微視的特性を考慮した粒子分散複合材の
弾塑性構成則モデル*呉 亜 東^{*1}, 中 垣 通 彦^{*2}Elastoplastic Constitutive Law for Particle Dispersed Composite
Material Accounting for Mesoscopic Inhomogeneity

Yadong WU and Michihiko NAKAGAKI

The prior theories about elastoplastic constitutive law for particle dispersed composite develop the relation between the average stress and the average strain in multiple phases. In our study, it is found that the local stress distribution in the mesoscale has a great effect on the global property of a composite that undergoes the plastic deformation. The present model considers the distributed stress in standard distribution function in each phase of the composite, where the distribution span is segmented. The macro-stress is linked with the distributed meso-stress by means of the proposed self-consistent compliance mixing law. On the other hand, a meso-mechanics analysis by FEM was conducted to investigate the interaction phenomena occurring in the composite. Also the result was used to provide a reference to the present constitutive model developed in this paper. The developed constitutive model shows an excellent correlation with the reference, thus demonstrates the effectiveness of the present model in both the elastic stage and the plastic stage.

Key Words: Particle Dispersed Composite, Distribution Function, Meso-mechanics Analysis, Equivalent Inclusion Method, Plasticity, Constitutive Modeling

1. 結 言

組成材料の物性値が著しく異なる複合材料は、微視的な構造尺度において非均質性を持ち、それが巨視的な物性に対して顕著な影響を与える。このような複合材料の正確な挙動を知るため、今まで多くの研究者が様々な方法で粒子分散複合材料の構成則に関して研究を行って来ており、いくつかの構成則理論が既に紹介されている。それらの中で複合材料の介在相の形を考慮しない混合則、Voigt⁽¹⁾、Reuss⁽²⁾やHashin-Shtrikman⁽³⁾の理論は弾性問題に対して理論解析の上下限としてよく知られている。Eshelby⁽⁴⁾の等価介在物理論が紹介されて以来、その数学的な扱い易さから粒子分散複合材料の粒子モデルとしてよく使用されている。それらの中に、Eshelbyの等価介在物理論とMori-Tanaka⁽⁵⁾の平均場混合則に基づいた、Hill⁽⁶⁾、Wakashima⁽⁷⁾、Tandon-Weng⁽⁸⁾、Tohgo⁽⁹⁾らの巨視的な構成則モデルがある。これらのモデルを総称してEMTモデルと呼ぶと、EMT

モデルは応力と歪を相内で平均化し、その上で巨視的な視点から混合則と構成則を求めるモデルである。いくつかの例では弾塑性問題に対しても、相内では均質で応力が一様として取り扱われている。しかし一般に、応力により剛性が変化する弾塑性問題等においては、微視的な非均質性と粒子間の応力干渉のため相内に局所的な非均質化が起きる。この時、相材料の平均応力と平均歪みとの関係は均質材料の場合の関係と同じとはならず、特に母相に塑性変形が起きる場合には複合材料の巨視的な特性は大きく影響を受ける。このように相平均された混合則理論に基づく構成則は、実際の複合材料の弾塑性挙動と異なる事が予想される。

この問題につき、本論文では応力分布を表現する事により粒子間の応力干渉を取り扱い、前報にて紹介した弾性粒子分散モデル⁽¹⁰⁾の上に粒子分散複合材料の弾塑性構成則を構築した。本モデルに用いた分布関数パラメータは、粒子分散領域のFEMメゾ・メカニクス解析によって予め検証したMura-Cheng⁽¹¹⁾の粒子回りの応力分布式から導いた。さらに本構成則の精度を検証するため、メゾ・メカニクス解析の結果と比較した。実際の複合体では、塑性の他に粒子とマトリックス

* 原稿受付 1997年7月9日。

^{*1} 正員、九州工業大学大学院 (☎ 820-0067 飯塚市川津 680-4)。^{*2} 正員、九州工業大学情報工学部。

スの間に剥離や損傷などの複雑な現象が伴う事があるが、ここではまず弾塑性問題に集中するため他の非線形現象を排除した。

2. 粒子分散材料のメゾ解析

粒子分散複合材料中では、一般に母相と介在相材料が不規則に配置されていて応力と歪みの分布も規則性に乏しい。塑性度は応力に依存するため、同じ材料相内でも微視的に塑性によるランダムな非均質化が起きる。最初に複合材料の微視的な局所非均質性が起きるメカニズムを詳しく知るため、有限要素法解析による粒子分散複合材料の二次元メゾ・メカニクス・モデル解析を実施した。

二相からなる粒子分散複合材を考え、構成材料のヤング率 E とポアソン係数 ν をそれぞれ次のように仮定する。添え字 1 および 2 は、それぞれ母相と介在相を表す。

母相 (Epoxy): $E_1 = 2 \text{ GPa}$, $\nu_1 = 0.35$

介在相 (Silica): $E_2 = 40 \text{ GPa}$, $\nu_2 = 0.18$

母相となる材料は、次式の塑性歪硬化則に従うとする。

$$\bar{\sigma} = \sigma_y + h(\bar{\epsilon}_p)^n \quad (1)$$

ここで、 $\bar{\sigma}$ と $\bar{\epsilon}_p$ は母相の相当応力と相当塑性歪みであり、塑性パラメータは、

降伏応力 $\sigma_y = 75.85 \text{ MPa}$,

歪み硬化率 $h = 32.18 \text{ MPa}$,

歪み硬化指数 $n = 0.26$,

であるとする。メゾ解析モデルとして図 1 に示す粒子分散領域を考える。図 2 のようにその一部をとり、解析参照領域として単軸引き張りの下に、対称、反対称、またはペナルティ拘束による境界条件および変位制御を上端部に施して無限領域として有限要素解析を行った。単粒子の参照領域からなる正方配列の場合には強い異方性が現われるが、粒子をランダム配置した図 2 のような解析参照領域モデルはほとんど異方性を持たないパターンである事が示されている⁽¹²⁾。

図 3 に一つの解析例について、粒子回りの母相域での相当応力分布を表す。無限遠方の巨視的な外応力は一様と考えることができるが、微視的には粒子の干渉による局所的な応力の分布が現れている。また応力集中部と低応力部が、母相と介在相の界面付近に発生している事が分かる。塑性が起きると応力の局所性のゆえに、各相に塑性化による剛性の非均質性が生じる。そのため複合材料の各相の平均的な応力-歪み挙動は、均質材料のそれと比べて著しく異なる。

先ず、弾塑性を呈する母相材料の平均応力と平均歪みの挙動を観察する。応力干渉の影響を明らかに示すため、粒子の体積分率を 0 から 0.72 まで変化させて解析を行った。本論文での展開において $(\_)$ は 2 階以上のテンソルを表し、 $(:)$ は 2 重内積を、 $(\otimes)$ はテンソル積を表す。 (d) は外荷重の変化に対応する増分量であり、また (Δ) は分布の微小領域に対応する量である。 $(\bar{\cdot})$ は複合材料の巨視的平均量を表すが、これらは予め仮定された既知量ではなく、自己整合的に決定される未知量である。

Fig.1 Particle dispersed composite model and its reference domain

Fig.2 FEM reference domain with boundary conditions

Fig.3 Stress levels in matrix

Fig.4 Behavior of averaged stress-strain in matrix

母相内部で非均質に分布する応力と剛性を取り扱うために、母相内部の応力を多数のレベルに分割する事を考える。任意の応力レベルに属する領域内では応力は一様であり均質であると考ええる。

メゾ解析で得られた母相内での平均相当応力と平均相当歪の結果を、介在物の体積分率 f が 0 から 72% まで、六つの体積分率の場合について図 4 に示す。粒子の体積分率は、介在物の大きさによって変化させた。粒子を含まない均質母相材料の応力 - 歪みの結果は最も高く、応力が降伏応力 $\sigma_y = 75.85\text{MPa}$ に至って初めて塑性が開始する。

弾性の段階では、介在相の体積分率に関わらず母相の平均応力と平均歪みの関係は均質材のそれと同じ性質を表す。すなわち、母相の平均的な材料特性は応力分布に依存せずユニークである事が分かる。この事から、複合材料の弾性構成則では相材料を均質材料として取り扱うのが妥当であるという事が出来る。

一方、塑性段階では粒子の体積分率の程度により、塑性挙動は大きく違ってくる。平均応力が均質母相材料の降伏応力点よりずっと低い点においてすでに塑性が開始している。粒子体積分率が高い複合材料の初期降伏は均質材料のそれよりかなり早く起きている。例えば $f=0.72$ の例では、母相材料の平均応力が均質材の降伏応力の約 1/2 以下において塑性が開始している。本複合材料の単軸引き張りについて言えば、母相材料の平均降伏強度は介在相の体積分率が増加するに伴い低下する事が分かる。従来のモデル理論では、各相での応力と歪みの平均弾塑性挙動を単一材料のそれと等しいと仮定しているが、図 4 に示す結果から明らかなように、複合体の各相材料を均質材料と同様に取り扱うのは、複合材料の本質の理解から大きく外れている。以上のように、複合体中の相材料の平均的な特性は応力分布により変化する。

図 5 に、粒子の体積分率が $f=0.72$ の粒子モデルについて、弾性から塑性段階まで四つの荷重レベルでの母

Fig.5 Stress distribution in matrix over various stress levels

相内の応力分布状態の変化を示す。横軸は降伏応力により無次元化された母相応力レベル、縦軸は応力レベルに対応する発生領域の占有度を体積分率にて表す。応力の分布は正規分布に近い形をしており、平均応力は体積占有率が最も高いピーク値において起きている。最も低いレベル Stress-1 の分布は、全領域が弾性状態の場合の母相応力分布である。荷重レベル Stress-2 は、母相の平均主応力 σ_i と母相の降伏応力 σ_y の比が $\sigma_i / \sigma_y = 0.78$ の場合の結果を表す。この時、母相の主平均応力は降伏応力より十分小さいが、母相領域の一部では既に降伏している。これは図 4 に示すように、粒子を含む母相材の平均応力による降伏が均質母相材より早く起きる理由である。Stress-3 は母相の平均主応力と母相の降伏応力の比が $\sigma_i / \sigma_y = 1.08$ の場合であり、平均主応力は降伏応力を越えているが、まだ一部の領域が弾性のままである。Stress-4 はほとんどの領域が塑性に入った場合の結果を示す。この時、応力分布幅は平均応力に比して狭くなっている事が分かる。すなわち、塑性領域の拡大に従って、応力は平均化する傾向がある。以上のことから明らかなように、相の平均応力をもって平均的な相の剛性を決定する EMT モデルが不適当である事が分かる。

母相と同じように介在相内の応力分布も複合材料の弾塑性挙動に影響を与えるが、粒子は母相に取り囲まれ、それぞれの粒子は全て分離しているため、母相に比べて介在相内の応力分布の影響は小さい。

3. 構成則理論

微視的な応力分布の影響を考慮して複合材料の性質を理論的にモデル化するため、母相と介在相の応力を定義する。

3.1 母相と介在相の微視的応力と複合材料の巨視的応力 母相と介在相の応力の局所性を正確に表現するため、微視的な応力レベルに従って母相と介在相

の応力域を図6に示すように多数の区分に分割し、それぞれの微小応力域を i ($i=1, 2, \dots, n$) および j ($j=1, 2, \dots, m$) で表示する。微小応力域 i に対応する微小な体積領域が母相の中に散在し、 j は粒子単位で同じ応力域をもつ複数の粒子に対応する。母相 i 領域内の平均応力を σ_i^0 とし、介在相 j 領域内の平均応力を σ_j^0 とする。また微小領域を代表する応力 σ_i^0 と σ_j^0 の頻度を、母相と介在相上で次式を満たすように、分布関数 $P_1(\rho_1^0)$ と $P_2(\rho_2^0)$ を設定する。

$$\sum_{i=1}^n P_1(\rho_1^0) \Delta \rho_1^0 = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m P_2(\rho_2^0) \Delta \rho_2^0 = 1 \quad (3)$$

微小領域 i と j の無次元化した応力値と応力幅を ρ_1^0 と ρ_2^0 および $\Delta \rho_1^0$ と $\Delta \rho_2^0$ として、外荷重の増分値に対して次のように定義する。

$$\rho_1^0 = \frac{d\sigma_1^0}{d\sigma_1}, \quad \Delta \rho_1^0 = \Delta \left(\frac{d\sigma_1^0}{d\sigma_1} \right) \quad (4)$$

$$\rho_2^0 = \frac{d\sigma_2^0}{d\sigma_2}, \quad \Delta \rho_2^0 = \Delta \left(\frac{d\sigma_2^0}{d\sigma_2} \right) \quad (5)$$

微小領域 i と j が占める体積分率を Δc_i と Δc_j とすれば、次のように表す事ができる。

$$\Delta c_i = (1-f) P_1(\rho_1^0) \Delta \rho_1^0 \quad (6)$$

$$\Delta c_j = f P_2(\rho_2^0) \Delta \rho_2^0 \quad (7)$$

ここで、 f は介在相の体積分率、 $1-f$ は母相の体積分率である。応力を相の全領域に互って平均し、母相と介在相の平均応力を次のように定義する。

$$d\sigma_0 = \frac{1}{1-f} \sum_{i=1}^n \Delta c_i d\sigma_1^0 \quad (8)$$

$$d\sigma_2 = \frac{1}{f} \sum_{j=1}^m \Delta c_j d\sigma_2^0 \quad (9)$$

応力平衡条件から、複合材料の巨視応力 $d\sigma_0$ は微視領域の応力増分との間に次の関係がある。

$$d\sigma_0 = \sum_{i=1}^n \Delta c_i d\sigma_1^0 + \sum_{j=1}^m \Delta c_j d\sigma_2^0 \quad (10)$$

介在相の微視的な応力を求めるため、一つの等価モデルを考える。実粒子系の一つの粒子に着目すれば、

Fig.6 Volume frequency of distributed stress and its segmentation

粒子を取り巻く外界の平均的な剛性は当然、粒子の体積分率の増加と共に変化する。粒子外界の剛性を母相の剛性と同じと仮定する EMT モデルには、その点において無理がある。そこで本論文では、特に粒子間の相互作用の観点から、介在粒子に与えられた固有歪みに対して粒子の外界が応答する平均的なコンプライアンスを自己整合的に決定する混合則、すなわち SCC (Self-consistent Compliance) モデル⁽¹⁰⁾を用いる。

等価粒子に固有歪を与える事により、実粒子との間に歪および応力において次式に示すような等価関係を樹立する事ができる。

$$d\sigma_{eq} = d\sigma_2^0 \quad (11)$$

$$d\epsilon_{eq} = d\epsilon_2^0 \quad (12)$$

ここで、 $d\sigma_{eq}$ と $d\epsilon_{eq}$ は等価粒子の応力と歪みであり、 $d\sigma_2^0$ と $d\epsilon_2^0$ は介在相粒子の応力と歪みである。固有歪みを持つ等価粒子の応力-歪み関係は次式によって表される。

$$d\epsilon_{eq} = \hat{\Gamma} : d\sigma_{eq} + d\epsilon^* \quad (13)$$

ここで、 $\hat{\Gamma}$ は複合体の巨視的なコンプライアンスに等しい均質媒体のコンプライアンスである。等価体において、固有歪み $d\epsilon^*$ を課したため、等価粒子の応力と歪みは全体の平均値との間に食い違いをひき起こし、その差をそれぞれ $d\sigma^c$, $d\epsilon^c$ とする。

$$d\sigma_{eq} = d\sigma_0 + d\sigma^c \quad (14)$$

$$d\epsilon_{eq} = d\epsilon_0 + d\epsilon^c \quad (15)$$

本モデルの等価体に Eshelby の等価介在物理論を適用すれば、食い違い応力と歪みを、固有歪みを用いて次式のように表すことが出来る。

$$d\sigma^c = \hat{\mathcal{E}}_0 : d\epsilon^* \quad (16)$$

$$d\epsilon^c = \hat{\mathcal{S}} : d\epsilon^* \quad (17)$$

$$\hat{\mathcal{E}}_0 = \hat{\mathcal{E}} : (\hat{\mathcal{S}} - \mathbf{I}) \quad (18)$$

ここで、 $\hat{\mathcal{E}}$ は複合材料の平均弾性テンソル、 $\hat{\mathcal{S}}$ は平均 Eshelby テンソル⁽⁴⁾、 $\mathbf{I}$ は単位テンソルである。微小領域の内部では状態がほぼ均一であると仮定でき、実粒子内の応力と歪みの関係、

$$d\epsilon_2^0 = \Gamma_2^0 : d\sigma_2^0 \quad (19)$$

を用いれば、式 (11), (12), (13) と式 (19) より次式が得られる。

$$d\epsilon^* = (\Gamma_2^0 - \hat{\Gamma}) : d\sigma_{eq} \quad (20)$$

上において、 Γ_2^0 は微小領域 j のコンプライアンスを示す。さらに式 (14), (16) と式 (20) から、等価性を満たす固有歪みを次のように解くことができる。

$$d\epsilon^* = \mathcal{A}_0^0 : d\sigma_0 \quad (21)$$

$$\mathcal{A}_0^0 = [(\Gamma_2^0 - \hat{\Gamma})^{-1} - \hat{\mathcal{E}}_0]^{-1} \quad (22)$$

得られた固有歪みを式 (14) に使い、応力の等価条件を考慮すれば、実粒子内の応力と複合材の平均応力との関係は次式となる。

$$d\sigma_i^j = (I \otimes I + A_0^j : \hat{E}_0) : d\sigma_0 \quad (23)$$

式 (23) を式 (9) に代入すれば、介在相の平均応力は次のように表される、

$$d\sigma_2 = \frac{1}{f} B_0 : d\sigma_0 \quad (24)$$

$$B_0 = \sum_{j=1}^n \Delta c_j (I \otimes I + A_0^j : \hat{E}_0) \quad (25)$$

また母相の平均応力は次式のように求められる、

$$d\sigma_1 = \frac{1}{1-f} (I \otimes I - B_0) : d\sigma_0 \quad (26)$$

図5からも明らかなように、応力分布の範囲は相応力平均値と共に変化する。母相の応力分布範囲の最小と最大応力増分値、 $d\sigma_1^{\min}$ と $d\sigma_1^{\max}$ は母相の任意領域の応力値の上下限となる、

$$d\sigma_1^{\min} \leq d\sigma_1^j \leq d\sigma_1^{\max} \quad (27)$$

また、応力 $d\sigma_1^j$ と平均応力との関係を次式のように分布によって表せば、

$$d\sigma_1^j = G^j d\sigma_1 \quad (28)$$

式 (26) と式 (28) より、微視領域の応力を巨視的応力の関数として求めることが出来る、

$$d\sigma_1^j = C_0^j : d\sigma_0 \quad (29)$$

$$C_0^j = \frac{1}{1-f} G^j : (I \otimes I - B_0) \quad (30)$$

上式中関数 G^j については後節で定義する、

3.2 複合材料の巨視的構成則 まず、母相と介在相の微視的な応力と巨視的応力の関係をモデル化する。応力はメゾ領域で分布し弾塑性材料剛性は非均質性を持つが、微小領域は十分小さく、その中で応力と剛性は均一であり、応力と歪みの関係は均質な組成材料と同じであると考え事ができる。従って、式 (19) と同様に母相の微小領域でも応力 - 歪み関係式を次のように表す、

$$d\epsilon_1^j = \Gamma_1^j : d\sigma_1^j \quad (31)$$

母相と介在相の平均歪みは、式 (8)、(9) と同様に

$$d\epsilon_1 = \frac{1}{1-f} \sum_{j=1}^n \Delta c_j d\epsilon_1^j \quad (32)$$

$$d\epsilon_2 = \frac{1}{f} \sum_{j=1}^n \Delta c_j d\epsilon_2^j \quad (33)$$

によって定義する。また、複合材料の巨視的歪みを各相の歪みから次の関係⁽¹⁴⁾ によって平均化すれば、

Fig.7 Local geometry at particle interface

$$d\epsilon_0 = (1-f) d\epsilon_1 + f d\epsilon_2 \quad (34)$$

式 (32), (33), (34) より

$$d\epsilon_0 = \sum_{j=1}^n \Delta c_j d\epsilon_1^j + \sum_{j=1}^n \Delta c_j d\epsilon_2^j \quad (35)$$

となる。式 (19) と (31) を式 (35) に代入すれば全体の平均歪みは次のようになる、

$$d\epsilon_0 = \sum_{j=1}^n \Delta c_j \Gamma_1^j : d\sigma_1^j + \sum_{j=1}^n \Delta c_j \Gamma_2^j : d\sigma_2^j \quad (36)$$

これに式 (23) と (29) を用いれば、複合材料の巨視的な増分構成則が次の形で得られる、

$$d\epsilon_0 = \hat{\Gamma} : d\sigma_0 \quad (37)$$

$$\hat{\Gamma} = \sum_{j=1}^n \Delta c_j \Gamma_1^j : C_0^j + \sum_{j=1}^n \Delta c_j \Gamma_2^j : (I \otimes I + A_0^j : \hat{E}_0) \quad (38)$$

式 (38) は、右辺に未知数 $\hat{\Gamma}$ 自身を含む自己整合 (Self-consistent) 形式となっているので、 $\hat{\Gamma}$ は反復計算により求める必要がある。その場合、初期値として Reuss または Voigt モデルによる混合則を用いるのが適している⁽¹⁰⁾、

本モデルは SCC モデルを用いていて、粒子を取り巻く外領域の剛性に介在相の体積分率の変化が考慮されているので体積分率が高い場合にも、また介在相と母相の剛性比が著しく異なる弾塑性問題に対しても、式 (38) は極めて精度のよい構成則を与える事ができる、

弾性の場合には材料物性値は定数であるので、分布を考えずに母相と介在相領域内部の平均値のみで取り扱えば、複合材料の構成関係式は簡単に求めることが出来る⁽¹⁰⁾、

3.3 応力分布関数 本モデルでメゾ局所的な非均質性を表すため、母相内の応力レベル ρ_1^j の体積分率の占有度を次式に示す正規分布の形で表す、

$$P_1(\rho_1^j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\phi} e^{-\frac{1}{2\phi^2}(\rho_1^j - 1)^2} \quad (39)$$

ここで ϕ は分散パラメータである。正規分布の統計理論から、母相に分布する応力の内、99.7% は次式の関係を満たすと考え事ができる、

$$(1-3\phi) \leq \rho_1^j \leq (1+3\phi) \quad (40)$$

これより、無次元化した母相の最小および最大応力の増分と分散値の関係を近似的に表せる、

$$\rho_1^{\min} = (1-3\phi), \quad \rho_1^{\max} = (1+3\phi) \quad (41)$$

図3の結果にも表れている通り、母相の最大と最小応力は通常、材料の界面で発生する。塑性化するに従い、無次元化された応力 ρ_1^j の分布幅は狭くなる傾向があるが、弾性の場合には分布形態は変わらず、しかも相対的な分布幅が広い。ここでは小規模降伏を想定し、弾性の応力分布を基本として、単軸引き張りの場合を一つの例として本モデルに用いる分散パラメータを求める。周囲が平均化された媒体の中にある図7のような一つの粒子 j を考えれば、Mura-Cheng⁽¹¹⁾ の単軸引き

張りを受ける無限媒体の中にある楕円体単粒子の回りの応力解を利用することができ、母相側粒子界面の応力分布が Tandon-Weng⁽¹³⁾ より次式で求められる。

$$d\sigma_{ij}^{out} = d\sigma_{ij}^i - \hat{E}_{ijkl}(\hat{E}_{pqmn} d\epsilon_{mn}^* M_{kp} n_q n_l - d\epsilon_{kl}^*) \quad (42)$$

ここで、

$$\hat{E}_{ijkl} = \hat{E}_{ijkl}^{-1} \quad (43)$$

$$M_{kp} = \frac{1}{\hat{G}} [\delta_{kp} - \frac{n_k n_p}{2(1-\nu)}] \quad (44)$$

であり、 n_i は界面の外法線ベクトル成分である。また、 $\hat{G}$ および ν はそれぞれ複合体のせん断弾性係数およびポアソン比の Self-consistent 平均値である。

二次元単軸引き張りに対しては、 $d\sigma_0 = d(\sigma_{10} \ 0 \ 0)^T$ 、式 (21) から固有歪みは次式となる。

$$d\epsilon^* = \left\{ \frac{(a_1 + 2\nu a_2)}{a\hat{E}} d\sigma_{10}, \frac{(a_3 - 2\nu a_4)}{a\hat{E}} d\sigma_{10}, 0 \right\}^T \quad (45)$$

上式の $a, a_1, \dots, a_4$ の詳細については付録に示す。式 (45) を式 (23) に適用して一つの粒子 j が持つ応力が求められる。

$$d\sigma_j^i = \{q_1 d\sigma_{10}, q_2 d\sigma_{10}, 0\}^T \quad (46)$$

式 (46), (42) から界面に沿った母相の応力が次式のよう計算できる。

$$d\sigma_{i1}^{out} = [q_1 + \frac{\cos^2\theta}{1-\nu^2} \{p_1 \cos^2\theta + p_2(\nu + \sin^2\theta)\}] d\sigma_{10} \quad (47)$$

$$d\sigma_{i1}^{out} = [q_2 + \frac{\sin^2\theta}{1-\nu^2} \{p_1 \cos^2\theta + p_2(\nu + \sin^2\theta)\}] d\sigma_{10} \quad (48)$$

$$d\sigma_{i1}^{out} = 0 \quad (49)$$

式 (47) - (49) では、自己整合型式 (Self-consistency) の未知のマクロな材料係数を含む事によって平均的な多粒子間の干渉を考慮している。上式において、最小と最大応力はそれぞれ $\theta=0$ および $\theta=\pi/2$ の位置で発生し、それらの相当応力値は

$$d\sigma_{i1}^{out} \Big|_{\theta=0} = g_1 d\sigma_1 \quad (50)$$

$$d\sigma_{i1}^{out} \Big|_{\theta=\pi/2} = g_2 d\sigma_1 \quad (51)$$

となる。ここで、

$$g_1 = \sqrt{\frac{1}{2} [(q_1 - \frac{p_1 + \nu p_2}{1-\nu^2} - q_2)^2 + (q_1 - \frac{p_1 + \nu p_2}{1-\nu^2} + (q_2)^2]} \quad (52)$$

$$g_2 = \sqrt{\frac{1}{2} [(q_1 - \frac{p_1}{1-\nu} - q_2)^2 + (q_1 - \frac{p_1}{1-\nu} + (q_2)^2]} \quad (53)$$

であり、 q_1, q_2, p_1 および p_2 の詳細を付録に示す。実際に粒子分散複合材料の場合、粒子の干渉で最小と最大応力は必ず $\theta=0$ および $\theta=\pi/2$ の位置で発生するとは限らない。しかし、巨視的な平均化した応力分布にとって、最小と最大応力が発生する確率の最も高い所は $\theta=0$ および $\theta=\pi/2$ の位置であると考えられる。

さて、母相応力の分散パラメータ ϕ は式 (41) から次式のように表す事が出来る。

$$6\phi = \rho_1^{\max} - \rho_1^{\min} \quad (54)$$

式 (50), (51) で表される一つの粒子の回りの最小と最大応力の寄与率を体積分率 Δc_j を以て表す。すべての粒子の材料が同じであり、また形状も相似であれば、全粒子に対して式 (50), (51), (54) より分散値は次式となる。

$$\phi = \frac{f |g_1 - g_2|}{6} \quad (55)$$

母相応力域 i の応力増分は、剛性およびその時の相当応力の変化を考慮して、平均値とリンクする。

$$d\sigma_i^i = \frac{\sigma_i^i}{\sigma_1} \frac{\partial \sigma_1^i}{\partial \sigma_1} \frac{\partial \sigma_1^i}{\partial \epsilon_1} d\sigma_1 \quad (56)$$

これにより、式 (28) 中の関数 $\bar{G}^i$ が決まる。

4. 解析例

解析対象として、粒子分散複合材料の単軸引き張り問題を考える。母相と介在相の材料特性は、最初に示したものと同一であり、この解析例では母相のみに塑性化が許され、介在相は弾性を保つとする。塑性変形が起きる母相の応力領域を図6に示すように有限個数に分割し、ここでは100等分して計算する。以下に示す本モデルの結果を粒子分散材の無限領域のメゾ解析結果を参照値として比較するが、本モデルにはメゾ解析からのデータが一切含まれていないモデルであることを明記したい。

図5に示した粒子分散領域のメゾ解析と同じ条件で計算した本モデルの母相相当応力の分布状態を、四つの応力レベルについて図8に示す。図中に示す数字は降伏応力で無次元化したそれぞれの場合の母相の平均応力値を表すが、定量的にも定性的にも図5の各応力レベルにおける結果とよく一致している。

次に、介在相と母相の縦弾性係数比を20, 5, 2とする三つの場合について弾性計算した母相応力の分散値の結果を、広範囲の介在相体積分率に対して示す。図

Fig.8 Stress distribution by present model over load levels

9はメゾ解析から得られた母相応力分布の結果を正規分布関数により最小2乗近似にて処理した分散値の結果を表す。一方、図10は式(55)により求めた本モデルの ϕ の結果であり、三つの剛性比について両者を比較すると、本モデルに用いる ϕ は解析した範囲でメゾ解析に近い結果を与える事が分かる。

本モデルの検証において最も興味深いのは、複合材料の巨視的な構成則挙動である。本論文では介在相の体積分率が11%から72%の間の7つの場合について、本モデルの結果をメゾ解析結果と比較し検討する。図11に、72%の場合の巨視的な軸応力と歪みの結果を示す。図中、“T-W”はTandon-Weng⁽⁸⁾による構成則で計算した結果であり、“Averaged”は本モデルで、相内で応力の分布を考えず、平均値で取り扱ったで例である。“Averaged”の結果は微視局所的な塑性化を許さないため、降伏開始点はかなり遅れ、それだけ実際より応力が高くなっている。しかし、自己整合的な混合則を使うことにおいては本モデルと同じであるので、弾性では本モデルと一致しており、また塑性の歪み硬化の傾きもほぼ一致している。所が、Mori-Tanakaの平均場理論の混合則に基づく“T-W”の結果では、両相の弾性係数比がかなり違うこの問題の場合、弾性時ですでに本モデルとの差が現れている。また、塑性化に分布を考

えないため、本モデルの結果から大きく外れて応力が高い。一方、本モデルの結果は計算した全範囲において、参照値と大変よく一致している。

図12には、粒子介在相の体積分率が次の7つの場合について参照値と比較し、本モデルを検証する。

$$f = 0.11, 0.2, 0.32, 0.4, 0.52, 0.61, 0.72$$

いずれの場合も両者の間により一致が見られ、広い体積分率における本モデルの信頼性を示すものである。なお、これ以上の体積分率に対しても本モデルの計算は可能であるが、メゾ解析モデルは稠密パックに近い状態となり、FEM計算から制限された。

5. 結 言

(1) 本論文では、自己整合コンプライアンス・モデルに基づき、複合材料の各相内の応力分布を考慮した巨視的構成則を構築した。

(2) 弾性の場合には、各相の平均応力と平均歪みの関係は均質材のそれと同じであり、複合材料の巨視的な特性は相内の微視的な応力分布に依存しない。

(3) 塑性の場合には各相の平均応力と平均歪みの関係は均質材のそれと大きく異なり、複合材料の巨視的な特性は相内の微視的な応力分布に依存する。また、

Fig.9 Variance ϕ from meso-mechanics analysis

Fig.10 Variance ϕ from present theory

Fig.11 Comparison of global stress-strain behavior for $f=0.72$

Fig.12 Predicted global stress-strain behavior compared with meso-mechanics analysis over volume fraction

分布を考えない構成則は参照値から大きく離れ、特に介在相の体積分率が高くなれば一層顕著となる。

(4) 一方、微視的な応力分布をモデル化した本構成則は弾性および塑性に互る全範囲において、また粒子の体積分率の値に関わらず参照値とよく一致している。

(5) 弾塑性以外においても損傷など、応力分布がメゾ領域的な剛性の非均質性を惹き起こす現象は、多くの複合材料に存在すると予想される。ここに紹介した統計分布を用いるモデル化手法は、それぞれの持つ微視的な現象の特質を考慮して他の非線形複合材料にも応用できる。

本研究に対し、文部省科学研究費補助金基盤研究(C) 07650107 及び福岡県産業・科学技術振興財団の助成を受けた事を記し謝意を表す。

参 考 文 献

- (1) Voigt, Lehrbuch. der Kristallphysik, B.G. Teubner, Leipzig and Berlin, (1910).
- (2) Reuss, Berücksichtigung der Elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie, Z. angew. Math. Mech., 10, (1930), 266-274.
- (3) Z. Hashin, S. Shtrikman, "A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials", J. Mech. Phys. Solids, 11, (1963), 127-140.
- (4) J.D. Eshelby, "The Determination of the Elastic field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems", Proc. of the Royal Society of London, Series A, 241A, (1957), 376-396.
- (5) T. Mori and K. Tanaka, "Average Stress in Matrix and Average Elastic energy of Materials with Misfitting Inclusions", Acta Metallurgica, 21, (1973), 571-574.
- (6) R. Hill, "Continuum Micro-Mechanics of Elastoplastic Plastic Polycrystals", J. Mech. Phys. Solids, 13, (1965), 89-101.
- (7) 若島健司, "複合材料の巨視的力学特性, Part II 弾性係数および熱膨張係数", 日本複合材料学会誌, 2-4, (1976), 161-167.
- (8) G.P. Tandon and G.J. Weng, "A Theory of Particle-Reinforced Plasticity", J. of Applied Mechanics, Transaction of ASME, 55, (1986), 126-135.
- (9) 東郷敬一郎・坂口学・石井仁, 機論, 61-592, A (1995), 23-31.
- (10) 呉亜東・中垣通彦, 機論, 64-622, A (1998) 掲載予定.
- (11) T. Mura and P.C. Cheng "The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion", J. of Applied Mechanics, Transaction of ASME, (1977), 591-594.
- (12) 中垣ほか, 第8回破壊力シンポジウム講演論文集, (1995), 165-169.
- (13) G.P. Tandon and G.J. Weng, "Stress Distribution in and Around Spheroidal Inclusions and Voids at Finite Concentration", J. of Applied Mechanics, 53, (1986), 511-518.
- (14) T. Mura, "Micromechanics of Defects in Solids", Martinus Nijhoff, (1982).

付 録 :

$$a_1 = (\hat{S}_{1111} + \hat{S}_{2222} - 1) + \frac{G_2}{G_1 - \hat{G}} + \frac{2(G_2 \hat{R} - \hat{G} K_2)}{3(G_2 - \hat{G})(K_2 - \hat{R})}$$

$$a_2 = \hat{S}_{1122} + \frac{(G_2 \hat{R} - \hat{G} K_2)}{3(G_2 - \hat{G})(K_2 - \hat{R})}$$

$$a_3 = -\hat{S}_{2211} - \frac{(G_2 \hat{R} - \hat{G} K_2)}{3(G_2 - \hat{G})(K_2 - \hat{R})}$$

$$a_4 = \hat{S}_{1111} - 1 + \frac{G_2}{G_2 - \hat{G}} + \frac{(\mu_2 \hat{R} - \hat{G} K_2)}{3(G_2 - \hat{G})(K_2 - \hat{R})}$$

$$a = -\frac{(G_2 \hat{R} - \hat{G} K_2)}{(G_2 - \hat{G})(K_2 - \hat{R})} - (\hat{S}_{1111} + \hat{S}_{2222} + \hat{S}_{2211}) \frac{\hat{G}}{G_2 - \hat{G}} \\ - [\hat{S}_{1111}(\hat{S}_{2222} + \hat{S}_{2233}) - 2\hat{S}_{1122}\hat{S}_{2211}] - \frac{(G_2 \hat{R} - \hat{G} K_2)}{3(G_2 - \hat{G})(K_2 - \hat{R})} \\ \{3 - 2(\hat{S}_{1111} - 1) + (\hat{S}_{2222} + \hat{S}_{2233} - 1) - 2(\hat{S}_{1122} + \hat{S}_{2211})\}$$

$$b_1 = 2\vartheta \hat{S}_{2211} + (1 - \vartheta)(\hat{S}_{1111} - 1)$$

$$b_2 = \vartheta(\hat{S}_{2222} + \hat{S}_{2233} - 1) + (1 - \vartheta)\hat{S}_{1122}$$

$$b_3 = \vartheta(\hat{S}_{1111} - 1) + \hat{S}_{2211}$$

$$b_4 = \vartheta(\hat{S}_{1122} + \hat{S}_{2211}) + (1 - \vartheta)(\hat{S}_{2222} - 1)$$

$$b_5 = \vartheta(\hat{S}_{2222} + \hat{S}_{1122} - 1) + (1 - \vartheta)\hat{S}_{2233}$$

$$p_1 = (a_1 + 2\vartheta a_2) / a$$

$$p_2 = (a_3 - \vartheta a_4) / a$$

$$q_1 = 1 + \frac{1}{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)} [b_1 p_1 + 2b_2 p_2]$$

$$q_2 = \frac{1}{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)} [b_3 p_1 + (b_4 + b_5) p_2]$$

球状粒子分散複合材料の平均的な Eshelby テンソルは次式で与えられる。

$$\hat{S}_{1111} = \hat{S}_{2222} = \frac{7 - 5\vartheta}{15(1 - \vartheta)}$$

$$\hat{S}_{1122} = \hat{S}_{2233} = \hat{S}_{2211} = \frac{5\vartheta - 1}{15(1 - \vartheta)}$$