応力である。チモシェンコ梁では面外せん断歪は一定なので、振りを考えなければ C_2 は s^2 に依存しない。第一項は軸歪、第二項は面外せん断歪のそれぞれ線形部分に関する項である。第三項は初期応力による幾何剛性、第四項は初期応力による等価節点内力に関する項である。剛体回転は小さいと仮定したので第三項以外の幾何学的非線形項は省略できる。式(4)に式(1)を代入し、軸方向について s_0^1 を積分点として一点積分すると次式となる。

$\delta U =$

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2L} \int_{-1}^1 C_1(s^2) \left\{ u^2 - u^1 + \frac{a}{2} s^2 (\theta^2 - \theta^1) \right\} \left\{ \delta u^2 - \delta u^1 + \frac{a}{2} s^2 (\delta \theta^2 - \delta \theta^1) \right\} ds^2 \\ & + \frac{a}{L} C_2 \left\{ w^2 - w^1 - \frac{L}{2} (1 + s_0^1) \theta^2 + \frac{L}{2} (1 - s_0^1) \theta^1 \right\} \\ & \left\{ \delta w^2 - \delta w^1 - \frac{L}{2} (1 + s_0^1) \delta \theta^2 + \frac{L}{2} (1 - s_0^1) \delta \theta^1 \right\} \\ & + \frac{a}{2L} \int_{-1}^1 \sigma_1(s^2) \left\{ w^2 - w^1 \right\} \left\{ \delta w^2 - \delta w^1 \right\} ds^2 \\ & + \frac{a}{2L} \int_{-1}^1 \sigma_1(s^2) \left\{ u^2 - u^1 \right\} \left\{ \delta u^2 - \delta u^1 \right\} ds^2 \end{aligned} \quad (5)$$

次にせん断変形を考慮した一次元 RBSM について考える。ばねの位置の相対変位は

$$\begin{aligned}\Delta u &= u^2 - u^1 + \frac{a}{2}s^2(\theta^2 - \theta^1) + \left(\sqrt{L^2 + (w^2 - w^1)^2} - L\right) \\ &\approx u^2 - u^1 + \frac{a}{2}s^2(\theta^2 - \theta^1) + \frac{1}{2L}(w^2 - w^1)^2 \\ &= \Delta u_L + \Delta u_{NL}\end{aligned}\quad (6)$$

$$\Delta w = w^2 - w^1 - \frac{L}{2}(1-r)\theta^2 + \frac{L}{2}(1+r)\theta^1 \quad (7)$$

となる。ここに r はばねの位置である (図 1, 3 参照)。式 (6) の下線部は図 3 の Δ に相当する。式 (6), (7) は剛体回転がそれ程大きくない時に成立する。ここで、図 1 のように回転ばねを断面内に分布するばね群 (Multi Spring Model¹⁵⁾) に置き換えれば内力の仮想仕事は次式となる。

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_{-a/2}^{a/2} k_s \Delta u_L \delta \Delta u_L dy + k_s \Delta w \delta \Delta w \\ &\quad + \int_{-a/2}^{a/2} \sigma_s \delta \Delta u_{NL} dy + \int_{-a/2}^{a/2} \sigma_s \delta \Delta u_L dy\end{aligned}\quad (8)$$

ここに、 σ_s は単位面積あたりのばねにかかる力であり、式 (4) の初期応力と等価である。ばねの剛性を差分により評価すれば

$$k_s = \frac{C_1(s^2)}{L}, \quad k_t = \frac{aC_2}{L} \quad (9), (10)$$

となる。これらと式 (6), (7) を式 (8) に代入すると、 $\delta U =$

$$\begin{aligned}&\frac{a}{2L} \int_{-1}^1 C_1(s^2) \left\{ u^2 - u^1 + \frac{a}{2}s^2(\theta^2 - \theta^1) \right\} \left\{ \delta u^2 - \delta u^1 + \frac{a}{2}s^2(\delta \theta^2 - \delta \theta^1) \right\} ds^2 \\ &+ \frac{a}{L} C_2 \left\{ w^2 - w^1 - \frac{L}{2}(1-r)\theta^2 + \frac{L}{2}(1+r)\theta^1 \right\} \\ &\left\{ \delta w^2 - \delta w^1 - \frac{L}{2}(1-r)\delta \theta^2 + \frac{L}{2}(1+r)\delta \theta^1 \right\} \\ &+ \frac{a}{2L} \int_{-1}^1 \sigma_s(s^2) (w^2 - w^1) (\delta w^2 - \delta w^1) ds^2 \\ &+ \frac{a}{2L} \int_{-1}^1 \sigma_s(s^2) (u^2 - u^1) (\delta u^2 - \delta u^1) ds^2\end{aligned}\quad (11)$$

となる。上式と式 (5) を比較すれば

$$s_0^1 = -r \quad (12)$$

の時に内力の仮想仕事が等価になることがわかる。

2.3 順応型 Shifted Integration (ASI) 法 文献 1) ではヒンジの発生が予想される位置に積分点を予めシフトしている。しかし、弾性状態では図 1 の s^1 が Gauss 積分点 ($s^1 = 0$) にある時に最も精度の良い解が得られる。そこで、都井と磯部は塑性ヒンジが生じるまでは積分点を Gauss 積分点に置き、塑性ヒンジが発生したと判断してから初めて積分点をシフトする手法を提案した (順応型 Shifted Integration 法²¹⁾)。この場合は図 2 に示すように、塑性ヒンジの発生の前後で異なる RBSM を

Fig. 3: Extension of the RBSM in axial direction due to lateral displacements.

用いることになり、塑性ヒンジ法と等価になる。

3. Dvorkin 等の有限回転を考慮した退化型チモシェンコ梁要素への ASI 法の適用

3.1 概要 本節では Dvorkin 等のディレクターの有限回転を考慮した退化型梁要素¹¹⁾とそれへの ASI 法の適用について述べる。本要素に ASI 法を適用すると後述のように回転が大きくなるにつれて強いロッキングが生じるが、これは次節に述べるような形状関数の再定義により回避できる。本節では次節における修正点を明確にするため、形状関数を中心に Dvorkin 等の定式化をまとめる。次に、退化型梁要素への ASI 法の適用法を説明する。最後に片持ち梁の数値解析例により問題点を明らかにする。

3.2 Dvorkin 等の定式化 Dvorkin 等の要素は Bathe 等のアイソパラメトリック梁要素^{12), 13)}を改良したものである。改良された点は、(1) 断面の向きを規定する二方向のディレクターを Argyris の有限回転テンソルにより更新していること、(2) 有限回転テンソルに対して consistent な接線剛性行列を用いていること、(3) 埋込座標系の成分により定式化を行っていることである。なお、変形は total Lagrange 法に基づき記述されている。

図 4 に要素形状と記号を示す。要素の初期形状は

$${}^0\mathbf{X}(s^1, s^2, s^3) = \sum_{n=1}^2 N^n(s^1) \left({}^0\mathbf{X}^n + \frac{a^n}{2}s^2\mathbf{V}_2^n + \frac{b^n}{2}s^3\mathbf{V}_3^n \right) \quad (13)$$

であり、また、時刻 t から時刻 τ への変位ベクトルは ${}^t\mathbf{u}(s^1, s^2, s^3)$

$$= \sum_{n=1}^2 N^n(s^1) \left\{ {}^t\mathbf{u}^n + \frac{a^n}{2}s^2({}^t\mathbf{V}_2^n - {}^0\mathbf{V}_2^n) + \frac{b^n}{2}s^3({}^t\mathbf{V}_3^n - {}^0\mathbf{V}_3^n) \right\} \quad (14)$$

となる。ここに、上付き添字 n は節点 n を示し、 ${}^0\mathbf{X}^n$ は中立軸の位置ベクトル、 ${}^t\mathbf{u}^n$ は並進成分、 $\mathbf{V}_i^n$ は図 4 に示すような時刻 t における断面の向きを表すディレクター、 a^n と b^n は梁幅である。また、 s^1, s^2, s^3 は自然座標系のパラメーターであり、基底関数としては式 (2), (3) を用いる。

時刻 t から時刻 τ へのディレクター $\mathbf{V}_i^n$ の回転は Argyris の有限回転テンソル ${}^t\mathbf{R}^n$ により

$${}^t\mathbf{V}_i^n = {}^t\mathbf{R}^n \cdot {}^0\mathbf{V}_i^n \quad (15)$$

と表すことができる。ここに、

Fig. 4: Degenerated Timoshenko beam element.

Fig. 5: A circular section.

$${}^t\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin[{}^t\theta]}{[{}^t\theta]} {}^t\boldsymbol{\Theta} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin([{}^t\theta]/2)}{[{}^t\theta]/2} \right\}^2 ({}^t\boldsymbol{\Theta})^2 \quad (16)$$

$${}^t\boldsymbol{\Theta} = {}^t\boldsymbol{\Theta}_i \mathbf{e}_i \quad (17)$$

$${}^t\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t\theta_3 & {}^t\theta_2 \\ {}^t\theta_3 & 0 & -{}^t\theta_1 \\ -{}^t\theta_3 & {}^t\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

である。 ${}^t\boldsymbol{\Theta}$ は軸性ベクトルであり特別な場合を除き物理的な回転角を表すものではない。式(14)、(15)により時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ への増分変位場は、

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}(s^1, s^2, s^3) = \sum_{n=1}^2 N^n(s^1) \left\{ {}^t\mathbf{U}^n + \frac{a^n}{2} s^2 ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^n - \mathbf{I}) {}^t\mathbf{V}_2^n + \frac{b^n}{2} s^3 ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^n - \mathbf{I}) {}^t\mathbf{V}_3^n \right\} \quad (19)$$

となる。ここに、 ${}^t\mathbf{U}^n$ は時刻0から時刻 t への節点変位である。接線剛性を求める際には ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^n$ を時刻 t を中心としてテーラー展開すればよい。詳細は文献11)を参照することとし省略する。

歪と応力は埋込座標系における成分により表示する。初期配置における共変基底ベクトルは、

$${}^0\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s^i} \quad (20)$$

であり、時刻 $t + \Delta t$ における共変基底ベクトルは

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_i = {}^0\mathbf{G}_i + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}}{\partial s^i} = {}^t\mathbf{g}_i + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}}{\partial s^i} \quad (21)$$

となる。これらの基底ベクトルを用いれば時刻0を基準配置としたGreen-Lagrange歪テンソルの時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ への増分は次式となる。

$${}^0\mathbf{E} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_i {}^{t+\Delta t}\mathbf{g}_j - {}^t\mathbf{g}_i {}^t\mathbf{g}_j) {}^0\mathbf{G}^i \otimes {}^0\mathbf{G}^j \quad (22)$$

上式と次節に示す構成式より得られる応力の増分(速度)を、線形化した仮想仕事式に代入すれば離散化できる。仮想仕事式の積分は退化型要素では断面内についても数値積分とする。円断面の場合には図5のように (s^2, s^3) を (r, φ) に写像する。後の例題では円断面を用いており、 φ 方向を台形則、 r 方向をシンプソン則により積分している。弾塑性解析では断面内の積分点は多い程良く、半径方向7点、円周方向16点の計112点としている。

3.3 弾塑性構成式 文献13)(6.4節)、16)(6.3.1節)等に表示されているように、Green-Lagrange歪テンソルと第二Piola-Kirchhoff応力テンソルの剛体回転に対する不変性により、両者の関係は大変位、大回転が生じても歪が微小であれば、共回転系において記述された微小歪テンソルとCauchy応力テンソルについての構成式により近似的に与えられる。すなわち、四階のテンソル $\mathbf{C}$ を用いて、

$${}^0\mathbf{S} = \mathbf{C} {}^0\mathbf{E} \quad (23)$$

と表すことができる。ここに、 ${}^0\mathbf{S}$ は第二Piola-Kirchhoff応力テンソルの増分である。なお、 $\mathbf{C}$ がデカルト座標系の成分により与えられる場合、初期配置における埋込

座標系との間の座標変換が必要となるが、文献11)の4節に示されるように、初期配置における三個のディレクターが直交していれば簡単な計算となる。

構成関係としては、軸方向(以下では添字1により表す)のみが塑性化し他の成分は弾性のままであると仮定する。Cauchy応力テンソルの成分 σ_{11} と微小歪テンソルの成分 ε_{11} の関係は移動硬化を考慮したバイリニア型とする。以下では、応力テンソル、歪テンソルの成分をそれぞれ応力、歪と呼ぶ。

時刻 t の応力を σ_{11} とすれば、時刻 $t + \Delta t$ における応力は塑性化が起きた時には

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{11} = \frac{H'}{E + H'} \sigma_{11} + \frac{EH'}{E + H'} \Delta \varepsilon_{11} + \frac{E}{E + H'} \sigma_{y11} \quad (24)$$

となる。ここに、 E : ヤング率、 H' : 歪硬化係数、 $\Delta \varepsilon_{11}$: 歪の増分、 σ_{y11} : 時刻 t における降伏応力である。上式を以下のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\sigma_{11} &= \frac{H'}{E + H'} (\sigma_{11} + E \Delta \varepsilon_{11}) + \frac{E}{E + H'} \sigma_{y11} \\ &= \frac{H'}{E + H'} {}^{t+\Delta t}\sigma_{11}^T + \frac{E}{E + H'} \sigma_{y11} \end{aligned} \quad (25)$$

ここに、 ${}^{t+\Delta t}\sigma_{11}^T$ は弾性試行応力であり、除荷の判定はこれと σ_{y11} とを比較することにより行う。除荷が起きた場合や塑性化していない場合には ${}^{t+\Delta t}\sigma_{11} = {}^{t+\Delta t}\sigma_{11}^T$ となる。

一次元の場合、式(25)は理論解でありかつconsistentな構成式を用いた後退型Euler法による応力積分(文献16)の6.2節等)に一致している。なお、増分を与えた後に弾性状態となる時には式(25)は成立しないので、増分区間内で弾性または塑性の構成式が整合するまで計算をやり直す。どうしても整合しない場合には増分幅を少し変えて再計算する。

3.4 退化型要素へのASI法の適用^{9), 10)} 退化型要素にASI法を適用する際に注意すべき点は(1)積分点以外での応力の求め方、(2)積分点をシフトする条件、である。なお、2節に述べたように積分点位置と物理的な応力評価点は中央点について反対側になることに注意する。

次数低減積分を行った場合、積分点以外の点の応力を直接求めることはできない。しかし、最適な塑性ヒンジの位置を決めるには積分点以外の点の応力を適切に評価する必要がある。ここでは、軸方向応力より求めた曲げモーメントをせん断合応力により外挿してから²⁾、再び応力に変換する。

ディレクター $\mathbf{V}_2^0$ まわりの曲げモーメントは、

$$M_2 = M_{Q2} + Q_{Q2} l \quad (26)$$

となる。ここに、添字 Q は積分点を示し、 M_{Q2} は曲げモーメント、 M_2 は積分点より l だけ離れた点の曲げモーメント、 Q_{Q2} はせん断合応力である。ただし、積分点を基準として s^1 が増加する側の点に対して l を正とする。 $\mathbf{V}_3^0$ まわりの曲げも考慮すると、弾性状態にあれば断面二次

モーメント I_2, I_3 、断面積 A 、軸方向合応力 N_{11} (要素内で一定と仮定) によりシフト先の軸方向応力 σ_{11} は、

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{N_{11}}{A} + \frac{M_1}{I_1} s^2 + \frac{M_2}{I_2} s^3 \\ &= \frac{N_{11}}{A} + \frac{M_{Q1}}{I_1} s^2 + \frac{Q_{Q12} l}{I_1} s^2 + \frac{M_{Q2}}{I_2} s^3 + \frac{Q_{Q13} l}{I_2} s^3 \\ &= \sigma_{Q11} + \frac{Q_{Q12} l}{I_1} s^2 + \frac{Q_{Q13} l}{I_2} s^3 \\ &= \sigma_{Q11} + \frac{A \tau_{mQ12} l}{I_1} s^2 + \frac{A \tau_{mQ13} l}{I_2} s^3\end{aligned}\quad (27)$$

となる (図6参照)。ただし、 σ_{Q11} は梁の断面内の積分点の軸方向応力である。また、 τ_{mQ12} 、 τ_{mQ13} はせん断応力であり、中立軸上の積分点における値を用いることで捩りに関する成分を分離している。式 (27) は弾性状態においてのみ成立するが、本論文の計算例では塑性化が起り始めた時、あるいは除荷後にほぼ弾性状態となった時のみにシフトを行うので大きな問題ではない。

次に、積分点をシフトする条件について述べる。退化型要素の場合、塑性ヒンジが生じたことを明確に判定することはできないので、次のような条件を設定した。

- (1) 積分点の位置は左右の節点および Gauss 積分点 (中央点) のいずれかとする。
- (2) 断面内の全ての積分点を同時にシフトする
- (3) 左右および中央点の中で、断面内で塑性化した点の数が最も多い位置へ積分点をシフトする。ただし、梁の表面に近い点の塑性化はシフトの判定において考慮しない。つまり、表面のみ塑性化している時には弾性変形が支配的であるので積分点は中央に置く。なお、積分点以外の位置における塑性化の判定は、式 (27) により外挿した応力に基づいて行う。
- (4) シフトするのは断面全体が弾性から一部塑性の状態へ、あるいは除荷により断面全体が弾性に戻った時のみとする。
- (5) 純曲げや軸力により軸方向に均質に塑性化する場合には積分点を中央に置く。そこで、左右の節点の塑性化した点の数の差が小さい時には積分点は中央とする。
- (6) シフトの判定は、接線剛性行列を求める前に前ステップで得られた応力に基づいて行う。シフトを行った後は式 (27) により応力を外挿し、これを現時点での応力とする。一方、せん断応力は軸方向について一定と仮定する。
- (7) Newton-Raphson法による収束計算中にはシフトをし

Fig. 6: Extrapolation of stresses.

ない。

- (8) 歪硬化が起こる場合にはある座標 (s_1, s_2) についての降伏応力は要素内で一定とする。

3.5 片持ち梁の弾塑性解析 ASI法の効果を確認するため先端に集中荷重を受ける片持ち梁の解析を行う。表1に諸元を示す。変位増分法を用いる。図7に結果を示す。図中の TL-C は積分点をシフトしない場合 (以下通常法)、TL-A は ASI 法を示す。ただし、次節に示す要素と区別するために TL を付けている。垂直変位が約 0.5m 以下ならば ASI 法は良好な結果を示し 1 要素であっても 20 要素の通常法の結果にほぼ一致している。これが 2 節の証明の適用範囲であるといえる。しかし、変位がそれ以上になると強いロッキングが生じて、通常法よりも解の精度が低下する。また、細かく要素分割しても 20 要素の通常法の結果に収束しない。

4. 形状関数の再定義を伴う退化型チモシェンコ梁要素への ASI 法の適用⁽¹⁰⁾

4.1 ASI 法適用時の形状関数再定義の必要性 Dvorkin 等の梁要素に ASI 法を組み込むと、回転量が増加するにつれて強いロッキングが生じる原因として、この要素は梁の曲率を考慮している点が挙げられる。つまり、たとえ初期形状が直線であっても、曲げ変形が生じれば節点におけるディレクターは中立軸に直交しなくなる。2 節に示したように線形チモシェンコ梁と RBSPM の等価性は直線梁に対するものなので、変形が進むにつれてこの等価性は成立しなくなる。

そこで、各増分ステップの最初にディレクターが中

Table 1: Material properties and dimensions of the cantilever

Young's modulus E	206 GPa
Strain hardening parameter H'	$E/2100$
Yield stress σ_y	294 MPa
Dimensions	Circular section $L=2.0\text{m}$, Diameter=70mm

Fig. 7: The effect of the ASI technique applied to Dvorkin's element; elastic-plastic analysis of a cantilever; load vs. displacement at the tip.

立軸に直交するように再定義し、それに基づいて形状関数も再定義する。これにより、変形後の形状は直線梁によって逐次近似され、各々の増分ステップにおいて2節に示した等価性が成立する。

4.2 形状関数の再定義 初期配置ではディレクターは互いに直交しているものとする。更に図8に示すように各増分ステップの最初にディレクターを中立軸に直交するように再定義する。図8は説明のため二次元としている。再定義されたディレクターには $\cdot$ を付けて再定義前のものと区別する。新しいディレクターの定義の仕方は一通りではないが、次のような方法を用いる。

最初に現時刻の中立軸の向きに $\cdot\hat{\mathbf{V}}_1^*$ を定義しておく。次に図8を参考に $\cdot\hat{\mathbf{V}}_2^*$ を次のように更新する。

$$\cdot\hat{\mathbf{V}}_2^* = \cdot\hat{\mathbf{V}}_2^* - (\cdot\hat{\mathbf{V}}_1^* \cdot \cdot\hat{\mathbf{V}}_2^*) \cdot\hat{\mathbf{V}}_1^* \quad (28)$$

振りによる変形がある場合にはふたつの節点のディレクターは同一平面上にないため、次のように平均的なベクトルを求める。

$$\cdot\hat{\mathbf{V}}_2^* = \frac{\cdot\hat{\mathbf{V}}_2^* + \cdot\hat{\mathbf{V}}_2^*}{|\cdot\hat{\mathbf{V}}_2^* + \cdot\hat{\mathbf{V}}_2^*|} \quad (29)$$

梁幅が変化しないように正規化している。次に $\cdot\hat{\mathbf{V}}_1^*$ を次式により定義する。

$$\cdot\hat{\mathbf{V}}_1^* = \cdot\hat{\mathbf{V}}_1^* \times \cdot\hat{\mathbf{V}}_2^* \quad (30)$$

以上により時刻 t における要素形状は次式のようになる。

$$\cdot\mathbf{x}(s^1, s^2, s^3) = \sum_{n=1}^3 N^n(s^i) \left(\cdot\mathbf{X}^n + \cdot\mathbf{U}^n + \frac{a^n}{2} s^{j^*} \cdot\hat{\mathbf{V}}_2^* + \frac{b^n}{2} s^{j^*} \cdot\hat{\mathbf{V}}_3^* \right) \quad (31)$$

4.3 埋込座標系の再定義と応力変換 形状関数を更新すると時刻0を基準配置とする埋込座標系を定義することが困難になる。そこで、式(31)を用いて時刻 t における埋込座標系の基底ベクトルを次のように定義する。

$$\cdot\mathbf{G}_i = \frac{\partial \cdot\mathbf{x}}{\partial s^i} \quad (32)$$

左辺の添字 i は時刻 t において定義したことを示す。新たな埋込座標系を定義すると、時刻0を基準配置としたGreen-Lagrange 歪テンソルは簡単に表記できない。そこで、現配置を基準配置とした updated Lagrange 法を用いる。すなわち、次のような時刻 t を基準配置とするGreen-Lagrange 歪テンソルにより変形を記述する。

$$\cdot\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\cdot\cdot\mathbf{g}_i \cdot \cdot\mathbf{g}_j - \cdot\mathbf{g}_i \cdot \cdot\mathbf{g}_j) \cdot\mathbf{G}_i \otimes \cdot\mathbf{G}_j \quad (33)$$

また、時刻 τ から $\tau + \Delta\tau$ への増分は

$$\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\cdot\cdot\mathbf{g}_i \cdot \cdot\mathbf{g}_j - \cdot\mathbf{g}_i \cdot \cdot\mathbf{g}_j) \cdot\mathbf{G}_i \otimes \cdot\mathbf{G}_j \quad (34)$$

となる。なお、 $\cdot\mathbf{g}_i$ は時刻 t において定義した埋込座標系の時刻 τ における基底ベクトルを示す。

updated Lagrange法では、第二Piola-Kirchhoff応力テンソルのCauchy 応力テンソルへの変換が必要である。ところで3.3節と同様に、大変位・大回転が生じて歪

が微小であると仮定すれば、近似的な共回転系を考えることができる。この場合、剛体回転が支配的なので、

$$\cdot\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{R}^t = \cdot\mathbf{S} \quad (35)$$

のような近似的な関係が成立する(文献16)の6.3.1節参照)。ここに $\cdot\mathbf{R}$ は積分点における剛体回転テンソルを、 $\cdot\mathbf{T}$ は時刻 τ におけるCauchy応力テンソルを、 $\cdot\mathbf{S}$ は時刻 t を基準配置とした時刻 τ における第二Piola-Kirchhoff 応力テンソルをそれぞれ表す。ところで、せん断変形が小さければ積分点における断面と中立軸の直交性が保たれるので、式(32)で再定義した埋込座標系の基底ベクトルは時刻 t (前ステップ)で定義した埋込座標系の基底ベクトルを $\cdot\mathbf{R}$ により回転させたものにほぼ一致し、

$$\cdot\mathbf{G}_i \approx \cdot\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{G}_i \quad (36)$$

となる。式(35)、(36)が成立する時には

$$\cdot\mathbf{T}^t \approx \cdot\mathbf{S}^t \quad (37)$$

となり、単に成分を受け渡すだけで応力は変換される。ただし、 $\cdot\mathbf{T}^t$ と $\cdot\mathbf{S}^t$ はそれぞれ異なる基底ベクトルの成分であることに注意する。なお、本節に示すような形状関数の再定義を行わず、時刻0において定義した埋込座標系を変更しない場合には、式(37)に相当する式は

$$\cdot\mathbf{T}^t = \frac{1}{J} \cdot\mathbf{J} \cdot \mathbf{S}^t \quad (38)$$

となる。ここに $\cdot\mathbf{J}$ は体積変化率であり歪が微小なら $\cdot\mathbf{J} \approx 1$ なので、式(38)は式(37)に一致する。ただし、式(38)は厚肉の梁でせん断変形が大きい場合にも成立するのに対し、式(37)は式(36)に基づくため、せん断変形があまり大きい場合には成立しない。従って、本節に示す要素は細長い梁にのみ適用できる。

式(37)を用いる場合、Dvorkin等の要素のプログラムに、ディレクターの更新および更新された基準配置に対する埋込座標系の基底ベクトルの計算を行うサブルーチンを追加するだけで本節に示す要素のプログラムとなる。その他の部分の修正は全く必要ない。野口、久田¹⁷⁾は埋込座標系の利用によるtotal Lagrange法およびupdated Lagrange法のプログラミングの同一性を指摘しているが、本節に示した形状関数の再定義を行っ

Fig. 8: Redefining interpolation function.

でもこの同一性は失われない。

なお、本節で重要なのはディレクターの再定義であり、updated Lagrange法を用いることは本質的なことではない。文献 12), 16), 17) に述べられているように、退化型要素に単に updated Lagrange 法を適用しても total Lagrange 法と等価であるので、問題は解決しない。

4.4 本節の梁要素と既往の梁要素の関係 幾何学的非線形性を考慮した梁要素については多くの研究例がある。その中で一般的なものに、共回転系を用いる方法 (corotational method、文献 14) 等) あるいは要素座標系の更新と updated Lagrange 法を併用する方法 (3) 等) がある。後者で用いられる要素座標系は共回転系の一種であり、両者の違いはほとんどない。

これらの方法では幾何学的非線形性について近似的な基礎式を適用しても良好な結果が得られるため、厳密な基礎式が複雑となる断面力法においてしばしば用いられる。共回転系あるいは要素座標系の定義の仕方は一通りではないが、もっとも簡単なのは梁要素のふたつの節点を結ぶベクトルとそれに直交するベクトルを基底とする座標系を用いる方法である。この座標系は要素と共に剛体回転するので、この剛体回転が変形勾配の極分解により得られる剛体回転と一致すると仮定できる。

共回転系あるいは要素座標系において直線梁に対する基礎式を用いれば変形後の曲率を無視したことになり、本節に示したようにディレクターを常に中立軸と直交するように再定義することと同等となる。結局、変形後の形状を直線梁により近似している要素であれば、ASI 法を適用しても大変位・大回転問題を扱えるといえる。都井等がこれまでに ASI 法を適用した要素の中で、要素座標系の更新を行っている要素^{3), 4), 7)}では、大回転問題に対しても良い結果が得られている。

これに対して、退化型要素のようなアイソパラメトリック要素では、変形後の形状を厳密に記述することが容易であるため、変形後の曲率が考慮される。また、共回転系を用いた要素であっても共回転系の定義の仕方によっては変形後の曲率を考慮できる。このような要素へ ASI 法を適用する場合には注意が必要である。

4.5 本節の梁要素の性能の検証 本節に示した梁要素に ASI 法を組み込む前に、通常の有限要素としての性能を検証しておく。図 9 は大回転問題のベンチマークテストとして一般的な板のロールアップの解析 (文献 18) 等) である。モーメントは理論解で無次元化している。Dvorkin 等の要素では多少曲げモーメントが小さくなっている。ディレクターが中立軸に対して傾くことにより積分点における梁幅が少し減少するためである。これは要素分割を細かくすれば解消される。形状関数を

再定義した場合には、ディレクターを正規化しているため梁幅の減少はなく、理論解にほぼ一致している。

図 10 は 3.5 節と同条件の片持ち梁の弾塑性解析である。図中の MUL は本節の梁要素を示す。変形が固定端の要素に集中するため、ロールアップの例題にみられた梁幅の減少がより顕著に解に影響している。

以上のようなふたつの要素の差異は通常は問題にならず、特定の要素に変形が集中しなければ両者はほとんど同一の解を与える。これらの例題の目的は Dvorkin 等の要素の欠点を示すことではなく、通常の使用において両者の差異がほとんどないことを示すことにある。なお、ディレクター場の内挿については、文献 18) の 4 節等が詳しい。

Fig. 9 : Comparison between Dvorkin's element and the presented element ; the roll up of an elastic cantilever (Simo et al. 17)).

Fig. 10 : Comparison between Dvorkin's element and the presented element ; elastic-plastic analysis of a cantilever .

Fig. 11 : The effect of the ASI technique applied to the presented element (interpolation functions are redefined) ; elastic-plastic analysis of a cantilever ; load vs. displacement at the tip.

図11は本節に示した梁要素にASI法を適用し、3.5節と同条件の片持ち梁を解析した場合の結果である。以下に通常法とは本節の梁要素にASI法を適用しない場合を示す(表3も同様)。1要素と20要素の結果はほとんど一致している。また、1要素の結果は固定部に塑性ヒンジ(円断面の全塑性モーメントを使用)を持つ剛体棒に対する理論解に完全に一致することを確認した。従って、20要素と1要素の結果の差は弾性解の精度の差であるといえる。

20要素では通常法とASI法の結果は一致している。すなわち、本要素ではASI法を用いても通常の有限要素法と同様に解は収束し、実用的な要素の必要条件を満たしている。ただし、文献9)にも示すように、歪硬化を考慮する場合には、積分点のシフトによる弾性解の精度の低下により降伏関数が正しく更新されないため注意が必要である。例えば、本節の片持ち梁の例題では、歪硬化率が大いだと耐力が低めに評価される。

5. 立体骨組構造の崩壊解析

4節の要素の応用例として、図12に示すような三階建の立体ラーメン建築の崩壊解析を行う。屋上階の端に斜めの水平強制変位を変位増分法により与える。一階の柱は全て地面に固定する。表2に構造諸元を示す。表3に解析モデルを示す。解析モデル名、解析法および柱と梁の要素分割数を示している。各モデルの自由度はモデル2cと2aが468、モデル10aが3060、モデル20cが9900である。

図13～16に変形図を示す。図17に載荷点における二方向の荷重変位曲線を示す。荷重は一度下がった後再び上昇している。これは三階部分が完全に崩壊したためである。モデル2cの結果は他のモデルに比べて荷重がかなり高い。モデル2a、20c、10aの結果はほぼ一致している。

変位2mにおける変形図を比較すると図14(モデル2a)と図16(モデル20c)は三階部分に変形が集中しているのに対し、図15(モデル2c)では塑性ヒンジ位置が正確に表現できないため三階の剛性が高すぎて、二階もかなり変形している。

6. 結論

本論文では大変位、大回転を考慮したDvorkin等の連続体退化型要素へASI法を適用した。退化型要素のディレクターを変形後にも中立軸に直交するように修正すれば、大変位・大回転問題に対してもASI法は適用可能である。つまり、(1)塑性ヒンジ周りの剛体回転

Table 2 : Material properties and dimensions of the 3D portal frame

Young's modulus	206 GPa
Strain hardening param.	0.1 GPa
Yield stress	294 Mpa
Cross section	Circular section; Diameter=200mm

Table 3 : Models for the 3D portal frame

model	method	number of subdivisions [column]-[beam]
2c	conventional	2-2
2a	ASI	2-2
20c	conventional	20-40
10a	ASI	10-10

Fig. 12 Dimensions of the 3D portal frame.

Fig. 13 Deformed configuration. (model 2a, displacement=0.8m)

Fig. 14 Deformed configuration. (model 2a, displacement=2.0m)

Fig. 15 Deformed configuration. (model 2c, displacement=2.0m)

Fig. 16 Deformed configuration. (model 20c, displacement=2.0m)

Fig. 17 Load versus displacement of the 3D portal frame.

を正確に表現できる、(2) 要素分割を細かくすれば ASI 法を使わない通常の方法 (通常法) と同じ解に収束する、(3) 塑性ヒンジが明確に現れないような問題に適用しても、通常法よりも悪い結果とならない (文献 10) 参照)。これらの性質によりこの要素の使用にあたっての制約はほとんどない。ただし、歪硬化率が大きい場合には、積分点のシフトにより弾性解の精度が低下するため降伏関数が正しく評価されないという欠点がある (文献 9) 参照)。また、式 (36) はせん断変形が小さい時に成立するため、あまり厚肉の梁には適用できない。

幾何学的非線形性を考慮した各種の線形チモシェンコ梁要素の中で、変形後形状を直線梁で近似するような要素は、4 節で提案した要素と同じように ASI 法が適用できる。本論文ではこれについての理論的な背景も整理した。同様な考え方により ASI 法を用いた三次梁要素についても大変位、大回転問題に拡張できる。

最後に提案した要素により立体骨組構造の崩壊解析を行った。ラーメン構造では部材の座屈を考慮しなければ、ほとんどの場合に部材接合部において塑性ヒンジが発生する。従って、都井等により行われた終局耐力解析^{2), 6)}と同様に、一部材二要素の要素分割により大変位、大回転を考慮した高精度な崩壊解析が可能となる。更に、もう少し要素数を増やせば、文献 3), 4) で扱われたようなクラッシュ解析にも本要素は適用可能である。

参考文献

- 1) Toi, Y.: Shifted Integration Technique in One-dimensional Plastic Collapse Analysis Using Linear and Cubic Finite Elements, *Int. J. for Num. Meth. in Engin.*, 31 (1991), 1537-1552
- 2) Toi, Y., Isobe, D.: Adaptively Shifted Integration Technique for Finite Element Collapse Analysis of Framed Structures, *Int. J. for Num. Meth. in Engin.*, 36 (1993), 2323-2339
- 3) 都井, 梁: 骨組構造の崩壊シミュレーション (その 1), 日本造船学会論文集, 第 166 号 (1988), 285-294
- 4) 都井, 梁: 骨組構造の崩壊シミュレーション (その 2), 日本造船学会論文集, 第 167 号 (1989), 169-177
- 5) 都井, 磯部: 順応型 Shifted Integration 法による骨組構造の座屈崩壊挙動の有限要素解析, 日本造船学会論文集, 第 174 号 (1993), 469-477
- 6) 都井, 磯部: 順応型 Shifted Integration 法による大規模骨組構造の耐震強度解析, 生産研究, 第 46 巻, 第 10 号 (1994), 5-8
- 7) 磯部, 都井: 順応型 Shifted Integration 法による脆性骨組構造体の動的崩壊挙動の有限要素解析, 日本造船学会論文集, 第 180 号 (1996), 471-478
- 8) 都井, 斉藤: 順応型 Shifted Integration 法による脆性骨組構造体の有限要素崩壊解析, 機論 A, 第 62 巻, 第 604 号 (1996), 153-159
- 9) 宮村, 都井, 土師: ASI 法を用いた退化型チモシェンコ梁要素による免震鋼棒ダンパーの弾塑性解析, 生産研究, 第 49 巻, 第 2 号 (1997), 5-8
- 10) 宮村, 都井, 土師: ASI 法を用いた退化型チモシェンコ梁要素の幾何学的非線形解析への適用, 計算工学講演会論文集, Vol. 2 (1997)
- 11) Dvorkin, E. et al.: On a Non-linear Formulation for Curved Timoshenko Beam Elements Considering Large Displacement/Rotation Increments, *Int. J. for Num. Meth. in Engin.*, 26 (1988), 1597-1613
- 12) Bathe, K. J. and Bolourchi, S.: Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures, *Int. J. for Num. Meth. in Engin.*, 14 (1979), 961-986
- 13) Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982
- 14) Belytschko, T. and Hsieh, B. J.: Non-linear Transient Finite Element Analysis with Convected Co-ordinates, *Int. J. for Num. Meth. in Engin.*, 7 (1973), 255-271
- 15) 孟, 大井, 高梨: 鉄骨骨組地震応答解析のための耐力劣化を伴う簡易部材モデル, 日本建築学会構造系論文集, 第 437 号 (1992), 115-124
- 16) 久田, 野口: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, (1995)
- 17) 野口, 久田: 幾何学的非線形問題における total/updated Lagrange 統合形有限要素法定式化, 機論 A, 第 59 巻, 第 559 号 (1993), 332-338
- 18) Simo, J. C., et al.: On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part III, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engin.*, 79 (1990), 21-70
- 19) 宮村, 都井: ASI 法を用いた退化型梁要素による立体骨組構造の崩壊解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 B1 (1997), 377-378