セラミックス中のき裂面に働く接触力の同定法*

青木 繁^{*1}, 天谷 賢治^{*1}, 矢作 徹夫^{*2}Identification of Contact Pressure Distribution
on Surface of Crack in Ceramics

Shigeru AOKI, Kenji AMAYA and Tetsuo YAHAGI

The distribution of contact pressure on the surfaces of a crack in a ceramic specimen is estimated by a 3D finite element inverse analysis. The strains generated by the introduction of a crack are measured with strain gages on a side of a specimen, and this datum is used as the input to the inverse analysis. To reduce the number of parameters to be determined, the microscopic deformation characteristics related to the surface roughness are modeled by a non-linear spring with two parameters. After identifying these two parameters, the contact pressure distribution is calculated by a direct analysis. In order to save the computational time, the effective method which makes the system of equations small is developed. This method is applicable to a wide range of inverse problems.

Key Words: Inverse Problem, Ceramics, Contact Problem, Finite Element Method, Ill-posedness, Residual Stress, Spring Model, Crack Surface, Effective Finite Element Analysis

1. 緒 言

セラミックス試験片に Bridge Indentation 法⁽¹⁾等でき裂を導入すると、き裂面には互いに押し付け合うような接触力が働くことが知られている⁽²⁾⁽³⁾。この接触力の原因としては幾つかの要因が考えられる。Kishi ら⁽²⁾はセラミックスの熱膨張係数の局所的な異方性のために、焼結時に局所的な残留応力が発生し、この局所的残留応力場中にき裂を導入すると引張局所残留応力が解放され、圧縮局所残留応力の一部が残りこれが接触力の原因になると推察している。

また、き裂の導入によるこの引張局所残留応力の解放時に、局所的な変形の不均一性により、作成された一対のき裂面の凹凸に食い違いが生じ、この食い違いのために除荷時に接触力が現れることも考えられる。これらの他にも、試験片の加工時に研削等によって生じる巨視的残留応力も接触力の原因となり得るであろう。

いずれにしても、この接触力は衝撃力⁽⁴⁾や繰り返し荷重による破壊に影響を与えると考えられる。衝撃問題では慣性力が重要となるので、閉口時に働いていた接触力が破壊時の動的応力拡大係数に影響を与えるからである。また、繰り返し荷重問題では有効応力拡大係数幅 ΔK_{eff} が接触力の影響を受けるからである。そ

の影響を定量的に明らかにするためには、まずその分布を知ることが必要となる。

一般に、接触力の分布は直接測定することが困難であるので、接触部付近から何らかの情報を得てこれを入力として逆問題を解くことによって求められる。サンブナンの原理から推察されるようにこの逆問題は通常悪条件となる。木原ら⁽⁵⁾、尾田ら⁽⁶⁾および久保ら⁽⁷⁾はこの悪条件を克服するために様々な工夫を施している。

本研究では、き裂を導入した時のひずみの変化を試験片側面に貼ったひずみゲージにより測定し、これを入力として3次元有限要素法を用いた逆解析により接触力の分布を同定する。解析精度を向上するために細かい有限要素メッシュを用いると計算時間が膨大となり、事実上解析不可能となることが多いが、本研究ではこの困難を克服するための新しい方法を開発する。

Fig. 1 Cracked specimen and location of strain gages

* 原稿受付 1997年8月11日。

^{*1} 正員、東京工業大学大学院情報理工学研究科(☎ 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。^{*2} 東京工業大学大学院。

また、逆解析において、表面の凹凸による微視的変形特性を考慮して接触部を非線形ばねでモデル化し、このばね特性を推定し、推定したばね特性に対応する接触力の分布を求めるという方法を提案する。この方法により未知パラメータの数を減少して悪条件を克服することができる。

2. 実験

無加圧焼結 SiC で制作した試験片の中央付近にひずみゲージ (ゲージ長さ 0.2mm, ゲージ幅 1mm) を貼付して, Bridge Indentation 法⁽¹⁾によりき裂を導入した。試験片形状およびゲージ位置を図 1 に示す。なお, 試験片表面は研削後ラップ仕上げを施している。

き裂導入時のき裂面に垂直な方向 (図 5 の z 方向) のひずみ変化を図 2 に示す。ここで, $\overline{\varepsilon_{zz}^1}$ および $\overline{\varepsilon_{zz}^2}$ はそれぞれひずみゲージ 1 および 2 によるひずみ変化を示す。き裂の導入前後で, $\overline{\varepsilon_{zz}^1} = -17 \times 10^{-6}$, $\overline{\varepsilon_{zz}^2} = -22 \times 10^{-6}$ のひずみ変化が生じていることがわかる。

これらのひずみの変化は, 緒言で述べたようにき裂の導入により試験片中に存在していた巨視的および局所的残留応力が開放されるとともに新生き裂面上に接触力が発生したためと考えられる。次章以降では, これらのひずみの変化からき裂面上の接触力分布を推定する逆問題を解くことを考える。なお, き裂導入後, 試験片表面からき裂長さ a を光学顕微鏡により測定したところ, $a = 4.5\text{mm}$ であった。

Fig. 2 Strains generated by pressure on crack surface

3. 逆解析方法

3.1 基礎方程式

試験片にき裂を導入すると, 巨視的および局所的残留応力が解放されるとともにき裂面に接触力が生じて, 試験片各部はき裂導入前の状態から変位する。

試験片を線形弾性体とすると, き裂導入前後の応力や変位の変化は, 巨視的残留応力のないき裂付試験片 (以下ではモデル試験片と呼ぶ) のき裂面に, 次の二つの表面力を与えた場合の変化に等しい: (a) き裂導入前の (残留応力を持つ) 試験片中のき裂となるべき面に働いていた巨視的応力を打ち消すのに必要な表面力, (b) 新生き裂面に生じた接触力。

そこで以下では, モデル試験片について考える。ただし, モデル試験片の形状・寸法およびき裂面以外の境界条件はき裂導入後の実際の試験片と同一とする。なお, 局所的残留応力の解放による応力や変位の変化は, 新生き裂面に生じる接触力を通じて現れるとする。

上述のモデル試験片に対して, 有限要素法により離散化した平衡方程式は次式で与えられる。

$$K \begin{Bmatrix} u^a \\ u^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^a \\ f^c \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで, K は剛性マトリックス, u は節点変位, f は等価節点力, 上添字 $(\cdot)^c$ および $(\cdot)^a$ はそれぞれき裂面上のき裂面に垂直な量およびそれ以外の量を表す。き裂面上の摩擦力は無視する。 f^a または u^a は境界条件により既知であるが, f^c と u^c は両方とも未知である。

一般的な境界条件の場合にも容易に拡張できるが, 簡単のために以下では, 前章の実験に合わせて $f^a = 0$ という境界条件を仮定する。この場合には, f^c は (a) 巨視的残留応力を打ち消すために必要とした成分 $-f_R^c$ (既知とする) と (b) き裂面の凹凸に起因する成分 f_S^c (未知) の和として, 次式のように表される。

$$f^c = -f_R^c + f_S^c \quad (2)$$

なお, $-f_R^c$ はモデル試験片の解析上必要な架空の力であり, 実際の巨視的残留応力を持つ試験片のき裂面に働いている接触力は f_S^c のみであることを注意が必要である。

本逆問題の解法として, まず, f_S^c (したがって f^c) を適当に仮定して, 式 (1) を解いて試験片の変位 u を求め, つぎに, この結果から測定点におけるひずみ変化を求め, 測定値と比較して最初の接触力分布の仮定を修正するという操作を繰り返す方法が考えられる。しかし, 緒言で述べたように, この方法を適用する際に様々な困難を解決する必要がある。このために本研究では以下のような方法を開発, 提案する。

3.2 繰り返し計算の効率化

3次元有限要素法を用いるとして, 全節点数を N とする。き裂面上の未知数の数を m とする。上述の方法では繰り返し計算の度に, $3N$ 個の連立方程式 (1) を解

かなければならないので、多大の計算時間を必要とする。そこで、式(1)に $3N - m$ 個の既知の境界条件を代入して整理すると、次の小規模な (m 個の) 式が得られる。

$$A f^c = u^c \quad (3)$$

ただし、 A は、 $m \times m$ の既知な対称マトリクスである。同様に f^c と p 個の測定点におけるひずみ ϵ の関係として、次式が得られる。

$$B f^c = \epsilon \quad (4)$$

で表される。ここで、 B は、 $p \times m$ の既知マトリクスである。次節で A と B の効率的作成法を示す。

A も B も試験片に固有のマトリクスであり、一旦作成しておけば繰り返し計算の度に作成する必要はない。式(4)により、 f^c を仮定して ϵ を求める計算が、 $3N$ 個の連立方程式(1)を繰り返し解く方法に比べて簡単となるため、計算量が大幅に軽減されることがわかる。なお、式(3)の必要性については後述する。

3. 3 マトリクス作成の効率化

通常の方法では、式(3)および式(4)の A および B を作成するためには、剛性マトリクス K を作成しておく必要がある。解析精度を向上するために要素分割を細かくすると、 K の作成に膨大な計算時間とメモリが必要となる。ここでは、試験片の断面形状が一樣であることを考慮することにより、剛性マトリクス K を作ることなくマトリクス A および B を効率的に作成することを考える。

まず、断面形状が一樣である物体を図3のように規則的に層状に分割する。変位が与えられている場合についてもほぼ同様な取り扱いが可能であるが、簡単のため、左端面および側面には表面力だけが与えられている場合を考える。右端面には表面力も変位も与えられていない面が含まれているとする。3.1節のモデル試験片は、対称性より左半分だけを解析対象とすると、この場合に相当する。各層を同じように有限要素分割する。この場合の離散化された平衡方程式は次式

Fig. 3 Discretization into regular layers

(5) で表される。

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & & & \\ K_3 & K_5 & K_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & K_3 & K_5 & K_2 \\ & & & K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ \vdots \\ u_1 \\ u_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \\ \vdots \\ f_1 \\ f_0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$K_5 = K_1 + K_4 \quad (6)$$

ここで、下添字 i ($0 \leq i \leq n$) は分割した面の番号を表し、0面が右端面である。

式(5)に最後の2行目まで前進消去を施すと、 f_i ($1 \leq i \leq n$) は新しいベクトル f_i^* ($1 \leq i \leq n$) に変わり、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} X_n & K_2 & & & \\ & X_{n-1} & K_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & X_1 & K_2 \\ & & & K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ \vdots \\ u_1 \\ u_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_n^* \\ f_{n-1}^* \\ \vdots \\ f_1^* \\ f_0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここで、

$$\begin{cases} X_n = K_1 \\ X_i = K_5 - K_3 X_{i+1}^{-1} K_2 \quad (1 \leq i \leq n-1) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} f_n^* = f_n \\ f_i^* = f_{i+1} - K_3 X_{i+1}^{-1} f_{i+1}^* \quad (1 \leq i \leq n-1) \end{cases} \quad (9)$$

である。式(8)を用いると X_1 は漸化的に求められ、この X_1 を用いると、 u_0 と f_0 を関係づけるマトリクス A' が求められる。

$$A' u_0 = f_0 - K_3 X_1^{-1} f_1^* \quad (10)$$

$$A' = K_4 - K_3 X_1^{-1} K_2 \quad (11)$$

A' の次数は、式(5)の剛性マトリクスの $1/(n+1)$ になっている。

u_0 および f_0 の中にはそれぞれ u^c および f^c が含まれているので、式(10)または式(11)から u^c および f^c に関連する項を抜き出して逆マトリクスを作れば、式(3)の A が求められる。式(10)から明らかなように、一般には式(3)の右辺には定数項が付加されるが、3.1節のモデル試験片の境界条件に対してはこの定数項は0となる。

式(10)を式(7)に後退代入すれば、測定点での変位が f_0 の1次式として求められるので、測定点でのひずみ ϵ は、次式で表される。

$$\epsilon = B' f_0 + c \quad (12)$$

ここで、 B' は (測定点の数) $\times$ (A' の次数) の既知マトリクス、 c は定数ベクトルである。3.1節のモデル試

試験片の境界条件に対しては f_0 の内 f^c 以外の要素は 0 であるから、 f_0 の中から f^c に関連する項を抜き出し、式 (3) を用いれば、式 (4) の B が求められる。この場合にも定数項は 0 となる。

なお、本節の方法は解析対象物の断面が均一の場合に限らず、ねじのように長手方向に進むにつれて一定の断面が回転する場合や、(非軸対称荷重を受ける) そろばん玉のように断面が比例的に増大または減少する場合にも容易に拡張することができる。

3. 4 接触部のモデル化

ひずみの解析値と測定値の差を最小化する際に、き裂面の節点力 f^c を直接未知パラメータとすると、未知パラメータの数が多い (m 個) ために解が不定となるか、振動解が生ずる恐れがある。本研究では、接触部をその微視的変形機構を考慮してモデル化することにより、この困難を解決する。

すなわち、接触部の微視的変形特性がき裂面の凹凸に起因していることを考慮して、き裂面に垂直方向の微視的変形に関して、接触部を非線形ばねでモデル化する。このばねの特性を推定して、推定されたばね特性に対応する接触力分布を求める。

ばね特性としては、接触部の単位面積あたりの力を t^c とし、変位を v^c (き裂導入前を $v^c = 0$) とし、図 4(a) に示す特性を仮定する。すなわち、次式のように 2 つのパラメータ α および β で表されるばね特性を仮定する。

$$t^c = \begin{cases} \alpha(v^c - \beta) & (0 < v^c \leq \beta) \\ 0 & (\beta < v^c) \end{cases} \quad (13)$$

このモデル化により、未知パラメータの数を m 個から 2 個に減少することができる。なお、5. 2 節で他のばね特性 (図 4(b)) を仮定した場合と比較検討する。

2 つのパラメータ α および β を仮定して式 (13) を、(t^c と v^c をそれぞれ節点力 f_S^c と節点変位 u^c に変換した後、) 式 (3) に代入して u^c を消去し、式 (2) を考慮して、式 (3) を f^c について例えばニュートン法で解き、この f^c を式 (4) に代入することにより ϵ が求められるので、逆解析を行うことができる。

この方法は、接触力が接触部の微視的変形特性に依存するという物理を先験情報として取り入れているため、例えば接触力の空間的变化が滑らかである筈という先験情報を取り入れるために逆解析の解を滑らかな曲線で関数近似するという方法と比べて、より合理的にパラメータの数を減少できると考えられる。

3. 5 目的関数と逆解析の手順

Fig. 4 Assumed characteristics of nonlinear contact spring, (a) Eq. 13, (b) Eq. 15

計算による ϵ と実験結果 $\bar{\epsilon}$ の差の関数 $g(\alpha, \beta)$ を次のように定義する。

$$g(\alpha, \beta) = \log \left\{ \sum_{i=1}^p \left(\frac{\epsilon^i(\alpha, \beta) - \bar{\epsilon}^i}{\bar{\epsilon}^i} \right)^2 \right\} \quad (14)$$

式 (14) を目的関数とし、この目的関数を最小化するように、例えばシンプレックス法等⁽⁸⁾を用いて、 α および β を定める。

以上の方法をまとめて、以下に手順の形で示す。

1. 試験片を仮想的に層状に規則的に分割し、3.3 節の方法で A および B を作成する。
2. 式 (13) のパラメータ α および β を仮定して、式 (3) および (4) を用いて、 ϵ を計算する。
3. 式 (14) の目的関数が小さくなるように、 α と β の値を修正して 2 に戻り、目的関数の値が許容値以下になるまでこの計算を繰り返す。
4. こうして得られた α と β の値に対応する f^c (式 (3) により計算されている) から $-f_R^c$ を引くことによりき裂面接触力 f_S^c (式 (2) 参照) が求められる。

4. 数値解析

4. 1 解析条件

前章の手法を 2 章の実験結果に適用して、SiC 試験片中のき裂面接触力を同定する。SiC の材料定数として、ヤング率 $= 3.97 \times 10^2 \text{ GPa}$ およびポアソン比 $= 0.15$ ⁽⁹⁾ とする。対称性から試験片の 1/4 を解析対象 (図 5) とし、図 3 のように仮想的に 500 層に分割した。一つの層に対する有限要素分割図 (8 節点アイソパラメトリック要素による) を図 6 に示す。片側の面内の節点数は 630 である。したがって、式 (10) のマトリクス A' の次数は $630 \times 3 = 1890$ となる。

リガメント部では z 方向の変位が 0 であることおよびき裂面の摩擦力を 0 と仮定することを考慮すると、式 (3) の A の次数は、1562 となる。もし、この手法を

Fig. 5 One fourth of specimen to be analyzed (mm)

Fig. 6 Finite element mesh for a layer (mm)

用いなければ、剛性マトリクスの次数は $1890 \times 501 = 9.4689 \times 10^5$ となるので、計算が困難になる。

き裂面上において打ち消すべき巨視的残留応力は初期ひずみ ϵ_0 を仮定することにより求めた。 ϵ_0 としては、表面における大きさが d で、深さ方向に直線的に減少し深さ c 以上では 0 となる、試験片の長手方向 (z 方向) の初期ひずみとした。この仮定により、表面近傍に圧縮残留応力が生じ、合計がこの圧縮残留応力の合計と釣り合うような小さな引張残留応力が試験片の内部に生じる。これを等価節点力に換算して、式 (2) の f_R を求めた。

SiC では、表層部で -40 MPa 程度であると推定されるが⁽¹⁰⁾、深さ方向分布の測定値が手に入らないので、正確な解析条件が設定できない。そこで、次の 2 つの場合 (1) $c = 0, d = 0$ (2) $c = 0.02 \text{ mm}, d = 1.0 \times 10^{-4}$ について解析を行った。なお、(2) の場合の巨視的残留応力は表層部で約 -40 MPa である。

4. 2 解析結果

式 (14) をシンプレックス法により最小化した結果、ばね特性は巨視的残留応力を無視した (1) の場合は

$$\alpha = 1.7 \times 10^4 \text{ MPa/mm}, \beta = 1.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

Fig. 7 Estimated distribution of contact pressure

(2) の場合は

$$\alpha = 1.6 \times 10^4 \text{ MPa/mm}, \beta = 1.7 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

と求められた。

(2) の場合に対して得られたき裂面接触力分布を図 7 に示す。図の $x-y$ 平面はき裂面を表し、 x 軸は試験片厚さ方向であり、 $x = 0$ が試験片中央、 $x = 3$ が表面である。 y 軸はき裂長さ方向を表し、 $y = 4.5$ がき裂先端である。 $x-y$ 平面上に描かれている線は接触力の等高線である。なお、(1) の場合のき裂面接触力分布と (2) の場合の結果には $\pm 15\%$ 程度の差異しか認められなかった。次章および付録参照。

5. 逆解析精度の検討

5. 1 順解析および実験による誤差

要素分割による順解析の誤差を調べるために、要素分割の細さを種々に変えて、き裂導入時のひずみゲージの出力を計算した。その結果、本解析で用いた節点数の約 1.3 倍の節点数で要素分割して得られたひずみは本解析の結果と 0.05×10^{-6} 以下の差しか認められなかった。すなわち、本解析程度の要素分割で解はほぼ一定値に収束しているため、要素分割による順解析の誤差は無視できることがわかる。

実験において、き裂がわずかに湾曲することがある。本実験においても先端近傍で約 0.1 mm だけ湾曲していた。4 章の解析ではこのことを考慮していないので、誤差を含んでいると考えられる。この誤差の大きさを見積もるために、真直なき裂を持つ試験片と約 0.1 mm だけ湾曲したき裂を持つ試験片について 2 次元解析を行い、ひずみゲージ位置における両者のひずみを比較した。その結果、両者のひずみの差異は $\pm 1 \sim 2 \times 10^{-6}$ であった。

ひずみゲージで測定できるひずみの精度は高々 1×10^{-6} 程度であるので、この誤差と上述のき裂の湾曲を無視したことによる誤差を合わせて最大で 3×10^{-6} 程度の誤差が見積もられる。Fig. 8 は、 $\alpha = \beta = 2.0 \times$

Fig. 8 Shape of objective function and accuracy of solution

Fig. 9 Contact pressures estimated with two different spring models (Eq.13 and Eq.15)

10^4 MPa/mm を正解とする数値シミュレーションにおいて、目的関数 (14) がこの誤差 3×10^{-6} 以下になる α と β の領域を灰色で示す。この図はこの領域の大きさ以下に逆解析の解を絞りこむことは意味がないことを表している。この領域の周辺の α と β の値を数組選んで接触力を計算したところ、領域の中心の値に対応する接触力に対して $\pm 20\%$ の差異が認められた。すなわち、同定された接触力には $\pm 20\%$ の誤差が含まれていることがわかる。

5. 2 接触部のモデル化による誤差

接触部のばねモデルとして、式 (13)(Fig. 4(a)) のかわりに次式 (Fig. 4(b)) を仮定して逆解析を行い、前章の結果 Fig.7 と比較する。

$$t^c = \begin{cases} -\frac{a}{b}(v^c - b)^2 & (0 < v^c \leq b) \\ 0 & (b < v^c) \end{cases} \quad (15)$$

逆解析の結果を、比較しやすいように試験片中央 ($x=0$) 面における接触力分布を 2 次元表示して、Fig. 9 に示す。前章の結果 (破線) と最大で $\pm 8\%$ 程度の差異がある

ことがわかる。したがって、接触部のモデル化に基づく誤差は大略 $\pm 10\%$ 程度と推定される。

5. 3 巨視的残留応力などによる誤差

SiC の巨視的残留応力が表層部で -40 MPa 程度であるという報告⁽¹⁰⁾があるが、深さ方向分布の測定値が入手困難であったため、正確な解析条件が設定できなかった。このための接触力の同定誤差は、前章の (1) と (2) の同定結果が $\pm 15\%$ 以下であったことから、同程度であると推定される。

なお厳密には、き裂長さ a は試験片の板厚方向に一定ではなくわずかに (平均値 $\pm 0.1 \text{ mm}$ 程度) 変化しているが、解析では一定としている。応力拡大係数 K は $\sqrt{a}$ に比例するので、このことによる K への影響は小さい。しかし、き裂先端とひずみゲージの間の距離が解析と実際に異なるので、ひずみゲージ出力の計算に誤差が生じると考えられる。この誤差を 5.1 節のき裂の湾曲による誤差と同程度と仮定すると、このための接触力推定誤差は $10 \sim 15\%$ と見積られる。

以上の各誤差を総合すると、接触力の同定誤差は $\pm \sqrt{20^2 + 10^2 + 15^2 + 15^2} \cong \pm 30(\%)$ 程度と推定される。

6. 結 論

本研究では、SiC 試験片中にき裂を導入した時のき裂周辺のひずみ変化の測定し、この測定値を逆解析の入力とし、3次元有限要素法によってき裂面の接触力分布を推定した。

本逆問題の悪条件を緩和するために、き裂面接触部を非線形ばねでモデル化し、未知パラメータの数を減少させる方法を提案した。この方法はき裂面の接触力同定問題ばかりでなく、広く一般の接触逆問題に適用できる。

離散化された平衡方程式を直接解く代りに、試験片の断面形状が均一であることを利用して、小規模な方程式系を作成しこれを取り扱うことにより、大幅な計算時間や記憶容量を低減するという効率的解析手法を開発した。この手法は、ねじやそろばん玉のような形状の物体の3次元有限要素解析にも応用できる。

本研究を遂行する際に多くの人々から多大な援助を得た。豊田工大の岸本秀弘先生、東工大の松尾陽太郎先生および日本セメントの石田陽一氏には巨視的残留応力について多くの御教示を頂き、東工大大学院生高橋伸一郎君および小島基靖君には実験を実施して頂いた。ここに、深甚の謝意を表したい。

文 献

- (1) T. Nose and T. Fujii, J. Am. Ceramics Soc., **71**-5 (1988), pp.328-333.
- (2) T.Kishi, N.Takeda and B.N.Kim, Ceram. Eng. Sci. Proc., **11**-7/8 (1990), pp.650-664.
- (3) 青木繁, 岸本喜久雄, 高橋伸一郎, 坂田勝, 材料, **39** (1990), pp.1644-1649.
- (4) 青木繁, 浅川正敏, 中村俊雄, 機講論, No940-30 (1994), pp. 474-476.
- (5) 木原諄二, 牧野浩明, 申光憲, 塑性と加工, **25** (1984), pp.806-812.
- (6) 尾田十八, 品田智宏, 機論 (A), **53**-492 (1987), pp.1614-1621.
- (7) 久保司郎, 大路清嗣, 上田勉, 機講論, No900-86 (1994), pp.670-672.
- (8) 例えば, W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling and B.P.Flannery, Numerical Recipes in C, 2nd Edition, (1992), pp.408-412, Cambridge University Press.
- (9) 旭硝子株式会社, 旭硝子のエンジニアリングセラミックス, セラロイ・レフェル, (1985).
- (10) 田中啓介, 鈴木賢治, 中川平三郎, 砥粒加工学会誌, **34** (1990), pp.17-24.

付 録

大きな巨視的残留応力が存在する場合として, $c = 20 \times 10^{-3} \text{ mm}$, $d = 1.0 \times 10^{-3}$ (表面で約400Mpa) を想定し, $\alpha = 1.7 \times 10^4 \text{ Mpa/mm}$, $\beta = 1.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$ とした場合の接触力分布を Fig. A1 に示す. 接触力の等高線が試験片の表面付近で巨視的残留応力のために湾曲していることがわかる.

Fig.A1 Contact pressure distribution for a specimen with large macro-residual stress