非線形硬化損傷材料におけるモード I き裂の漸近応力場*

劉彦^{*1}, 村上澄男^{*1}Asymptotic Stress Field of a Mode I Crack
in a Nonlinear-Hardening Damage Material

Yan LIU and Sumio MURAKAMI

The effects of the local damage field on the asymptotic crack-tip stress field of a Mode I crack in a nonlinear-hardening material are discussed. Three kinds of the damage distribution $1-(D/D_{cr}) = h(\theta)r^m$ represented by a power function of radius r from the crack-tip are postulated for the damage variable D , and the damage effects are included into the power hardening relation by means of the effective stress concept of continuum damage mechanics. For a given strain hardening exponent n of the power hardening equation, the exponent p of the resulting asymptotic stress fields $\sigma_{ij} \propto r^p$ is found to be governed by the exponent m of the power-law damage distribution. When m increases, p is found to increase from a singular (negative) HRR exponent $p = -1/(n+1)$ to a nonsingular (positive) value, which coincides with the previous analytical result for a Mode III crack in a linear elastic-damage material. A sufficient condition $m > 1/n$ for the nonsingular crack-tip stress is obtained for both plane stress and plane strain states. The effects of the strain hardening exponent n and the stress states on the p - m - n relation are discussed in some details. The damage effects on θ -distribution of the asymptotic stress fields are also discussed.

Key Words: Damage Effects, Stress Singularity, Asymptotic Stress Field, Mode I Crack, HRR Solution, Nonlinear-Hardening Material, Power Hardening Relation, Damage Mechanics

1. 緒 言

き裂先端の漸近応力場は、材料の破壊現象を支配する重要な力学的因子であり、1960年代以後多くの研究がなされている。このうち最も重要な成果としては、線形弾性体のき裂先端応力場⁽¹⁾と非線形弾塑性体のHRR応力場⁽²⁾⁽³⁾が挙げられ、今日の破壊力学の基礎を与えている。

しかし、これらの漸近解は、理想化された弾性体あるいは弾塑性体中のき裂先端の応力特異性を与えており、必ずしもき裂先端の実際の応力状態を正確に記述するものではない。すなわち、実際の弾塑性破壊、クリープ破壊、疲労破壊などでは、き裂先端近傍で微小な分布空けきが発生・成長し、これが合体して巨視的き裂の発達を引き起こす。このような材料損傷はき裂先端近傍の剛性低下をもたらす、これが応力特異性に大きな影響を与える。

このため、損傷材料中のき裂先端漸近応力場についても、これまでいくつかの研究が報告されている。例えば、Hutchinson⁽⁴⁾ならびにZhang-Gross⁽⁵⁾はそれ

ぞれ、等方的ならびに異方的な一様分布微小き裂を含むべき乗硬化材料に対し、き裂先端近傍の漸近応力場を解析している。しかし彼らの解析は、分布微小き裂の存在にもかかわらず、いずれの場合も非損傷材料中のHRR場と同一の特異性構造を持つことを示した。

さらに、Wang-Chow⁽⁶⁾は、非損傷材料中のき裂先端に新しく損傷が発生・発達し、その大きさが現在の応力に依存すると仮定して、べき乗硬化弾塑性損傷材料中の応力場を解析した。そしてその応力特異性は、非損傷材料に対するHRR応力場のそれとほぼ同一であることを明らかにした。しかし、これらの論文では、損傷場の応力あるいはひずみ履歴に対する依存性は反映されておらず、その解析結果はき裂先端の応力特異性に対する分布微小き裂の影響を十分に明らかにするものとはいえない。

一方、Astafjev-Grigorova⁽⁷⁾はクリープ進展き裂に対し、またZhao-Zhang⁽⁸⁾は疲労進展き裂に対して、き裂先端の損傷場の発展とこれと連成した漸近応力場を解析した。しかし、これらのいずれの解析結果も、鋭いき裂の境界条件を満足しておらず、その妥当性に限界がある。

本論文では、Mode I き裂先端の応力特異性に対するき裂先端近傍損傷場の影響を系統的に明らかにする

* 原稿受付 1997年7月30日。

*1 正員、名古屋大学工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)。

ため、損傷を受けるべき乗硬化材料に対してき裂先端での漸近応力場を解析する。このとき、Mode III き裂に対する前報⁽⁹⁾の解析と同様な方法により、はじめに進展き裂先端近傍に対して一般的なべき乗形損傷場を仮定する。つづいて、損傷力学における有効応力の概念を用いてべき乗硬化の式に損傷効果を組み込み、これによって Mode I き裂の漸近応力場を解析する。

2. 材料の損傷とき裂先端近傍の損傷場

金属材料における弾塑性損傷とクリープ損傷、あるいはコンクリートの疲労損傷などでは、進展き裂前方に微小空けきが発生し、これによって材料の局所的な損傷が引き起こされる。このようなき裂先端の応力場を正確に解析するには、構成関係式の非線形性だけでなく、損傷に伴う材料の力学的特性の変化も考慮しなければならない。このような材料損傷がその力学的

特性に及ぼす影響を記述する有力な方法として、最近、連続体損傷力学⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾が発達している。

連続体損傷力学によれば、損傷の異方性が著しくない場合、損傷の力学的効果は一つの損傷変数 $D(0 \leq D \leq D_{cr})$ によって表現できる。ここで D_{cr} は、損傷変数の臨界値である。特に、損傷の力学的効果として、空けき発生による材料の有効面積の減少を考えれば、材料中の応力場に対する損傷の効果は次の有効応力によって記述できる⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / [1 - (D/D_{cr})] \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 σ_{ij} と $\bar{\sigma}_{ij}$ は Cauchy 応力と有効応力である。連続体損傷力学におけるひずみ等価性の仮説⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾によれば、損傷材料の構成式は、非損傷材料の構成式中の Cauchy 応力を式(1)の有効応力で置換することによって与えられる。

式(1)によれば、 $D = D_{cr}$ の臨界損傷状態は無限大の有効応力、すなわち最終的な破壊状態を表すことになる。したがって、材料中を進展するき裂は $D = D_{cr}$ の臨界損傷状態にある材料点の集合として取扱うことができる。以下の解析では、Mode I き裂の近傍に図1のような3種類の損傷場を考え、き裂先端に直交座標系 $O-xyz$ ならびに $O-r\theta z$ を設定する。式(1)の損傷変数 D は、き裂線のき裂先端における値 $D = D_{cr}$ から非損傷域 $D = 0$ まで変化する。本解析では、この損傷場は半径 r のべき関数として

$$1 - (D/D_{cr}) = h(\theta)r^m \dots \dots \dots (2)$$

ように表しうると仮定する。式(2)と図1の m と r_0 は損傷分布を特性づけるべき指数と損傷域の大きさを表す。また、 $h(\theta)$ は損傷変数の θ 方向分布関数であり、損傷場の形状を記述する。図1には本解析で用いた3種類の損傷分布を示す。すなわち、

(1) 損傷分布 A[図1(a)]

き裂進展開始時の損傷場は、図1(a)のような軸対称円形分布として理想化できる。このとき、関数 $h(\theta)$ は次の簡単な形になる：

$$h(\theta) = 1 \dots \dots \dots (3 \cdot a)$$

(2) 損傷分布 B[図1(b)]

実際の進展き裂では、その後方の進展経路上にも損傷場が存在する。したがって、き裂先端損傷場の θ 方向分布の影響に加え、き裂後方の損傷場の影響をも調べるため、図1(b)の損傷分布についても検討する。このとき、式(2)の関数 $h(\theta)$ は次のように与えられる。

$$h(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ (\sin \theta)^m, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \dots \dots \dots (3 \cdot b)$$

(a) Damage distribution A

(b) Damage distribution B

(c) Damage distribution C

Fig. 1 Mode I crack and damage fields

(3) 損傷分布 C [図 1(c)]

一般にき裂前方には、き裂横方向よりも大きな応力が引き起こされ、したがってき裂前方の損傷の発達は横方向のそれよりも大きい。このため、実際の進展き裂に対するより一般的な損傷場として、図 1(c)の半だ円形損傷分布についても検討する。このとき式(2)の関数 $h(\theta)$ は、次のように表される。

$$h(\theta) = \begin{cases} [(\cos \theta/k)^2 + (\sin \theta)^2]^{8/2}, & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ (\sin \theta)^m, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot c)$$

ここで $k \geq 1$ は半だ円損傷領域の形状係数(アスペクト比) [図 1(c)] である。特に、 $k=1$ は図 1(b) の損傷分布 B を表すから、以後の本論文では損傷分布 B を分布 C に含めて議論する。

3. 問題の定式化

3.1 基礎方程式 図 1 の Mode I き裂に対して、釣合い条件を満足する各応力成分は、Airy の応力関数 $\phi(r, \theta)$ より次のように与えられる。

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi(r, \theta)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial r} \quad \dots\dots\dots (4 \cdot a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi(r, \theta)}{\partial r^2} \quad \dots\dots\dots (4 \cdot b)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial \theta} \right) \quad \dots\dots\dots (4 \cdot c)$$

また、各ひずみ成分は適合条件

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial(r \varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

を満足しなければならない。

これまで弾塑性材料のき裂応力場の解析には、次のべき乗硬化の式がよく用いられてきた。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= (3/2) \alpha \sigma_{EQ}^{n-1} s_{ij} \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - (1/3) \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\sigma_{EQ} = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$$

ここで ε_{ij} , σ_{ij} , s_{ij} , σ_{EQ} はそれぞれ、ひずみテンソル、応力テンソル、偏差応力テンソル、相当応力であり、また n はひずみ硬化指数、 α は材料定数を表す。本解析では、損傷力学におけるひずみ等価性の仮説により、式(6)を、損傷を受ける弾塑性材料に拡張する。すなわち、式(6)の中の応力テンソル σ_{ij} を式(1)の有効応力テンソルで置き換えることによって、弾塑性-損傷材料の構成式は次のように書き表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= (3/2) \alpha \bar{\sigma}_{EQ}^{n-1} \bar{s}_{ij} \\ &= (3/2) \alpha \sigma_{EQ}^{n-1} s_{ij} / [1 - (D/D_{cr})]^n \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

式(2)~(5), (7)は Airy の応力関数を未知関数とした非線形偏微分方程式である。これらの式の解として、特にき裂先端近傍の応力場に対して、次のような形の漸近解を仮定する。

$$\phi(r, \theta) = Kr^s f(\theta) \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで K と s は未定定数、 $f(\theta)$ は θ だけの未知関数である。式(8)を式(4)に代入することにより、次の漸近応力場が得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) &= Kr^p [s \cdot f(\theta) + f''(\theta)] = Kr^p \bar{\sigma}_{rr}(\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= Kr^p [s(s-1)f(\theta)] = Kr^p \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= Kr^p [(1-s)f'(\theta)] = Kr^p \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) \\ \sigma_{EQ}(r, \theta) &= Kr^p \bar{\sigma}_{EQ}(\theta) \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここで p は漸近応力場のべき指数を表し、 $p=s-2$ である。また $\bar{\sigma}_{rr}(\theta)$, $\dots$ は、それぞれ式(9)の[]中の表示式によって与えられる。

式(9)の応力場と式(2)の損傷分布を式(7)に代入し、さらに得られたひずみ成分 ε_{ij} を適合条件(5)に代入すれば、未知関数 $f(\theta)$ を支配する微分方程式が導かれる。平面応力と平面ひずみ状態に対して、これらの微分方程式はそれぞれ次のようになる。

3.2 平面応力状態

$$\begin{aligned} & \left[n(s-m-2) - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] [h(\theta)^{-n} \bar{\sigma}_{EQ}^{n-1} \{s(s-3)f(\theta) - 2f''(\theta)\}] + [n(s-m-2)+1] n(s-m-2) h(\theta)^{-n} \bar{\sigma}_{EQ}^{n-1} \\ & \times [s(2s-3)f(\theta) - f''(\theta)] + 6[n(s-m-2)+1](s-1) \frac{\partial}{\partial \theta} [h(\theta)^{-n} \bar{\sigma}_{EQ}^{n-1} f'(\theta)] = 0 \quad \dots\dots\dots (10 \cdot a) \end{aligned}$$

ここで

$$\bar{\sigma}_{EQ}(\theta) = [s^2(3-3s+s^2)f(\theta)^2 + (3-6s+3s^2)f'(\theta)^2 + s(3-s)f(\theta)f''(\theta) + f''(\theta)^2]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (10 \cdot b)$$

特に非損傷材料の場合には、式(2)の損傷指数は $m=0$ 、分布関数は $h(\theta)=1$ となり、式(10)は平面応力状態の HRR 場に対する支配方程式⁽²⁾に帰着する。

損傷場が存在する場合、式(3)を式(10)に代入すれば、損傷分布 A と損傷分布 B, C の支配方程式が得られる。特に、損傷分布 B, C の場合、領域 $[0, \pi/2]$ と $[\pi/2, \pi]$ における分布関数 $h(\theta)$ が異なるため、領域ごとに支配方程式の形も違う。紙面の都合上、これらの方程式の詳細は省略する。

3・3 平面ひずみ状態

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - n(s-m-2)\{n(s-m-2)+2\} \right] [h(\theta)^{-n} \bar{\sigma}_{EQ}^{n-1} \{s(2-s)f'(\theta) + f''(\theta)\}] \\ + 4(s-1)[n(s-m-2)+1] \frac{\partial}{\partial \theta} [h(\theta)^{-n} \bar{\sigma}_{EQ}^{n-1} f'(\theta)] = 0 \quad \dots\dots\dots (11 \cdot a)$$

ここで

$$\bar{\sigma}_{EQ} = \{3[s(2-s)f(\theta) + f''(\theta)]^2/4 \\ + 3(1-s)^2 f'(\theta)^2\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (11 \cdot b)$$

平面応力状態と同様、非損傷材料の場合、式(11)は平面ひずみ状態の HRR 場に対する支配方程式⁽²⁾に帰着する。また、式(3)を式(11)に代入すれば、損傷分布 A と損傷分布 B, C に対する支配方程式が得られる。

3・4 境界条件と Shooting 法 Mode I き裂では、

応力 σ_{rr} と $\sigma_{\theta\theta}$ がき裂面に対して対称であるから、式(9)により関数 $f(\theta)$ と $f''(\theta)$ は偶関数となり

$$f'(0)=0, \quad f''(0)=0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

を得る。また、き裂面上では応力 $\sigma_{r\theta}$ と $\sigma_{\theta\theta}$ が零にならないから、次の条件が与えられる。

$$f(\pi)=0, \quad f'(\pi)=0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

微分方程式(10)あるいは(11)と境界条件式(12), (13)は、損傷材料における Mode I き裂先端近傍の漸近応力場に対する二点境界値問題を与える。

このような二点境界値問題は、Shooting 法⁽²⁾によって初期値問題として解くことができる。このためには、初期条件(12)のほかに初期値 $f(0)$ と $f''(0)$ が必要である。微分方程式(10)と(11)は関数 $f(\theta)$ に関して斉次であるから、 $f(\theta)$ が問題の解であれば、任意定数と $f(\theta)$ の積も問題の解になる。このため、 $f(\theta)$ の大きさに対して次のような正規化を行う。

$$f(0)=1 \quad \dots\dots\dots (14)$$

したがって、この Shooting 法における未知の初期条件として、 $f''(0)$ の値を適当に規定する必要がある。このため、適当な未知定数 β を仮定し、

$$f''(0)=\beta \quad \dots\dots\dots (15)$$

として微分方程式(10)あるいは(11)の積分を開始する。なお積分によって得られた解は、 $\theta=\pi$ での境界条件式(13)を満足しなければならない。本解析では、式(13)の二つの条件は、式(15)の β と式(8)のべき指数 s の値を適当に与えることによって満足させることができる。

3・5 数値計算方法

与えられた損傷場[すなわち与えられた $m, h(\theta)$]に対し、式(8)のべき指数 s と初期値 $f''(0)=\beta$ を規定すれば、Shooting 法により微分方程式(10)あるいは(11)を積分できる。すなわち s, β の値を適当に規定して求められた $f(\pi)$ と $f'(\pi)$ の値を $f(\pi)=F_1(s, \beta)$ と $f'(\pi)=F_2(s, \beta)$ とすれば、

き裂面上の境界条件

$$f(\pi)=F_1(s, \beta)=0$$

$$f'(\pi)=F_2(s, \beta)=0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

を満たす解、すなわち固有値 s^*, β^* とそれに対応する固有関数 $f(\theta)$ は、 s と β の試探によって求められる。

一般に式(16)を満足する固有値 s^*, β^* は唯一ではないから、最低次のべき指数 s の解だけを求める。すなわちこの s に対応する応力場は、 $r \rightarrow 0$ のときの漸近応力を与えるものと考えられる。また、最低次のべき指数 s のとりうる範囲については、き裂先端を含む材料要素 V でなされる応力の仕事

$$P = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv \quad \dots\dots\dots (17)$$

が有限であることを考え、式(2), (4), (7)と式(8)を式(17)に代入することによって、次の結果が得られる。

$$s > (2+m)n/(n+1) \quad \dots\dots\dots (18)$$

微分方程式(10)と(11)の数値積分は、汎用数式処理システム Mathematica と Maple の 4 階 Runge-Kutta パッケージを用いて行った。非線形連立方程式(16)の解は、Gauss-Newton 最小二乗法を用いて $f(\pi)^2 + f'(\pi)^2 < 10^{-6}$ を満足する s^*, β^* と $f(\theta)$ を求めた。

4. 解析結果および考察

4・1 応力特異性に対する損傷場の影響

図 2(a), (b)には、平面応力状態と平面ひずみ状態に対し、損傷分布のべき指数 m と応力特異性の指数 p との間の関係をひずみ硬化指数 n のいくつかの値について示す。ここで実線と破線は、それぞれ損傷分布 A と B に対する結果である。図 2 に見られるように特異性指数 p は、損傷分布指数 m の増加とともに、応力分布が特異性を示す負値から特異性がない正值に変化する。すなわち、式(2)で表される損傷分布指数 m が十分大であれば、あるいはき裂先端への損傷の局所化が著しくなければ、損傷場の影響によって漸近応力場の特異性が消失する。

き裂先端の材料損傷による応力の特異性の消失は、損傷を受ける弾性体 ($n=1$) 中の Mode III き裂に対してもすでに示されており⁽⁹⁾、応力場のべき指数に対して

$$p = (\sqrt{m^2 + 1} + m - 2)/2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

のような解析結果が得られている。図 2(a) の点線に見られるように、 $n=1$ の平面応力状態に対する Mode I き裂の p - m 関係は、Mode III き裂の解析解 (19) とほぼ一致していることがわかる。

これらの結果によれば、式 (2) のような損傷場の存在により、非線形材料の Mode I き裂に対する漸近応力場の HRR 特異性が除去されることになる。これは、き裂近傍の応力場に対する損傷場の影響として、極めて重要な結果と考えられる。

4.2 ひずみ硬化指数 n の影響 べき乗硬化の式 (6) のひずみ硬化指数 n は、材料の硬化特性を記述する尺度としてよく使われている。非線形硬化弾塑性材料に対する HRR 応力場⁽⁶⁾ の場合、応力分布の特異性指数 p はひずみ硬化指数 n だけによって決まり、次式のようになる⁽²⁾⁽³⁾。

$$p = -1/(n+1) \quad \dots\dots\dots (20)$$

この式を見れば、 $r \rightarrow 0$ のときの応力特異性は塑性変形によって弱められるが、非特異 ($p=0$) になるためには n は無限大の値、すなわち完全塑性とすることが必要である。

図 3(a), (b) には、平面応力状態と平面ひずみ状態に対し、式 (20) の結果とともにき裂先端の損傷場を考慮した本解析の p - n 関係を示す。図 3 から明らかなように、き裂先端に損傷場のある場合 ($m > 0$) の p の値は、式 (20) で与えられるよりもさらに大きくなり、有限の n 値に対しても非特異 ($p > 0$) の応力場が得られる。非損傷線形弾性体 ($p = -1/2$) と比較すれば、 $p = -0.5$ から所定の n に対する HRR 曲線 ($m=0$) までの p 値の増加が材料の非線形性の影響であるが、そこから非特異範囲までの p 増加がき裂先端損傷場の効果と考えられる。また、損傷場の効果は損傷分布のべき指数 m の大きさに著しく依存し、 m 値が大きく

Fig. 2 Effects of damage distribution on stress singularity

Fig. 3 Effects of strain-hardening on stress singularity

なるほど損傷の影響が大きくなる。

4.3 損傷領域の形状の影響 図2において、損傷分布 A, B の結果を比較する。はじめに、平面応力状態における応力特異性に対しては、損傷分布 A, B の間の差はほとんど認められず、き裂後方の損傷領域の影響は小さいことがわかる。すなわち、図1(a)のような軸対称損傷分布 A に比べて、その後方の進展経路上の損傷の軌跡を加えた損傷分布 B ($k=1$) でも、応力特異性指数 p と損傷分布指数 m の関係はほとんど変わらない。これに対して図2(b)の平面ひずみ状態の場合、損傷分布 B のほうが A の場合よりも若干大きな p の値を示すことがわかる。

次に、損傷領域の形状の影響をさらに詳細に検討するため、損傷分布 C のき裂前方損傷領域の形状に対して形状係数 $k=1.0\sim 3.0$ の間で五つの k の値を選んで解析した。図4(a), (b)は、平面応力状態と平面ひずみ状態の $n=5$ の場合に対して、損傷領域の形状係

数 k [図1(c)] と応力特異性指数 p の関係を示す。図4から、いずれの損傷分布指数 m に対しても、形状係数 k の影響は非常に小さいことがわかる。これは、漸近応力場の特異性(あるいは非特異性)を支配するのは、損傷領域の全体の形状ではなく、損傷の場所的分布特性であることを意味する。

なお、後出図7, 9に見られるように、損傷の分布領域の形状は、応力成分の大きさに対しては比較的大きな影響を与える。特に、Mode III き裂に対する有限要素解析結果⁽⁹⁾によれば、円形損傷分布 A の応力の大きさは、このような損傷場に加えてき裂後方の損傷分布を考慮した場合よりも約30%大きな値を与えている。

4.4 応力状態の影響 図2~4に示す結果は、すべて平面応力状態と平面ひずみ状態に対するものである。図5には、損傷分布 A に対して、平面応力状態と平面ひずみ状態における応力特異性の指数 p と損傷分布のべき指数 m の関係を比較する。同じ損傷分布指数 m に対して、平面ひずみ状態の応力特異性が平面応力状態のそれよりも強いことがわかる。

線形材料と非線形材料のいずれに対しても、材料損傷がない場合には平面応力状態と平面ひずみ状態におけるき裂先端応力場の特異性は同一であって、式(20)で与えられる。しかし延性材料の破壊試験によれば、厚いき裂試験片の破壊靱性値は薄い試験片のそれよりも小さいことが知られており、一般にこれは平面ひずみの場合に発生する応力三軸性の効果として解釈されている。しかし図5によれば、き裂先端の損傷場が存在する場合には、このような応力三軸性に加えて、応力特異性も平面ひずみ状態の方が厳しくなり、したがって平面ひずみ状態の破壊靱性値が平面応力状態に比

(a) Plane stress state

(b) Plane strain state

Fig. 4 Effects of damage zone shape

Fig. 5 Approximate expression of p - m - n relation

Fig. 6 Effects of damage fields on θ -distribution of crack-tip stresses for plane stress

Fig. 8 Effects of damage fields on θ -distribution of crack-tip stresses for plane strain

Fig. 7 Comparison of θ -distribution of stresses for damage distribution A and B under plane stress state

Fig. 9 Comparison of θ -distribution of stresses for damage distribution A and B under plane strain state

べていっそう大きく低下する可能性のあることに注意する必要がある。

4・5 応力特異性指数 p と損傷分布指数 m の間の近似関係式 以上の計算結果はすべて、 $f(\theta)$ に関する微分方程式(10)あるいは(11)を境界条件式(12)、(13)の下で数値積分したものであって、硬化指数 n 、損傷分布のべき指数 m の限られた値に対して求められている。しかしながら、 n, m の値の一層広い範囲に対する知見を得るためには計算結果の解析的な表示が望まれる。このため、本研究では、図 2, 5 に示す損傷分布 A の応力特異性指数 p に対し、次のような p - m - n 近似式を導いた。

平面応力：

$$p = \frac{-2 + m[(1 + m^{-1-n})^{1/(n+1)} + n^{1+2/(5n)}]}{n+1} \quad \dots\dots\dots(21)$$

平面ひずみ：

$$p = \frac{-1 + mn}{n+1} \quad \dots\dots\dots(22)$$

なお平面応力の近似式(21)の形は、図 2(a)の結果を参照し、 $n=1$ のとき Mode III き裂の解析解(19)と一致し、さらに $n=\infty$ のときには $p=m$ となるように定めた。このとき、 $n=\infty$ に対して式(21)は平面ひずみの近似式(22)とも一致する。図 5 には、数値解析結果とともに近似式の結果が示してあるが、 $m < 0.5$ の範囲において式(21)、(22)はそれぞれ 5% 以下および 3% 以下の誤差で数値解析結果と一致している。

式(21)、(22)の近似式は損傷分布 A の計算結果に対して得られたものであるが、損傷分布 A と B, C の違いが小さい場合(図 2)では、損傷分布 B, C の近似式としても用いることができる。

平面ひずみ、あるいは硬化指数 n が十分大きい平面応力の場合には、応力特異性指数 p と損傷分布指数 m の関係は近似的に線形であることがわかる。この線形関係(22)から、応力特異性が消失するための損傷指数 m_{NSIG} が次のように与えられる。

$$m_{NSIG} > 1/n \quad \dots\dots\dots(23)$$

図 5 に見られるように、同じ応力特異性指数 p になるための平面応力状態の m の値は平面ひずみ状態のそれより小さいから、式(23)は平面応力状態に対しても応力特異性が消失するための十分条件となる。

4・6 応力の θ 方向分布関数 図 6~9 は、き裂先端応力場の θ 方向分布に対する計算結果を示す。応力場(9)の係数 K が未知であるため、計算結果はすべて相当応力の θ 方向分布関数が $\bar{\sigma}_{EQ}(0)=1$ となるように正規化してある。

図 6 と図 8 はそれぞれ、損傷分布 A の場合の平面応力状態と平面ひずみ状態に対し、硬化指数 $n=5$ 、損傷分布のべき指数 $m=0, 0.5, 1.0$ のときの応力場の θ 方向分布である。特に、 $m=0$ の場合の分布は非損傷材料の HRR 応力場に相当するが、 m の値の増加に伴って、各応力成分の θ 方向分布がなめらかになる。またいずれの場合も、き裂前方($\theta=0$)の静水応力が損傷分布指数 m とともに減少するが、この傾向は、図 8 の平面ひずみの場合に特に著しい。

図 7 と図 9 はそれぞれ、平面応力と平面ひずみの場合について、 $n=5, m=0.5$ の θ 方向応力分布に対する損傷分布領域 A, B の違いの影響を示す。図 7 の平面応力の場合、この損傷分布領域の影響は、角度 θ が十分大きいき裂後方に認められるだけである。これに対して、図 9 の平面ひずみの場合では、き裂後方の損傷の軌跡が、き裂後方だけではなく、き裂前方の静水応力にも影響する。図 1(b)の損傷分布 B を用いる場合、き裂面が完全損傷状態としてモデル化されているため、 $\theta=180^\circ$ の各応力成分とも零になり、したがって、ここでは損傷分布 A の結果とは異なっている。

5. 結 言

き裂先端の特異応力場に対する先行損傷場の影響を明らかにするため、弾塑性材料に対するべき乗硬化形構成式

$$\varepsilon_{ij} = (3/2) \alpha \sigma_{EQ}^{n-1} s_{ij}$$

を弾塑性-損傷材料に対して拡張するとともに、き裂周辺の損傷分布をべき乗損傷分布

$$1 - (D/D_{cr}) \propto h(\theta) r^m$$

によって表し、Mode I き裂の漸近応力場を次のように求めた。

$$\sigma_{ij} = K \cdot r^p \bar{\sigma}_{ij}(\theta)$$

この結果、漸近応力場の特異性の指数 p と応力成分の θ 方向の分布関数 $\bar{\sigma}_{ij}(\theta)$ に対して、次の結論を得た。

(1) き裂先端の応力特異性は、損傷場の存在によって大きな影響を受け、損傷分布指数 m の増大に伴って漸近応力場の特異性指数 p が HRR 特異性 $p = -1/(n+1)$ から非特異な正值まで増加する。

(2) ひずみ硬化指数 n が大きくなれば、応力特異性の消失に必要な損傷分布指数 m の値が小さくなる。平面応力状態とひずみ状態に対し、応力の特異性が消失するための十分条件は $m > 1/n$ である。

(3) 漸近応力場の特異性指数 p に対する損傷分布領域の形状 $h(\theta)$ の影響は小さい。

(4) き裂先端に損傷場が存在する場合、平面ひずみ状態におけるき裂先端応力場の特異性は、平面応力

のそれに比べて大きい。このことは、応力特異性が平面ひずみ状態と平面応力状態に対して同一となる非損傷材料の場合とは著しく異なった傾向である。

(5) 損傷の影響により、応力成分の θ 方向分布はなめらかになり、しかもき裂前方 ($\theta=0$) の静水応力が大きく減少する。

最後に、本研究の一部は、平成8年度文部省科学研究費補助金基盤研究(A)(1)(課題番号 07555346)の助成によるものであり、ここに記して謝意を表す。

文 献

- (1) Irwin, G. R., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **24** (1957), 361.
- (2) Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, **16** (1968), 13-31.
- (3) Rice, J. R. and Rosengren, G. F., *J. Mech. Phys. Solids*, **16** (1968), 1-12.
- (4) Hutchinson, J. W., *Acta Met. Mate.*, **31-7** (1983), 1079-1088.
- (5) Zhang, Ch. and Gross, D., *Int. J. Fract.*, **60-2** (1993), 107-120.
- (6) Wang, J. and Chow, C. L., *Int. J. Fract.*, **54-2** (1992), 164-183.
- (7) Astafjev, V. I. and Grigorova, T. V., *Mech. Solids*, **30-3** (1995), 144-149.
- (8) Zhao, J. and Zhang, X., *Eng. Fract. Mech.*, **50-1** (1995), 131-40.
- (9) 劉彦・村上澄男, 機論, **63-614**, A(1997), 2084-2091.
- (10) Kachanov, L. M., *Introduction to Continuum Damage Mechanics*, (1986), Martinus Nijhoff.
- (11) Lemaitre, J., *A Course on Damage Mechanics*, (1992), Springer-Verlag.