小球押込みによるセラミックスの弾塑性変形解析*

(窒化けい素に対する窒化けい素球押込み；弾塑性応答を仮定した場合)

大 串 浩 司^{*1}, 本 間 恭 二^{*2}, 市 川 昌 弘^{*2}, 岡 部 永 年^{*3}
高 松 徹^{*2}, 松 村 隆^{*2}, 阿 部 豊^{*4}

Elastic/Plastic Deformation Analysis in Ceramics due to Sphere Indentation (Si₃N₄ Sphere Indentation to Si₃N₄ Specimen ; Case of Elastic/Plastic Condition)

Kohji OHGUSHI, Kyoji HOMMA, Masahiro ICHIKAWA, Nagatoshi OKABE,
Tohru TAKAMATSU, Takashi MATSUMURA and Yutaka ABE

Since plastic deformations occur in contact between silicon nitride sphere and plate, the elastic/plastic stress analysis is required to evaluate the residual strength of ceramics, surface of which is damaged due to the sphere indentation. For the purpose of evaluating elastic/plastic sphere indentation damages and residual strength of ceramics, an approximate analysis of elastic/plastic contact deformation in ceramics was carried out. The elastic/plastic internal stresses of the ceramic plate were also analysed by using the finite element method. Reasonable correlation between the maximum residual stress caused at surface in the tangential direction due to sphere indentation and the residual strength was obtained.

Key Words : Ceramics, Contact Problem, Finite Element Method, Residual Strength, Indentation, Sphere, Silicon Nitride

1. 緒 言

小球押込みによるセラミックス表面の損傷を調べることは、これに類似した損傷形態を示す動的な小球衝突損傷⁽¹⁾の基礎を把握するだけでなく、セラミックスを構造部材に用いる際に避けられない他物体との接触問題⁽²⁾⁽³⁾にも関連するため重要である。前報⁽⁴⁾において、HIP 焼結窒化けい素(HIPSi₃N₄)球によるガス圧焼結窒化けい素(GPSi₃N₄)試験片への押込みで小球、試験片ともにある荷重を越えると永久変形(圧痕)を生じることが確認され、小球押込み後の曲げ試験により得られた破断面にはダメージゾーンと呼ばれるほぼ半球状の模様が観察された。この領域内には牧野ら⁽⁵⁾により転位とともに無数の粒内、粒界微視き裂が存在することが確認されているが、一方で圧痕周りに引張りの残留応力が生じることわかっている⁽⁶⁾。このことからダメージゾーンも広い意味での塑性変形域とみなすことができる。ダメージゾーン、ラジアルク

ラック、メジアンクラックなどの弾塑性損傷が生じる場合の残留強度を評価するためには、この塑性変形を考慮した弾塑性応力場の解析が必要である。

一般に圧子を平板に押込んだ場合、平板の接触部近傍は負荷の増加に伴い、①純弾性状態、②弾塑性状態、③完全塑性状態の三つの過程を経る⁽⁷⁾。塑性変形の起こり難いセラミックスでも、ビッカース圧子など先端の鋭い剛体圧子の押込みでは極めて高い接触圧力が生じ、圧子直下の塑性域が著しく発達するため押込み時の応力場を“完全塑性状態”で考えることができるとされている⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

一方先端の鈍い小球を圧子とした場合、押込みを受けるセラミックスの変形挙動はその接触部の曲率半径や押込み荷重、小球と試験片の材質の組合せに依存する。Swain-Hagan⁽¹⁰⁾、Marshall⁽¹¹⁾、Makino ら⁽¹²⁾はいずれも小球を剛体とみなし、“完全塑性状態”を前提とした小球押込み問題の解析を行っているが、前報⁽⁴⁾のHIPSi₃N₄球/GPSi₃N₄試験片の組合せのように小球の弾塑性変形も考慮した場合、接触圧力の緩和により塑性変形の割合が低くなること、試験片が“完全塑性状態”に達する前に小球あるいは試験片が破壊に至ることなどから、過渡的な“弾塑性状態”での変形挙動や応力場の解析が必要になる。

* 原稿受付 1997 年 6 月 20 日。

^{*1} 正員、電気通信大学大学院 (〒182-8585 調布市調布ケ丘1-5-1) [現：計量研究所]。

^{*2} 正員、電気通信大学。

^{*3} 正員、愛媛大学工学部 (〒790-8577 松山市文京町3)。

^{*4} (株)東芝 (〒230-0045 横浜市鶴見区末広町2-4)。

しかし“弾塑性状態”における応力場の解析に関してはその取扱いが極めて困難であるため研究例が少ない。有効な手段として有限要素解析が挙げられる^{(13)~(15)}が、これまでにセラミックスなどの硬脆性材料に対して小球、平板をともに弾塑性体とし、かつ両者の加工硬化を考慮した解析はほとんど行われていない。これは硬脆性材料の塑性パラメータを決定することが困難で、解析条件としての応力-ひずみ関係を与えることができないのが主な理由と考えられる⁽¹⁶⁾。

そこで本研究では窒化けい素球押込みにより窒化けい素試験片に生じる弾塑性損傷、および損傷発生後の残留強度の評価を行うことを目的として、小球、試験片をともに弾塑性体とみなした場合の押込み問題について検討を行った。まず Adler の弾塑性変形近似解析⁽¹⁷⁾を補正した本近似解析により GPSi₃N₄ と HIP Si₃N₄ の塑性パラメータを求めた。次にこれらの塑性パラメータを組み込んだ有限要素解析により“弾塑性状態”における応力場を求め、残留強度との関係について調べた。

2. 弾塑性変形近似解析

2.1 Adler の解析の補正 小球押込みにおける押込み荷重と接触円半径、平均圧力との関係について Adler⁽¹⁷⁾は小球、平板が弾塑性変形を示す場合の関係式を弾性接触理論とメイヤー硬さの定義式を組合せることにより導出した(付録参照)。しかし Adler の解析では荷重が零でなければ極めて低い荷重でも塑性変形が生じることになる[付録の式(18)]。この塑性変形を大きく見積もることの誤差は2.2節で述べるようにセラミックスの塑性パラメータに影響を及ぼす。そこで本研究では初期の弾性変形を考慮し、Adler の式に材料が降伏を開始するときの平均圧力 p_y を導入し、以下に述べるように修正した。

小球押込みにより生じる小球および平板の変形状態

Fig. 1 Schematic cross section of a plate by elastic/plastic indentation

を図1に示す。圧痕半径 a 、総圧痕深さ w 、総隆起高さ(接触円境界における圧痕底部からの高さ) h を、平板と小球の各値にそれぞれ添字 $i=1, 2$ をつけて表すと本近似解析では以下のように表される。

$$\frac{a}{2R} = \left(\frac{C_{11}}{g_1} + \frac{C_{12}}{g_2} \right) p_m + \left(\frac{p_m - p_{y1}}{K_{M1}} \right)^{1/n_1} + \left(\frac{p_m - p_{y2}}{K_{M2}} \right)^{1/n_2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$w = w_1 + w_2 = (w_{e1} + w_{e2}) + w_{p1} + w_{p2} \\ = \left(\frac{C_{21}}{g_1} + \frac{C_{22}}{g_2} \right) p_m a + \frac{a}{B_{p1}} \left(\frac{p_m - p_{y1}}{K_{M1}} \right)^{1/n_1} + \frac{a}{B_{p2}} \left(\frac{p_m - p_{y2}}{K_{M2}} \right)^{1/n_2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$h = h_1 + h_2 = (h_{e1} + h_{e2}) + h_{p1} + h_{p2} \\ = \left(\frac{C_{11}}{g_1} + \frac{C_{12}}{g_2} \right) p_m a + a \left(\frac{p_m - p_{y1}}{K_{M1}} \right)^{1/n_1} + a \left(\frac{p_m - p_{y2}}{K_{M2}} \right)^{1/n_2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

添字 e と p はそれぞれ弾性成分と塑性成分を表している。 $p_m = P/(\pi a^2)$ は平均圧力、 R は小球半径、 $g_i = \pi E_i/(1-\nu_i^2)$ は弾性定数、 n_i および K_{Mi} はメイヤー硬さに関する塑性パラメータである。 p_{yi} は材料が降伏を開始するときの平均圧力である [$p_{yi}=0$ とおくと式(1)~(3)は Adler の式(18)と同じ形になる]。 C_{1i} 、 C_{2i} および $B_{pi} = h_{pi}/w_{pi}$ は n_i の関数である⁽¹⁸⁾。しかし B_{pi} は実際には n_i のみの関数ではないことが Adler の実験⁽¹⁷⁾でわかっている(a/R に依存する)ので、本研究では4.1節で述べる方法により実験的に求めた。

2.2 塑性パラメータの決定方法 GPSi₃N₄ および HIPSi₃N₄ の塑性パラメータを求めるために先端曲率半径 0.2 mm のダイヤモンド円すい圧子(以下では $\phi 0.4$ mm DD 球と呼ぶ)を用いて GPSi₃N₄、HIPSi₃N₄ それぞれの平板試験片に押込み試験を行った(HIPSi₃N₄ については、HIPSi₃N₄ 球に直接押込み試験を行うことは困難なので、組成、焼結方法が全く同じ平板試験片を用意した)。試験片寸法は GPSi₃N₄ が $t9 \times 10 \times 48$ mm、HIPSi₃N₄ が $t3 \times 4 \times 40$ mm である。試験片の押込み面は研削加工層の影響を取り除くためにラッピング/ポリシングによりその表面を 20 μ m 以上除去し、鏡面に仕上げた⁽¹⁹⁾。試験にはビッカース硬さ試験機を用いた。

試験後、接触円半径 a 、残留圧痕深さ w_{p1} 、残留隆起高さ h_{p1} を測定し、 a/R - p_m グラフ上にデータをプロットした。その結果を図2に示す。図2(a)は GPSi₃N₄、図2(b)は HIPSi₃N₄ の $\phi 0.4$ mm DD 球押込み試験結果である。式(1)を用いた非線形の最小二乗近似

によりそれぞれ n_i , K_{Mi} を求めた結果を表 1 に示す。ここでダイヤモンド圧子は完全弾性体とみなすことができるので、小球の塑性変形項である式(1)中の右辺第 3 項は零になる。平板の平均圧力 p_{yi} は、前報⁽⁴⁾ の GPSi₃N₄ への HIPSi₃N₄ 球押込みで両者に塑性変形が認められた最も低い荷重(約 1.2 kN)から Hertz 理論により算出し、ともに $p_{yi}=7.92$ GPa とした。

表 1 には比較のために Adler の式をそのまま用いた場合の計算結果を併せて示した。降伏応力の導入によりパラメータが大きく変わることがわかる。図 2 の実線は表 1 の本近似解析により得られたパラメータを用いて描いた回帰曲線である。

3. 有限要素法による弾塑性応力解析

小球、平板がともに弾塑性体である場合の小球押込み時の応力解析を有限要素法(FEM)により行った。FEM 解析には汎用プログラムの MARC-K 6 を用いた。軸対称問題であるので、前報⁽⁴⁾ の実験条件に合わせ、半径 9 mm、高さ 9 mm の GPSi₃N₄ の円筒(平板)、ならびに直径 3.969 mm の HIPSi₃N₄ 球を図 3 のようにモデル化した。接触部近傍にある最小要素のセグメント幅は 6.25 μ m である。境界条件は図 3(a)に示すとおりである。要素には 4 節点一次要素を用いた。モデルの節点数は 2 564、要素数は 2 333 である。また接触面における摩擦はないものとした。

3・1 弾性解析 モデルの妥当性を調べるためにまず弾性解析を行った。平板、小球はともに弾性等方

体とし、そのヤング率およびポアソン比はそれぞれ $E_1=320$ GPa, $E_2=304$ GPa, $\nu_1=0.27$, $\nu_2=0.28$ とした。

接触解析では物体の外表面を構成する節点とセグメントがある距離 g_{err} 以下まで接近したときに接触したと判定し、接触面での法線方向変位が同一であるという拘束条件を新たに加えることにより接触を処理した(本研究では g_{err} を 10^{-5} mm とした)。荷重増分回数は 160 回とし、最大押込み荷重 $P_{max}=14.17$ kN まで負荷を行った後、完全に除荷されるまで解析を行った。

(a) Boundary condition

(b) Near the contact region

Fig. 3 Finite element model of contact between sphere and plate

(a) $\phi 0.4$ mmDD/GPSi₃N₄ (b) $\phi 0.4$ mmDD/HIPSi₃N₄

Fig. 2 Relationship between relative contact radius and average contact pressure

(a) Along r -axis (b) Along z -axis

Fig. 4 FEM results of stress distribution in the elastic analysis

弾性解析により得られた応力分布を図4に示す。図4(a)は平板表面、図4(b)は中心軸上の各応力分布である。 r, z , ならびに各応力成分はHertzの理論接触円半径 a_H 、最大接触圧力 p_0 でそれぞれ無次元化した。実線はHertz-Huberの応力場(理論値)を示している。これよりFEM解析値は理論値と良い一致を示していることがわかる。よって解析モデルの妥当性が確認された。

3.2 弾塑性解析 次に本近似解析により得られた表1の塑性パラメータを組込んだ弾塑性解析を行った。平板、小球とはともに等方弾塑性体とし、Misesの降伏条件および等方硬化則を用いた。平板、小球の応力-ひずみ関係は次式で与えた。

$$\varepsilon = \begin{cases} \sigma/E_i & (\sigma < \sigma_{\text{yield},i}) \\ \sigma/E_i + \{(\sigma - \sigma_{\text{yield},i})/\kappa_i\}^{1/n_i} & (\sigma \geq \sigma_{\text{yield},i}) \end{cases} \quad (i=1, 2) \dots\dots\dots (4)$$

ここで $\kappa_i = K_{Mi}/2.8 \cdot 0.4^{n_i}$ である[付録の式(9)参照]。 n_i, K_{Mi} は表1の塑性パラメータである。平板、小球ともに圧痕の形成が認められた最も低い荷重 $P \approx 1.2 \text{ kN}$ よりHertz-Huberの応力場から求まるMisesの相当応力の最大値を計算し、GPSi₃N₄では

$\sigma_{\text{yield},1} = 7.53 \text{ GPa}$, HIPSi₃N₄では $\sigma_{\text{yield},2} = 7.48 \text{ GPa}$ とした。

なおMARC-K6の弾塑性解析では、塑性ひずみに対して降伏曲面が凸であることと相当塑性ひずみの降伏関数に対する垂直性の条件から流れ則を導入し、非圧縮条件を考慮した応力-ひずみ関係から次式の応力-ひずみマトリックス $[D^{e-p}]$ を求め、剛性マトリックスの計算に使用している。

$$[D^{e-p}] = m[D^e] - (1-m) \frac{[D^e] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] [D^e]}{H + \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T [D^e] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$[D^e]$ は弾性成分-ひずみマトリックス、 f は降伏関数、 m はインクリメント増分量の弾性応答の比率、 H は加工硬化係数である。

荷重条件としては、表2に示す7種類の条件ですべて完全除荷まで解析を行った。表中の a_H はHertz理論により計算した場合の接触円半径である。その他メッシュ分割や変位境界条件、接触条件等は弾性解析とすべて同じものを使用した。

解析No.1~7により得られた応力分布の例を図5(a)~(c)に示す。(a)、(b)はそれぞれ σ_z, σ_θ の平板表面の分布、(c)は σ_θ の中心軸上の分布を表す。図中の1~7の番号は注釈の荷重 P における応力分布であることを示している(表2に対応)。図5(a)の σ_z は接触圧力分布に相当するが、荷重の増大とともにだ円形状から方形状に近づいていくことがわかる。図5(b)の σ_θ については接触円境界(各曲線の屈折点)近傍で圧縮応力が小さくなっていくようすがわかる。“完全塑性状態”を前提とする弾塑性応力解析の代表

Table 2 FEM analysis conditions for elastic/plastic indentation

Analysis No.	Increment times	P_{max} , kN	a_H , μm
No.1	64	0.91	200
No.2	80	1.77	250
No.3	96	3.06	300
No.4	112	4.86	350
No.5	128	7.25	400
No.6	144	10.33	450
No.7	160	14.17	500

Fig. 5 FEM results of elastic/plastic stress distribution during loading cycles
($P [\text{kN}]$: 1: 0.91, 2: 1.77, 3: 3.06, 4: 4.86, 5: 7.25, 6: 10.33, 7: 14.17)

的なモデルである LEM モデル⁽⁸⁾ や介在物モデル⁽⁹⁾ では負荷中に接線方向に最大引張応力が生じるが、本解析の荷重範囲では負荷中に σ_θ が引張応力に転じることはなかった。図 5(c) の σ_θ についてはこの図からだけではわかりにくい、内部の引張応力が塑性域の拡大に伴い大きくなる。接触部下方に生じるメジアンクラックはこの引張応力に起因すると考えられる。

次に完全除荷後の残留応力分布について述べる。前報⁽⁴⁾ の実験において、小球押し込み後の四点曲げ試験でダメージゾーンを起点とした破壊が起こる(ダメージゾーン形破壊)ことを述べた。破断位置、破面のようなから、この場合に残留強度を支配する因子は図 6 に示すような短冊状試験片長手方向に生じる引張残留応力と考えられた。そこで表面(r 軸上)の残留応力 $\sigma_\theta (= \sigma_\theta^s)$ の分布を調べた結果を図 7 に示す。図中の 2~7 の番号は注釈の荷重 $P_{\max}$ を負荷した後の残留応力であることを示している。これより負荷中には生じなかった引張応力が完全除荷後に現れること、その大きさは $P_{\max}$ が大きいほど大きくなるのがわかる。この傾向は Hardy ら⁽¹³⁾ の剛体球押し込みの FEM 解析結果と一致した。また村上ら⁽¹⁶⁾ はビッカース圧子押し込み時の内部応力場の FEM 解析により、鋭い圧子の

Fig. 6 Position and direction of residual stress generated by indentation in the strip specimen

Fig. 7 FEM results of residual stress distribution of σ_θ along r -axis ($P_{\max}$ [kN]: 2: 1.77, 3: 3.06, 4: 4.86, 5: 7.25, 6: 10.33, 7: 14.17)

押し込みでも接線方向の応力は負荷中には圧縮であり、除荷中に引張りに転じることを示している。これより、圧子押し込み時のラジアル/メジアンクラック発生に関する応力拡大係数 K_I の計算に、負荷中に接線方向に引張応力が生じるような弾塑性応力解析モデル⁽⁸⁾⁽⁹⁾ を用いることは問題があるのではないかと考えられる。

4. 考 察

4.1 Adler の解の補正式の有用性 GPSi₃N₄ を平板, HIPSi₃N₄ を小球とし、本近似解析により求められた表 1 の塑性パラメータを用いて、荷重 P と接触円半径 a 、残留圧痕深さ w_{pi} との関係を調べた。まず 2.2 節の実験で得られた $B_{p1} = h_{p1}/w_{p1}$ のデータを $a/R - B_{p1}$ グラフ上にプロットし、線形回帰から GPSi₃N₄, HIPSi₃N₄ それぞれについて次の近似式を求めた。

$$\begin{aligned} B_{p1} &= 1.0934 + 0.4018(a/R) \quad (\text{for GPSi}_3\text{N}_4) \\ B_{p1} &= 1.0787 + 0.4476(a/R) \quad (\text{for HIPSi}_3\text{N}_4) \\ &\dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

HIPSi₃N₄ 平板に対して得られた n_i, K_{Mi}, B_{pi} を 1 か

Fig. 8 Contact radii computed by FEM, Adler's, and approximate analyses (compared with test result⁽⁴⁾)

Fig. 9 Residual depths computed by FEM, Adler's, and approximate analyses (compared with test result⁽⁴⁾)

ら2に置換し、式(1)により a を、式(6)を式(2)に代入して w_{p1} , w_{p2} をそれぞれ計算した。

接触円半径 a の計算結果を図8に長破線で示す。比較のために実験値⁽⁴⁾ を○印で、Hertz 理論値 a_H を実線で、FEM による弾塑性解析結果を破線で、また Adler の式をそのまま用いた計算結果を点線で示す。図8より本近似解析値が FEM 解析値ならびに実験値と良い一致を示していることがわかる。Adler の式を用いると過大評価になる。

次に完全除荷後の圧痕深さ w_{pi} を求めた結果を図9に示す。横軸は最大荷重 P_{max} である。比較のために実験結果⁽⁴⁾, FEM 解析結果, Adler の式による結果も併せて示す。図9(a)が GPSi₃N₄ 試験片, 図9(b)が HIPSi₃N₄ 球の結果である。これより本近似解析値, FEM 解析値が実験値に近い値を示すことがわかる。図8と同様に Adler の式をそのまま用いると過大評価になる。以上により FEM 解析の妥当性ならびに補正による本近似解析の有用性が確認できた。

なお、以上の弾塑性変形解析では、前報⁽⁴⁾ の実験で試験片表面に観察されたコーンクラックの影響を考慮していない。文献(4)の実験の範囲内では、コーンクラックの進展量が小さいこと、またダメージゾーンの生成位置はコーンクラックの発生位置と離れていることから、クラックの存在の影響は小さいと考えられる。しかしダメージゾーンやコーンクラックがさらに成長した場合の相互干渉の問題については今後検討する必要がある。

4・2 残留強度評価 FEM 解析により得られた表面の最大引張残留応力 $\sigma_{b,max}^r$ を GPSi₃N₄ 平滑試験片(小球押込みを行っていない試験片)の曲げ強度 $\sigma_{b,max}$ から差し引くことにより、ダメージゾーン形破壊を起こす場合の残留強度 σ_{res} の推定を行った。その結果を図10に示す。比較のためにダメージゾーン

Fig. 10 Residual strength of damage zone type fracture calculated using FEM result (compared with test result⁽⁴⁾)

形破壊を起こした実験値⁽⁴⁾ を併せて示す。水平線は $\sigma_{b,max}$ である。これより推定値は実験値とおおむね一致することがわかる。これにより $\sigma_{b,max}^r$ と σ_{res} との間の密接な関連性が示唆された。今後はダメージゾーンの生成プロセスを明確にすること、残留応力分布の解析手法を確立することにより、さらに定量的な評価が行えるものと考えられる。

5. 結 論

本研究では HIP 焼結窒化けい素(HIPSi₃N₄)球押込みによりガス圧焼結窒化けい素(GPSi₃N₄)試験片に生じる弾塑性状態での損傷、および損傷発生後の残留強度の評価を行うことを目的として、小球、試験片とともに弾塑性体とみなした場合の押込み問題について検討を行った。その結果以下の結論が得られた。

(1) Adler の解析に降伏応力を導入して補正を行った結果、押込み荷重と接触円半径、平均圧力との関係を表す本近似解析結果は実験結果と良い一致を示した。

(2) GPSi₃N₄ と HIPSi₃N₄ の塑性パラメータを材料特性として組込んだ FEM 解析を行った結果、荷重-接触円半径、最大荷重-残留圧痕深さの関係は実験結果と良い一致を示した。

(3) FEM 解析により得られた表面接線方向の最大引張残留応力 $\sigma_{b,max}^r$ を GPSi₃N₄ 平滑試験片の平均曲げ強度 σ_{res} から差し引くことによりダメージゾーン形破壊を示す場合の残留強度を推定した結果、推定値は実験値とおおむね一致し、これにより $\sigma_{b,max}^r$ と σ_{res} との間の密接な関連性が示唆された。

本研究は文部省科学研究費補助金(特別研究員奨励費)により行われたことを記し、謝意を表す。

付録 Adler の弾塑性押込み理論

小球押込みにより生じる平板の変形状態として圧痕深さ w 、隆起高さ h が定義される(本文図1の w_1 , h_1 に相当)。また金属材料に対する押込みについて、材料の応力-ひずみ関係が指数硬化則に従う場合、次のメイヤー硬さ H_m が定義される。

$$H_m = \frac{P}{\pi a^2} = K_M \left(\frac{a}{2R} \right)^n \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで半径 R の小球は剛体とみなされる。O'Neil⁽²⁰⁾ は指数硬化則に従う材料について応力-ひずみ関係が指数 n と $\sigma = \kappa \epsilon^n$ という関係で表されることを示した。 κ は材料定数である。Tabor⁽²¹⁾ はひずみ ϵ と a , R との関係が $\epsilon = 0.2a/R$ のようになることを見出した。Tabor はまた平均圧力 p_m が降伏応力 σ_{yield} の

2.8 倍になることを示した。これより次式が得られる。

$$p_m = 2.8\kappa \left(0.2 \frac{a}{R}\right) \dots\dots\dots (8)$$

式(7)と式(8)より K_M と κ との関係が,

$$K_M = 2.8 \cdot 0.4^n \kappa \dots\dots\dots (9)$$

のようになる。

一方 Matthews⁽²²⁾ は接触圧力分布 $p(r)$ が n によって次式のように表されることを示した。

$$p(r) = \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{s/2} p_m \dots\dots\dots (10)$$

Matthews は $s=n$ として扱っているが、その後 Hill⁽¹⁸⁾ の解析によって B , n および s の関係が次のようになることがわった。

$$B = \left(\frac{2-n}{4+n}\right) \left(2 + \frac{s}{2}\right) \dots\dots\dots (11)$$

式(7)~(11)は“完全塑性状態”で弾性変形が無視できる場合に成り立つが、これを“弾塑性状態”の関係式の導出に利用するために Adler は次の仮定を行った。

(1) 圧痕深さ w と隆起高さ h はそれぞれ次式のように弾性成分と塑性成分の和で表される。

$$w = w_e + w_p \dots\dots\dots (12\cdot a)$$

$$h = h_e + h_p \dots\dots\dots (12\cdot b)$$

(2) 接触圧力分布は剛性の低い塑性成分に対する関係式(10)に従う。

(3) 塑性成分に対する応力 ひずみ関係は上述の指数硬化則に従う。

まず幾何学的な形状関係から $a/(2R) \simeq h/a$ が得られる。また仮定(3)より式(7)が成り立つから、

$$p_m = K_M \left(\frac{a}{2R_p}\right)^n = K_M \left(\frac{h_p}{a}\right)^n \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。さらに仮定(2)より式(11)の B の代わりに $B_p = h_p/w_p$ を用いることができる。

弾性成分 w_e , h_e については、半無限平板表面に垂直力が作用する場合の任意点の深さ方向変位を求める弾性理論⁽²³⁾ から、 w_e が次式で計算できる。

$$w_e = \frac{1}{g} \int_0^{2\pi} \int_0^a p(r) dr d\theta \dots\dots\dots (14)$$

式(14)に式(10), (11)を代入することにより n , B_p に対する w_e を求めることができる。 h_e についても同様に求めることができ、最終的に h_e と w_e は次のような形で表される。

$$h_e = \frac{C_1 p_m a}{g} \dots\dots\dots (15\cdot a)$$

$$w_e = \frac{C_2 p_m a}{g} \dots\dots\dots (15\cdot b)$$

C_1 , C_2 は n の関数となる。

次に、式(15・a)と残留隆起高さ $h_p = h - h_e$ を式(13)に代入することにより次式が得られる。

$$p_m = K_M \left(\frac{a}{2R} - \frac{C_1 p_m}{g}\right)^n \dots\dots\dots (16)$$

材料定数 E , ν , n , K_M がわかれば式(16)により p_m を求めることができる。 a , w , h も式(13), (15), (16)により同様に求めることができる。

以上では小球は剛体とみなされており、その変形が考慮されていない。平板、小球をとともに弾塑性体として考えた場合は次のようになる。それぞれ添字に 1, 2 をつけて表すと、まず総高さ h , 総深さ w が

$$h = h_{e1} + h_{e2} + h_{p1} + h_{p2} \dots\dots\dots (17\cdot a)$$

$$w = w_{e1} + w_{e2} + w_{p1} + w_{p2} \dots\dots\dots (17\cdot b)$$

となる。最終的に Adler は a , w , h のそれぞれを以下のように表した。

$$\frac{a}{2R} = \left(\frac{C_{11}}{g_1} + \frac{C_{12}}{g_2}\right) p_m + \left(\frac{p_m}{K_{M1}}\right)^{1/n_1} + \left(\frac{p_m}{K_{M2}}\right)^{1/n_2} \dots\dots\dots (18\cdot a)$$

$$w = \left(\frac{C_{21}}{g_1} + \frac{C_{22}}{g_2}\right) p_m a + \frac{a}{B_{p1}} \left(\frac{p_m}{K_{M1}}\right)^{1/n_1} + \frac{a}{B_{p2}} \left(\frac{p_m}{K_{M2}}\right)^{1/n_2} \dots\dots\dots (18\cdot b)$$

$$h = \left(\frac{C_{11}}{g_1} + \frac{C_{12}}{g_2}\right) p_m a + a \left(\frac{p_m}{K_{M1}}\right)^{1/n_1} + a \left(\frac{p_m}{K_{M2}}\right)^{1/n_2} \dots\dots\dots (18\cdot c)$$

文 献

- (1) 例えば, Shockey, D. A., Rowcliffe, D. J., Dao, K. C. and Seaman, L., *J. Am. Ceram. Soc.*, **73** 6(1990), 1613-1619.
- (2) 岡部永年, 機論, **61**-589, A(1995), 1864-1871.
- (3) 太田裕之・町田隆志・宮田寛・寺前哲夫・五代儀剛, 機講論, No. 930-75(1993-11), 9-12.
- (4) 大串浩司・ほか6名, 機論, **63**-606, A(1997), 1-7.
- (5) 牧野浩明・和田重孝, セラミックス, **27**-10(1992), 943-947.
- (6) 内山休男・ほか6名, 日本セラミックス協会学術論文誌, **102**-4(1994), 350-354.
- (7) Johnson, K. L., *Contact Mechanics*, (1985), 171-184, Cambridge University Press.
- (8) Lawn, B. R., Evans, A. G. and Marshall, D. B., *J. Am. Ceram. Soc.*, **63** [9-10] (1980), 574-581.
- (9) Tanaka, K., Kitahara, Y., Ichinose, Y. and Iimura, T., *Acta Met.*, **32**(1984), 1719-1729.
- (10) Swain, M. V. and Hagan, J. T., *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **9**(1976), 2201-2214.
- (11) Marshall, D. B., *J. Am. Ceram. Soc.*, **67** [1] (1984), 57-60.
- (12) Makino, H., Kamiya, N. and Wada, S., *Fract. Mech. Ceram.*, **10**(1992), 579-586, Plenum Press.
- (13) Hardy, C., Baronet, C. N. and Tordion, G. V., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**(1971), 451-462.
- (14) 香川博之・市川昌弘・高松徹・桑野博喜, 機論, **60** 570, A(1994), 409-415.
- (15) 村上敬宜・袁路平, 機論, **57** 533, A(1991), 162-169.
- (16) 村上敬宜・松田健次, 機論, **57** 539, A(1991), 1665-1673.
- (17) Adler, T. A., *J. Am. Ceram. Soc.*, **77** 12(1994), 3177

- 3185.
- (18) Hill, R., F. R. S., Storakers, B. and Zdunek, A. B., *Proc. R. Soc. London, A*, **423**(1989), 301-330.
- (19) 市川昌弘・大串浩司, *機論*, **60**-576, A(1994), 1773-1778.
- (20) O'Neil, H., *Proc. Inst. Mech. Eng.*, **151**(1944), 116-130.
- (21) Tabor, D., *The Hardness of Metals*, (1951), 73, Oxford University Press.
- (22) Matthews, J. R., *Acta Met.*, **28**(1980), 311-318.
- (23) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 3rd ed., (1982), 403, McGraw-Hill.
-