飛翔体が中央に衝突する円弧アーチの面内弾塑性変形*

伊藤 智啓^{*1}, 川嶋 紘一郎^{*1}, 橋本 努^{*2}In-Plane Elastic-Plastic Deformation of a Circular Arch
under Central Impact by a Flyer

Toshihiro ITO, Koichiro KAWASHIMA and Tsutomu HASHIMOTO

Dynamic elastic-plastic deformation of pin-ended circular arches has been numerically analyzed with a discrete model composed of rigid bars connected with nonlinear springs. Equations of motion of the discretized arch are solved by the updated Lagrange method. The calculation has been performed for arches impacted by a flyer at the crown and the results are compared with the experimental ones. The temporal change in the deflection at the crown, the deformed shape, strain histories are well estimated by the calculation.

Key Words: Structural Analysis, Buckling, Impact Strength, Plasticity, Arch

1. 緒言

航空機や船舶, 自動車などの輸送機では, 軽量化と同時に, 衝突等の事故にそなえた安全性を重視する設計が求められている。

梁が曲げ剛性により横荷重を支えるのに対し, アーチ状構造物は荷重の大部分を軸力で支えるため, 同一断面積の梁に比べて横荷重に強く, 軽量化が必要な部分に利用されている。また, 降伏後の一定の変形区間でほぼ一定の耐荷能力を保つため衝撃吸収要素としても利用されている。しかし, 過大な負荷を受けた場合に飛び移り座屈を起こすことがあり, これにより著しく耐荷能力が低下するため, 動的座屈条件および座屈後挙動を明らかにすることが望まれている。

Deutsch⁽¹⁾はアーチ形状, 載荷分布形状をパラメータにとり, 系統的に多くの実験を行っている。新家^ら⁽²⁾は弾塑性アーチの終局耐荷力の解析を座屈実験と比較しているが, 座屈後の挙動を扱っていない。Padovan^ら⁽³⁾やBatoz^ら⁽⁴⁾は弾塑性アーチの飛び移り座屈を数値解析しているが, 飛び移り座屈の折に生じる逆負荷塑性を考慮していない。著者^ら⁽⁵⁾は逆負荷塑性を考慮して弾塑性アーチの座屈後挙動を解析し, 実験と比較した。これら従来のアーチの座屈実験や座屈挙動の解析の多くは, 静荷重に対する臨界荷重や座屈挙動を求めたものである。衝突による変形では応力波伝播を考慮する必要があり, アーチ状構造物について静的な挙動だけでなく動的な挙動を明らかにする必要がある。

必要がある。

しかし, アーチの動的な挙動に関する解析や実験の報告は少ない。Stronge^ら⁽⁶⁾は, 衝撃荷重の大きさによる剛塑性曲がりはりの変形モードとヒンジ発生位置の変化を解析的に示した。また, Ishikawa^ら⁽⁷⁾は応力-ひずみ特性が二直線近似で表される鋼管円弧アーチの衝撃荷重による変形を解析し, 衝撃力とたわみの時間変化を示している。Wei^ら⁽⁸⁾⁽⁹⁾は, 剛塑性円弧アーチの衝撃変形を解析し, 飛翔体質量, 衝突速度, 支持条件による最終変形, 塑性ヒンジ発生時期の変化を示した。Kong^ら⁽¹⁰⁾は, 一定の大きさの等分布荷重が作用する半径方向に弾性支持された弾塑性円弧アーチの解析を行い, 変形応答や飛び移り座屈の起こる臨界荷重を示した。しかし, これらのような理想化された荷重と応力-ひずみ関係のもとでの解析だけでは不十分である。Zhao^ら⁽¹¹⁾は固定端アーチの中央に投射物を衝突させる実験を行い, 衝突速度とアーチの変形およびアーチ中央のたわみの時間変化を示している。緩衝材として利用するには, 衝撃力の最大値が小さいことも重要であるが, 衝撃力は測定されていない。

衝撃荷重を受けるアーチ状構造物の動的な挙動や強度の評価には, 動的・大変形・弾塑性問題として解析する必要がある。有限要素法を用いた解析では, 厚み方向の要素毎に異なるひずみ履歴をも考慮する必要があるため, アーチ長手方向だけでなく厚み方向にも要素分割が必要であり, この問題は非常に計算コストの大きな問題である。

そこで, 本論文では両端を回転支持した弾塑性円弧

* 原稿受付 1997年3月18日。

^{*1} 正員, 名古屋工業大学 (〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)。

^{*2} 名古屋工業大学大学院。

Fig.1 Discrete model and notation.

アーチの中央に飛翔体が衝突する問題について、効率的な一次元要素でありながら厚さ方向に異なるひずみ履歴を考慮できる⁽⁸⁾ 剛体-ばねモデル⁽¹²⁾を用いてアーチの衝撃弾塑性変形挙動を数値解析し、その結果を実験と比較する。

2. 解析方法

図 1(a) に示す両端回転支持された弾塑性円弧アーチの中央に飛翔体が衝突する問題を考える。アーチの変形がその軸線を含む平面内に限られる場合を考え、二次元問題として扱う。

解析には、剛体-ばねモデル⁽¹²⁾を用いる。このモデルは、図 1(b) のように節点と、隣接する節点を結ぶ要素とからなり、節点を含む横断面に厚さ方向に分布する非線形ばねの系により隣接する要素は互いに結合されている。変形はこのばね部に集中するものとし、要素の他の部分は剛体と考える。せん断変形を無視した Bernoulli-Euler のはり理論を用いる。個々のばねは伸縮の自由度しか持たないが、複数のばねを要素の厚さ方向に配置することにより、その伸縮の差から断面に軸方向の伸縮と回転の自由度が生じる。個々のばねの応力-ひずみ状態はその位置毎に異なるひずみ履歴に依存する。アーチ厚さ方向のひずみは無視し、質量は節点に集中さ、回転慣性は無視できるものとする。衝撃力は、図 1(b) に示した衝撃点のアーチと飛翔

Fig.2 Vector expression of coordinate and displacement.

体の間の弾性ばねに発生した力によって計算される。

幾何学的非線形性および材料非線形性を有する問題なので、直前の変形状態を基準として微小変形後の状態を記述する updated-Lagrange 法を用いて、増分形の運動方程式を導出する。

断面 i 上でのアーチ軸線から外向きに ζ の位置のアーチ軸線方向のひずみ増分 $d\epsilon_i$ は、Bernoulli-Euler のはり理論から平均軸ひずみ増分 $d\epsilon_i$ およびアーチ軸線の曲率増分 $d\kappa_i$ を用いて次式で表される。

$$d\epsilon_i(\zeta) = d\epsilon_i + \zeta d\kappa_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

式 (1) のひずみ増分 $d\epsilon_i$ に対応する応力増分 $d\sigma_i$ を断面 i の位置 ζ におけるひずみ履歴に依存する弾塑性接線係数 $E_{t,i}$ を用いて次式で表す。

$$d\sigma_i(\zeta) = E_{t,i}(\zeta) d\epsilon_i(\zeta) \quad \dots\dots\dots (2)$$

式 (2) に式 (1) を代入し横断面について積分することにより、節点 i での軸力増分 dF_i および曲げモーメント増分 dM_i を次式で定義する。

$$dF_i = \int_{A_i} d\sigma_i(\zeta) dA \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$dM_i = \int_{A_i} d\sigma_i(\zeta) \zeta dA \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{Bmatrix} dF_i \\ dM_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} d\epsilon_i \\ d\kappa_i \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 A は横断面積であり、

$$k_m = \int_{A_i} E_{t,i}(\zeta) \zeta^{m-1} dA \quad (m = 1, 2, 3) \quad \dots\dots (6)$$

である。

図 2 に示すように、アーチの初期形状 (図中の破線) を断面 i の中心軸上に配置した節点 i の位置ベクトル x_i で表す。初期状態からの節点変位をベクトル u_i で、節点 i から $i+1$ へ向かう要素 I の形状をベクトル L_I で表す。微小時間における増分 du_i , dL_I は、次式で関係付けられる。

$$du_i = \{du_i, dv_i\}^T \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$dL_I = du_{i+1} - du_i \quad \dots\dots\dots (8)$$

節点 i での平均軸ひずみ増分 $d\epsilon_i$ は節点 i を含む要素 $I-1$ と I の伸びの増分の平均から、また曲率増分 $d\kappa_i$ は節点 i を含む要素のなす角の変化量から、二次以上の高次微小量は無視することにより次式で表される。

$$de_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{L}_{I-1} \cdot d\mathbf{L}_{I-1}}{|\mathbf{L}_{I-1}|^2} + \frac{\mathbf{L}_I \cdot d\mathbf{L}_I}{|\mathbf{L}_I|^2} \right) \dots\dots (9)$$

$$d\kappa_i = \frac{\mathbf{L}_{I-1} \times d\mathbf{L}_{I-1} - \mathbf{L}_I \times d\mathbf{L}_I}{(|\mathbf{L}_{I-1}| + |\mathbf{L}_I|)/2} \dots\dots (10)$$

式(9), (10)を用いて式(1)をマトリクス表示すると、節点 $i-1$ から $i+1$ までの節点変位増分 $d\mathbf{u}_i$ を用いて、

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_i = \{1, \zeta\} \begin{Bmatrix} de_i \\ d\kappa_i \end{Bmatrix} = \{1, \zeta\} [B]_i d\mathbf{u}_i \dots\dots (11)$$

$$d\mathbf{u}_i = \{du_{i-1}, dv_{i-1}, du_i, dv_i, du_{i+1}, dv_{i+1}\}^T \quad (12)$$

となる。ここで、行列 B は L を成分にもつ (2,6) 行列である (付録参照)。

式(3), (4)を用いて要素 I に働く軸力増分 dP_I およびせん断力増分 dS_I を次式のように定義する。

$$dP_I = \frac{dF_{i+1} + dF_i}{2} \dots\dots (13)$$

$$dS_I = \frac{dM_{i+1} - dM_i}{|L_I|} \dots\dots (14)$$

節点 i に働く外力増分を dQ_i とすれば、質量 m_i をもつ節点 i に関する運動方程式は次式で表される。

$$m_i d\ddot{\mathbf{u}}_i = dP_I + dP_{I-1} + dS_I + dS_{I-1} + dQ_i \quad (15)$$

ここで、 $d\ddot{\mathbf{u}}_i$ は節点 i の加速度である。 dP, dS, dQ のベクトルの向きは、図1(b)に示す向きを正とする。

式(15)の軸力 P およびせん断力 S を式(1)-(14)を用いて節点変位増分で表し、全ての節点について加えあわせると、全節点の変位増分ベクトル $d\mathbf{u}$ に関する次式が得られる。

$$[M]\{d\ddot{\mathbf{u}}\} + [K]\{d\mathbf{u}\} = \{d\bar{Q}\} \dots\dots (16)$$

ここで $d\ddot{\mathbf{u}}, d\mathbf{u}, d\bar{Q}$ は、全節点に関するベクトルであり、 M は全体質量行列、 K は全体剛性行列である。

運動方程式を解くにあたっては、後退差分近似を用いて加速度増分を近似し、updated-Lagrange法の刻みと時間刻み h を一致させて、節点加速度増分を、

$$\{d\ddot{\mathbf{u}}\}_{t+h} = \frac{\{d\mathbf{u}\}_{t+h} - 2\{d\mathbf{u}\}_t + \{d\mathbf{u}\}_{t-h}}{h^2} \quad (17)$$

で表す。ここで $\{ \}_{t+h}$ は時刻 t から $t+h$ までの増分を表す。これを式(16)に代入して、変位増分ベクトル $d\mathbf{u}$ を求める。

図1(b)に示すようにアーチに沿って要素分割する。節点 M が飛翔体である。飛翔体とアーチの間の弾性ばねを介して衝撃力が作用するものとする。節点 M に飛翔体速度から定まる変位増分を強制変位として与える。衝突後の飛翔体速度は飛翔体を質点とした運動方程式に従う。

3. 実験方法

3.1 装置構成 実験には図3に示す装置を用いた。ガスガンから発射された円柱状ドライアイス(直径100mm, 長さ100mm, 質量1.2kg)を受けたポンチ(質量0.420kg, ストローク30mm)が、隣接する飛翔体を押出す。飛翔体は溝に誘導され、試験片の中央に衝突する。試験片には飛翔体の衝突による衝撃力

Fig.3 Experimental setup.

Fig.4 Shape of flyer.

以外の力が作用しないようにポンチ部と試験片設置部は独立している。単純支持の条件を実現するために、飛翔体の進行方向と、試験片の広がる方向の変位を拘束し、図3に示す形状に試験片の両端を加工した。

3.2 速度及び変形計測 図4に示した二種類の飛翔体(材質 JIS S45C, 質量 0.538, 0.285 kg)には等間隔に穴がけられており、図3の1と2の二箇所に設置した光スイッチをこの穴が開閉することにより発生する信号から、飛翔体の位置と速度を測定する。衝突から飛翔体が押し戻されるまでの間、飛翔体先端には常に圧縮力が働いており、アーチ試験片と飛翔体は常に接触を保ちながら変形していることを確認している。そこで実験では飛翔体の位置からアーチの衝撃点のたわみを測定する。

3.3 衝撃力の測定法 図4に示す飛翔体の突起部の表裏両面に貼付したひずみゲージ(以後衝撃力計測器と呼ぶ)を用いてひずみを測定し、衝撃力を求めた。圧縮試験機を用いて、この衝撃力計測器を校正した。ひずみの値に飛翔体のひずみゲージ貼付位置の断面積と縦弾性係数を掛けて求めた荷重と、試験機のロードセルが示す値とを比較し、換算係数 $K=0.505$ を得た。実験ではこの値を用いて衝撃力を計測する。この換算係数を用いて測定された衝撃力から求めた力積と、飛翔体の運動量は一致しており、衝撃力の測定にもこの換算係数を使用できることを確認した。

3.4 アーチ試験片 実験にはアルミニウム合金(JIS A2017)圧延材を、ロール圧延機で円弧状に曲げ、

Fig.5 Maximum deflection versus impact velocity.

以下に示す形状に加工し、焼鈍し残留応力を除去した試験片を用いた。

実験で使用した試験片と同じ材料を用いて計測された、以下の材料特性を解析に用いた。また、逆負荷塑性は移動硬化則に従うとした。なお、本研究で扱う速度範囲では、材料特性にひずみ速度依存性はない。

縦弾性係数 $E = 67.7 \text{ GPa}$
 降伏ひずみ $\varepsilon_y = 0.781 \times 10^{-3}$
 降伏後の応力-ひずみ関係 $\sigma = 303\varepsilon^{0.244} \text{ MPa}$
 密度 $\rho = 2.79 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

形状は、幅 $b=20\text{mm}$ 、厚さ $t=3, 5\text{mm}$ 、スパン $X=220\text{mm}$ 、ライズ $Y=40\pm 3\text{mm}$ 、曲率半径 $R=170\pm 6\text{mm}$ 、中心角 $\alpha=80\pm 3^\circ$ であり、回転支持を実現するように端部を丸めた。アーチ端部が支持部に接触し、かつ飛翔体がアーチ中央に衝突するように、飛翔体とアーチを設置した。試験片表面にひずみゲージ(共和 KFG-5-120-C1, 適用ひずみ範囲 10%, 有効ゲージ長 5mm)を貼り、試験片に生じるひずみ履歴を計測した。衝撃力とひずみの時間変化はいずれもデジタルオシロスコープ(サンプリング周波数 100MHz, 分解能 10bit)で記録した。

4. 結果および考察

以下の解析では、非対称変形を扱うためアーチ全長を解析し、軸方向に 40 要素、厚さ方向に 22 本のばねを用いた。時間刻みは、Courant の条件から、最小要素長さを弾性波が伝播する時間より短い $1\mu\text{s}$ を用いた。

4.1 最大たわみ 衝突速度 $v=6.5\text{--}13.5\text{m/s}$ 、衝突エネルギー $11\text{--}48\text{J}$ の範囲で実験を行った。最大たわみ(実験中の飛翔体位置から測定した試験片中央の最大たわみ量)と衝突速度の関係を図 5, 6 に示す。図中の丸印が実験結果、実線が解析結果である。最大たわみの測定値は、質量 $W=0.538\text{kg}$ の飛翔体を用いた実験では同程度の衝突速度で行われた実験結果の平均か

Fig.6 Maximum deflection versus impact velocity.

Fig.7 The calculated and measured deflection histories at impacted point. ($t=5\text{mm}$, $W=0.538\text{kg}$)

ら $\pm 15\%$ の範囲に分布し、質量 $W=0.285\text{kg}$ のそれは $\pm 8\%$ の範囲に分布した。数値解析では顕著な非対称変形は現れず、解析結果は実験結果の下限にほぼ一致した。実験結果の変動の原因は、試験片形状などの不整にあり、不整の大きな試験片は非対称変形が生じ容易に座屈し、大きく変形すると考えられる。不整により誘発される非対称変形は衝撃速度とともに大きくなり、それに伴い実験と解析の差が大きくなる。

4.2 たわみの時間変化 最大たわみが解析値とよい一致を示した実験(アーチ厚さ $t=5\text{mm}$ 、飛翔体質量 $W=0.538\text{kg}$ 、衝突速度 $v=10.2\text{m/s}$)と($v=6.3\text{m/s}$)のたわみの時間変化を、それに対応する解析結果とともに図 7 に示す。これらでは最大たわみ量だけでなく、変形の時間変化もよく一致している。ただし、衝撃持続時間は実験の方が一割ほど長い。

4.3 塑性ヒンジ位置 衝突速度と塑性ヒンジ位置の関係を図 8 に示す。形状測定器を用いて計測した曲率が衝撃点とそれに次いで大きい位置を、塑性ヒン

Fig.8 The calculated and measured position of plastic hinge.

Fig.9 The calculated and measured distribution of nondimensional curvature. ($t=5\text{mm}$, $W=0.538\text{kg}$)

ジ位置と定義した。縦軸の S は、アーチ全スパンの弧長で除した支持端からのアーチ軸線上の距離で、0, 1 が支持端を、0.5 がアーチ中央（衝撃点）を表す。記号が実験値、線が解析値である。なお、比較のため静的実験⁽⁹⁾でのヒンジ位置を“ Δ ”で図中に示す。解析値では塑性ヒンジの発生位置は衝突速度、飛翔体質量によらず一定である。解析と実験のヒンジ位置はほぼ一致し、静的な場合に近い値を取り、静的と動的の差異はほとんどない。

4.4 変形形状 アーチ厚さ $t=5\text{mm}$ 、飛翔体質量 $W=0.538\text{kg}$ 、衝突速度 $v=6.3\text{m/s}$ の実験の変形後の試験片の曲率分布図を解析結果とともに図 9 に示す。縦軸は実験前のアーチの曲率で無次元化したアーチの曲率である。変形の分布、曲率の大きさともに解析値と実験値はほぼ一致した。衝撃点であるアーチ中央 ($S=0.5$) で曲率が負の最大値を取り、 $S=0.17$, 0.82 で正の最大値をとる。これらの位置に塑性ヒンジが形成

Fig.10 The calculated and measured strain histories. ($t=3\text{mm}$, $W=0.285\text{kg}$)

Fig.11 The calculated and measured mean strain history. ($t=5\text{mm}$, $W=0.538\text{kg}$)

された。また、支持端付近およびヒンジ部と衝撃点の間 ($S=0.35-0.45$, $0.55-0.65$) で曲率が変形前の試験片と同じ+1に近いことから、変形がヒンジ位置および衝撃点に集中していることがわかる。

4.5 ひずみ アーチ厚さ $t=3\text{mm}$ 、飛翔体質量 $W=0.285\text{kg}$ 、衝突速度 $v=5.4\text{m/s}$ の実験とそれに対応する解析の、試験片外側表面のひずみの時間変化を図 10 に示す。図中の (a), (b) は塑性ヒンジ部 ($S=0.17$)、非塑性ヒンジ部 ($S=0.35$) での試験片外側（図 3 で飛翔体から衝撃を受ける側）表面のひずみの時間変化を表す。また、図中の一点鎖線は飛翔体速度が反転する時間を表す。同様に、 $t=5\text{mm}$ 、 $W=0.538\text{kg}$ 、 $v=10.5\text{m/s}$ の実験結果とそれに対応する解析結果を図 11 に示す。縦軸の軸ひずみは、同一断面の内側と外側表面の表面ひずみを平均することにより、曲げひずみを除去して求めた。表面ひずみ、軸ひずみの解析値は、塑性ヒンジ部、非塑性ヒンジ部のいずれにおい

Fig.12 The calculated and measured impact force history. ($t=5\text{mm}$, $W=0.538\text{kg}$)

でも、ひずみの大きさ、時間変化の様子が実験値とほぼ等しく、これらの解析では、変形の時間変化も正しく表現できている。

4.6 衝撃力 アーチ厚さ $t=5\text{mm}$ 、飛翔体質量 $W=0.538\text{kg}$ 、衝突速度 $v=8.7\text{m/s}$ の実験の最大たわみに達するまでの衝撃力の時間変化 (実線) を、解析結果 (破線) とともに図 12 に示す。両者には若干の違いが見られる。衝突直後に発生した最大衝撃力は、実験の 2.34kN に対し解析値では 8.52kN であり大きな差がある。解析では、飛翔体を一つの質点とし、アーチの厚さ方向には要素分割を行っていないので、衝撃直後に衝撃点近傍に生ずる応力波の伝播を表現し得ない。また、衝撃力計測部分が一様変形すると仮定し、これを弾性ばねとみなせばね定数を 1.44GN/m として解析したが、この飛翔体とアーチの間の弾性ばねの剛性は衝撃力の短時間の応答へ大きく影響する。このため、極短時間の衝撃力は評価できないが、これによる力積、仕事は小さく、巨視的な変形、衝撃力への影響は小さいと考えた。

また、その後ほぼ一定値となる衝撃力は、解析値が実験値より一割程大きく、衝撃持続時間を短く評価する。なお、図 12 の衝撃力-時間曲線の面積で表される衝突直後から飛翔体反転までに飛翔体から試験片に作用した力積は、解析値と実験値は共に飛翔体の衝突直前の運動量にほぼ等しく、飛翔体の衝撃力計測器は動的な荷重も正しく測定できた。

5. 結言

回転支持円弧アーチの中央に飛翔体が衝突した際の弾塑性変形を、集中質量・剛体-ばねモデルを用いて解析するとともに、実験と比較した。衝撃力、衝撃持続時間に幾分差が見られるものの、たわみの時間変化、ひずみの時間変化、最終の変形形状はよく一致した。

A 付録

式 (11) の行列 B は次式で表される。

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{L_{I-1}^x}{2L_{I-1}^2} & -\frac{L_{I-1}^y}{2L_{I-1}^2} & \frac{1}{2}\left(\frac{L_{I-1}^x}{L_{I-1}^2} - \frac{L_I^x}{L_I^2}\right) \\ -\frac{L_{I-1}^y}{2L_{I-1}^2} & \frac{L_{I-1}^x}{2L_{I-1}^2} & \frac{1}{2}\left(\frac{L_{I-1}^y}{L_{I-1}^2} + \frac{L_I^y}{L_I^2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{L_{I-1}^x}{L_{I-1}^2} - \frac{L_I^x}{L_I^2}\right) & \frac{L_I^x}{2L_I^2} & \frac{L_I^y}{2L_I^2} \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{L_{I-1}^y}{L_{I-1}^2} + \frac{L_I^y}{L_I^2}\right) & -\frac{L_I^y}{2L_I^2} & \frac{L_I^x}{2L_I^2} \end{bmatrix} \dots (18)$$

ここで、

$$L_I = |L_I| \dots (19)$$

$$L = (L_{I-1} + L_I)/2 \dots (20)$$

$$L_I = \begin{Bmatrix} L_I^x \\ L_I^y \end{Bmatrix} \dots (21)$$

$$L_I^x = x_{i+1} + u_{i+1} - x_i - u_i \dots (22)$$

$$L_I^y = y_{i+1} + v_{i+1} - y_i - v_i \dots (23)$$

である。

参考文献

- (1) Deutsch, E., *Das Knicken von Bogentragern bei unsymmetrischer Belastung*, (1940), Bauingenieur.
- (2) 新家徹・頭井洋・波田凱夫, 土論, 263(1977), 11-23.
- (3) Padovan, J. and Tovchakchaikul, S., *Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. Eng. Mech. Div.*, 110-6(1984), 911-929.
- (4) Batoz, J.L., Jameux, J.P. and Lebouvier, F., *ASME Press. Vessel. Pip.*, 89(1984), 165-171.
- (5) 伊藤智啓・川嶋紘一郎, 機論, 53-490, A(1987), 1118-1123.
- (6) Stronge, W.J., Shu, D. and Shim, V.P.W., *Int. J. Impact Engng*, 9-1 (1990), 1-18.
- (7) Ishikawa, N., Hoshikawa, T., Katsuki, S. and Iida, T., *Nucl. Eng. Des.*, 138 (1992), 37-43.
- (8) Wei, D. and Yang, G., *Acta Mechanica Sinica (English Ed.)*, 6-3 (1993), 275-289.
- (9) Wei, D. and Yang, G., *Proc. of AOP'93*, (1993), 383-390.
- (10) Kong, X., Wang, B. and Hu, J., *Comp. & Struct.*, 55-1 (1995), 163-166.
- (11) Zhao, L.M., Li, Q.M. and Yang, G.T., *Proc. of AOP'93*, (1993), 369-374.
- (12) 川井忠彦・都井裕, 生産研究, 29-5 (1977), 288-290.