非同次・非線形問題に対する境界要素法の一定式と解法* (第2報, 未知関数の導関数を含む非同次項の場合)

許 松 青^{*1}, 神 谷 紀 生^{*2}

A Formulation and Solution for Boundary Element Analysis of Inhomogeneous-Nonlinear Problem (2nd Report, The Case Involving Derivatives of Unknown Function)

Song Qing XU and Norio KAMIYA

A new formulation for the boundary element analysis of inhomogeneous/nonlinear POISSON problem was proposed previously by present authors. The formulation is further extended here to cope with the case where derivatives of unknown function are included in the inhomogeneous terms. Two polynomial interpolations in terms of the space coordinates are employed: one for the inhomogeneous term and the other for the unknown function. Taking the computing points on the boundary as well as inside domain, the equations on these points are employed to determine the unknown coefficients in the polynomials by using the least square method. Two-dimensional examples are considered.

Key Words: Boundary Element Method, Nonlinear POISSON Problem, Computing Point Analysis, Polynomial Interpolation, Local Iteration, Least Square Method

1. は じ め に

前報⁽¹⁾において著者は, 非同次項に未知関数を含む Poisson 方程式を境界要素離散化だけによって解析する方法(計算点解析法と名付ける)を提案した。この方法は, 非同次項を空間座標の多項式で表示し, 積分方程式に現れる非同次項に関する領域積分を境界積分に変換する方法である。二重相反法においても類似の方法があるが⁽²⁾⁽³⁾, 境界積分への変換の方法が著者の方法とは違うとともに, 多項式近似が唯一性を持たないので, 選点における近似関数の値の行列(これを選点行列と呼ぶ)が特異または特異に近く, 特別の注意が必要であることが指摘されていた⁽⁴⁾。これに対し, 計算点解析法は, 非同次項が境界および領域内部の特定の点(これを計算点と名付けた)で成り立つ関係をもとにして, 最小二乗法により多項式表示の未知係数を求める方法によるので, 方程式の元数が減少することと, 特異に近い挙動が現れず, 有効な解析ができることがわかった。

非同次項に未知関数の導関数が含まれる場合には,

上記の方法では積分方程式を微分した関係を用いる必要が生じるので, 積分方程式の特異性が高くなる。ここではそのような方法を用いずに, 非同次項を多項式近似するとともに, 同時に未知関数をも多項式で近似して, 導関数が含まれる非同次項を伴う問題の境界要素解析が可能な方法を考える。二次元 Poisson 方程式を例にとって, 定式化を例題の解析とともに示す。

2. 定 式 化

境界 Γ で囲まれた二次元閉領域 Ω について, 次のような非線形 Poisson 方程式を考える。

$$\nabla^2 u(x, y) + b\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで u はポテンシャル, b は非同次項を表し, 未知関数 u およびその導関数を含むものとする。Laplace 方程式の基本解 u^* を用いて, 式(1)を積分方程式に変換すれば, 非同次項 b に基本解 u^* を掛けた項が領域積分 $(B \equiv \int_{\Omega} u^* b d\Omega)$ として現れる。これを境界積分だけによって表すことが, 本研究の目的である。

2・1 非同次項の近似 まず, 未知定数 c_j を係数とする座標 x, y の多項式によって, 非同次項 $b(u$ お

* 原稿受付 1997年7月22日。

*1 名古屋大学大学院(〒464-8601 名古屋市千種区不老町)。

*2 正員, 名古屋大学情報文化学部。

よびその微係数は x, y の関数であるから, b は最終的には x, y の関数となる) を仮りに表示する. 多項式の次数は, 問題に応じて決める. ここでは, 4 次までの完全多項式を用いるものとして, 次のようにする.

$$\begin{aligned} b(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial^2 u/\partial x^2, \dots) \\ \approx c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2 \\ + c_7 x^3 + c_8 x^2 y + c_9 xy^2 + c_{10} y^3 \\ + c_{11} x^4 + c_{12} x^3 y + c_{13} x^2 y^2 + c_{14} xy^3 + c_{15} y^4 \\ \equiv \sum_{j=1}^{15} c_j r_j(x, y) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

したがって

$$B \approx \sum_{j=1}^{15} c_j \int_{\Omega} u^* r_j(x, y) d\Omega \dots\dots\dots (3)$$

Cheng ら⁽²⁾ と Partridge⁽³⁾ は, b の多項式近似により二重相反法を用いて境界積分に変換する方法を提案したが, 二重相反法における特解の唯一性がない(特解の一部分を用いている)ので, これを適切に決めるのは非常に難しい. 本研究では, 特解を利用せずに, 式(3)の各項に相反定理(Green の積分定理)を有限回(ここでは, 4 次まで多項式を用いるから, 3 回以内)適用して, 境界積分によって表される次の式を得る.

$$B = \sum_{j=1}^{15} d_j c_j \dots\dots\dots (4)$$

ただし, d_j はいわゆる高次基本解に関する境界積分として表される⁽¹⁾. このようにして, 非同次項 b に関する領域積分は境界積分だけによって表された.

境界 Γ に n 個の線形要素をとり, 境界積分方程式を離散化する. ソース点を n 個の境界選点, m 個の内部選点にとって考えれば, 次のような方程式を得る.

$$Hu = Gq + Dc \text{ (on boundary nodes)} \dots\dots (5)$$

$$2\pi u' + H'u = G'q + D'c \text{ (on internal points)} \\ \dots\dots\dots (6)$$

ここで, u, q は境界節点の u, q のベクトル, H, G と H', G' は境界選点, 内部選点におけるそれらの係数行列, c は b の未知定数 c_j のベクトル, D と D' は境界選点, 内部選点における c の係数行列, u' は内部選点の u のベクトルである.

式(5), (6)に Γ 上での境界条件を与え, 境界未知数ベクトルを f として整理すると次の式になる.

$$Af = p + Dc \dots\dots\dots (7)$$

$$2\pi u' + A'f = p' + D'c \dots\dots\dots (8)$$

ここで, A と A' は境界選点, 内部選点における境界未知数ベクトルの係数行列, p と p' は境界選点, 内部選点における既知数に係数行列を掛けて得られるベクトルである. 式(7)と式(8)では, 方程式の数が $n \times m$ 個, 未知数 (f, u', c) の数が $n + m + 15$ 個である.

ほかに方程式がなければ, 未知数の値を決めることができない. 選点 i (これを計算点と名付けた) において, 非同次項 b の値(これを b_i とおく)には, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} b(x_i, y_i, u_i, \partial u_i/\partial x, \partial u_i/\partial y, \partial^2 u_i/\partial x^2, \dots) &\equiv b_i \\ &= \sum_{j=1}^{15} c_j r_j(x_i, y_i) \equiv \sum_{j=1}^{15} k_{ij} c_j \equiv \phi_i(c_j) \dots\dots (9) \end{aligned}$$

n 個の境界選点のうちの $\bar{n}$ 個の境界計算点(BCP と略記)を取り, m 個の内部選点を内部計算点(ICP と略記)として取る(なお, ここで $\bar{n} \leq n$). 解の精度を確保するためにはある個数以上の BCP を取ることは不可欠であるが, 境界要素解析に用いられるすべての境界選点を BCP にする必要はない. また, BCP だけでなく, ICP をとる理由は, 関数の近似がより適切に行えるものとの考えに基づく. 各境界・内部計算点ごとに成り立つ式(9)をまとめれば, $m + \bar{n}$ 個の式が得られる.

$$b_{(m+\bar{n}) \times 1} = K_{(m+\bar{n}) \times 15} c_{15 \times 1} \dots\dots\dots (10)$$

ここで, b は計算点における b_i のベクトル, K は計算点における c の係数行列である. 式(10)の行列の大きさは添字で示してある.

従来の二重相反法⁽²⁾⁻⁽⁴⁾ では, ここで計算点と名付ける点はすべての境界選点, 内部選点にとり, 選点方程式 [式(10)に相当する] により未知係数を u_i の関数で表し, 境界要素方程式に代入し, 未知数を求める方法が取られた. しかしながら, b が u およびその微係数について非線形の場合は, 代入した境界要素方程式は元数が多く, しかも非線形になり, 解を求める計算は極めて難しい. また, Haar の定理により, 二次元, 三次元の問題に対する多項式近似は唯一性を持たない⁽⁴⁾ ので, 選点行列 (K に相当する) は特異または特異に近くなる⁽²⁾⁽³⁾. Cheng ら⁽²⁾ と Partridge⁽³⁾ は, 選点行列を特異値分解することにより, 未知係数を求めた. 本研究では, この特異性を回避するために, $m + \bar{n}$ を 15 以上にとるがすべての選点とせず, 最小二乗法により未知数を求める. さらに, 効率的に非線形方程式を解くために, 局所反復法⁽⁵⁾ の手法を応用して, 非線形方程式の数を最小限に絞り, 特定の未知量だけについて反復計算を行って解を得る.

まず, 境界要素方程式(7), (8)により, 未知数 f, u' を未知係数 c で表す.

$$f = A^{-1}p + A^{-1}Dc \dots\dots\dots (11)$$

$$u' = \{p' - A'A^{-1}p + (D' - A'A^{-1}D)c\} / 2\pi \\ \dots\dots\dots (12)$$

したがって, 計算点 i での u_i は c_j の関数として表すことができ, Neumann 条件が指定される境界計算点

については式(11), 内部計算点については式(12), Dirichlet 条件が指定される境界計算点についてはその境界条件により与えられる。\$c_j\$ を含む項と含まない項に分けて表せば, 形式的に次の式が成り立つ。

$$u_i = u_i^0 + \sum_{j=1}^{15} d_{ij}^0 c_j \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

2・2 未知関数の近似 非同次項 \$b\$ が未知関数 \$u\$ の関数である場合(\$u\$ の導関数を含まない)は, 式(13)により, 計算点 \$i\$ における \$b_i\$ は \$c_j\$ の関数として表すことができるが, 非同次項 \$b\$ が \$u\$ の導関数を含む場合は, これを \$c_j\$ の関数として表すことが必要である。もし境界積分方程式から \$u\$ の導関数を求めることにすれば, 積分方程式の特異性が高くなるかあるいは超特異になる。ここでは, 未知関数 \$u\$ を座標 \$x, y\$ の多項式によって近似し, それから \$u\$ の導関数を求める。計算を簡単化するために, \$b\$ の多項式近似と同じように, 4 次までの完全多項式を用いる。

$$u \approx \sum_{j=1}^{15} c_j' r_j(x, y) \quad \cdots \cdots \cdots (14)$$

ここで, \$c_j'\$ は式(2)の係数 \$c_j\$ と違う。したがって

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \sum_{j=1}^{15} c_j' \frac{\partial r_j(x, y)}{\partial x} \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

同じように, \$\partial u/\partial y, \partial^2 u/\partial x^2, \partial^2 u/\partial y^2, \dots\$ を求めることができる。計算点 \$i\$ において \$u_i\$ は次のようになる。

$$u_i \approx \sum_{j=1}^{15} c_j' r_j(x_i, y_i) \equiv \sum_{j=1}^{15} k_{ij} c_j' \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

ここで, 係数 \$k_{ij}\$ は式(9)の係数 \$k_{ij}\$ と同じである。式(13), (16)により, 次の式を得る。

$$\sum_{j=1}^{15} k_{ij} c_j' = u_i^0 + \sum_{j=1}^{15} d_{ij}^0 c_j \quad \cdots \cdots \cdots (17)$$

各境界・内部計算点ごとに成り立つ式(17)をまとめれば, \$m + \bar{n}\$ 個の式が得られる(ただし, 特異性を回避するために, \$m + \bar{n}\$ を 15 以上にしなければならぬ)。これらの式について, 最小二乗法を用いて, 次の式が成り立つ。

$$\tilde{K} \mathbf{c}' = \tilde{\mathbf{u}}^0 + \tilde{\mathbf{D}}^0 \mathbf{c} \quad \cdots \cdots \cdots (18)$$

ここで, 上記ベクトルと行列の成分は次のようになる。

$$\tilde{k}_{ij} = \sum_{i=1}^{m+\bar{n}} k_{ij} k_{ii}, \quad \tilde{u}_i^0 = \sum_{i=1}^{m+\bar{n}} u_i^0 k_{ii}, \quad \tilde{d}_{ij}^0 = \sum_{i=1}^{m+\bar{n}} d_{ij}^0 k_{ii}$$

式(18)により, \$\mathbf{c}'\$ を \$\mathbf{c}\$ で表すことができる。

$$\mathbf{c}' = \tilde{K}^{-1} \tilde{\mathbf{u}}^0 + \tilde{K}^{-1} \tilde{\mathbf{D}}^0 \mathbf{c} \quad \cdots \cdots \cdots (19)$$

一方, 式(16)により, 計算点 \$i\$ について, 未知数 \$u\$ の導関数 \$\partial u_i/\partial x\$ は, つぎのようになる。

$$\partial u_i/\partial x \approx \sum_{j=1}^{15} c_j' \frac{\partial r_j(x_i, y_i)}{\partial x} \equiv \sum_{j=1}^{15} k_{ij}' c_j' \quad \cdots \cdots \cdots (20)$$

同じように, 導関数 \$\partial u_i/\partial y, \partial^2 u_i/\partial x^2, \partial^2 u_i/\partial y^2, \dots\$ は \$c_j'\$ によって表される。したがって, 式(19)により, 計算

点 \$i\$ での \$u\$ の導関数は \$c_j\$ の関数として表すことができる。このようにして, 計算点 \$i\$ における \$b_i\$ は, 次のように \$c_j\$ の関数として表された。

$$b_i \equiv b(x_i, y_i, u_i, \partial u_i/\partial x, \partial u_i/\partial y, \partial^2 u_i/\partial x^2, \dots) \\ \equiv \varphi_i(c_j) \quad (j=1, 2, \dots, 15) \quad \cdots \cdots \cdots (21)$$

ここで, \$u_i\$ は式(13), \$\partial u_i/\partial x, \partial u_i/\partial y, \partial^2 u_i/\partial x^2, \dots\$ は式(20)などにより与えられる。

2・3 未知係数の決定 計算点における非同次項 \$b\$ の値について, 式(9)と式(21)の二つの表示が得られ, 計算点 \$i\$ について次の式が成り立つ。

$$\psi_i(c_j) \equiv \varphi_i(c_j) - \varphi_i(c_j^t) = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (22)$$

各境界・内部計算点ごとに成り立つ式(22)をまとめれば, \$m + \bar{n}\$ 個の式が得られる。\$b\$ が \$u\$ およびその導関数について線形であれば式(22)は線形な式になるので, 最小二乗法によって \$c_j\$ を決めることは容易である。\$b\$ が \$u\$ およびその導関数の非線形関数であるときは, \$\psi_i(c_j)\$ を次のように Taylor 展開する。

$$\psi_i(c_j) \approx \psi_i(c_j^{t-1}) + \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial c_j} \right]_{c_j^{t-1}} (c_j - c_j^{t-1}) \\ \equiv \psi_i(c_j^{t-1}) + \sum_{j=1}^{15} J^{t-1}[i][j] \cdot \Delta c^t[j] = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (23)$$

ここで

$$J^{t-1}[i][j] = \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial c_j} \right]_{c_j^{t-1}}, \quad \Delta c^t[j] = c_j - c_j^{t-1}$$

添字 \$t\$ は反復計算における回数を示す。すべての計算点における \$\psi_i(c_j)\$ の二乗和を最小にする。

$$\sum_{i=1}^{m+\bar{n}} \psi_i^2(c_j) \longrightarrow \text{Min} \quad \cdots \cdots \cdots (24)$$

したがって, 次の式を得る。

$$\sum_{i=1}^{m+\bar{n}} \psi_i(c_j^{t-1}) \cdot J^{t-1}[i][l] \\ + \sum_{j=1}^{15} \left\{ \sum_{i=1}^{m+\bar{n}} J^{t-1}[i][j] \cdot J^{t-1}[i][l] \right\} \cdot \Delta c^t[j] = 0 \\ (l=1, 2, \dots, 15) \quad \cdots \cdots \cdots (25)$$

式(25)から \$\Delta c^t[j]\$ を求め, 次の式

$$\mathbf{c}^t = \mathbf{c}^{t-1} + \Delta \mathbf{c}^t \quad \cdots \cdots \cdots (26)$$

により \$\mathbf{c}^t\$ を更新する。収束条件は \$\psi_i(c_j)\$ の二乗和がある値より小さくするものとする。求めた \$\mathbf{c}\$ を式(11)と式(12)に代入すれば, 境界点と内部点の未知の値を得る。

3. 計算例と検討

ここでは, 定式化において示した非線形 Poisson 問題について, 計算点解析法の有効性を検討する。まず, 正方形領域の例について, 解の精度およびそれを決定する要因を考察する。つづいて, 複雑な領域の例にお

ける解析を行い、計算点解析法の応用の可能性を調べる。次のような支配方程式について二次元ポテンシャル問題を考える。

$$\nabla^2 u - 6\sqrt{y} \sqrt{\partial u / \partial x} = 0$$

このとき、非同次項は

$$b = -6\sqrt{y} \sqrt{\partial u / \partial x}$$

である。なお、境界条件は、解析解が

$$u = 3x^3y$$

で与えられるように指定する。以下で考えるいずれの二次元領域についても、 x 軸に垂直な境界では u の値を与え、 y 軸に垂直な境界では $q (\equiv \partial u / \partial v, v$ は境界における外向き単位法線) を指定している。境界要素としては直線で表される線形要素を用いる。

図1に示す正方形の例において、境界要素数を $n=40, 20$ 、境界計算点数を $\bar{n}=40, 20$ 、内部計算点数を $m=5, 1, 0$ とした。 $n=40, \bar{n}=20, m=1$ のとき、点 $S=0$ から境界に沿って反時計回りにはかった長さ S に対して u, q, b の値を、図2(a), (e), (g)に示している。これは厳密解に極めてよい一致を示す。また、非線形方程式を局部反復法(特定の未知数だけに対する反復計算)によって解くとき、種々の初期値を用いたが、いずれにおいても極めて早く収束する(5回反復以内、収束条件は 10^{-4})ことが確認された。

この例について、解の精度を決定する諸要因の影響を検討する。計算を簡単化するために、均一に境界要

素を分割し、均一に境界計算点と内部計算点を配置する。したがって、解の精度に影響を与える要因は境界要素数 (n)、境界計算点数 ($\bar{n}$) と内部計算点数 (m) である。ここで、 $n=40, \bar{n}=20, m=1$ を基本として、それらの数が変化したときの解の精度の変化を考察する。図2(b), (f), (h)は、 u, q, b の相対誤差を n が40, 20における場合についての比較したものであり、境界要素数の増加により解の精度が改善されることがわかる。図2(f)において、境界の角の点とその付近の点の q の相対誤差が比較的大きい理由は、角の点で q の値が急激に変化するためである(角の点の二つの法線方向の q の値が不連続)。図2(c), (d)に示したように、境界計算点数と内部計算点数の増加による解の精度への影響はあまりみられない。また、内部計算点を取らない場合 ($m=0$) は、係数行列 $\bar{K}$ の条件数は 10^{17} で特異に近く、解を求める計算は困難になる。これは内部計算点は必ず取る必要があることを示している。本研究では、全領域的な多項式近似を利用しているから、解の精度を確保するために、ある数の境界計算点と内部計算点を取ることは不可欠であるが、局所的な radial 関数を用いる二重相反法のようにすべての境界選点と内部点をこれとして取る必要はない。また、ある個数以上の境界・内部計算点を取れば、境界要素数の増加だけで解の精度を高めることができることがわかった。したがって、境界要素分割は、計算点解析法の計算精度を決定する主因であると言える。

領域内部の計算精度を調べるために、 $n=40, \bar{n}=20, m=1$ のとき、 $y=1.8, 1.5, 1.2$ における u, b の分布を図3(a), (c)に示した。これも厳密解とよく一致している。図3(b), (d)に表したように、 $n=40$ の場合の解の相対誤差は $n=20$ の場合より小さい。この例題からわかるように、計算点解析法は、境界上および領域内部で高い精度での解を求めることが可能である。

図4は、同じ支配方程式について、より複雑な領域で解析した例であり、境界要素数は140, 280, BCPは28, ICPは12とした。280要素の場合、140要素の場合をもとにして、各要素をさらに二等分したものである。図5はこの例の解析結果であり、(a)は u 、(b)は u の相対誤差の境界に沿う分布である。図5から、計算点解析法は、幾何形状・境界条件によって、ある数以上の計算点を均一に取れば(図4に示すような境界・内部計算点の数は、この問題にとって十分であると思われる)、複雑な領域でも、境界要素分割を十分することにより、高い精度で解を求められることが

Fig.1 Example of a square

Fig. 2 Results of the square on boundary

(a)

(b)

(c)

(d)

Fig. 3 Results of the square inside domain

Fig. 4 Example of a complicated shape

(a)

(b)

Fig. 5 Results of the complicated shape

わかる。この例においては、局部反復法を用いることにより、初期値によらずに、12回以内で収束解を得た。

なお、ここでは u, b の厳密解が低次の多項式で表される場合について考えたが、前報⁽¹⁾ではより複雑な場合について、すでに検討がなされている。したがって、より広い場合でしかも u の導関数を含む場合にも本法の妥当性が示されたものと思われる。

4. ま と め

非線形 Poisson 方程式の非同次項 b が、未知関数 u およびその導関数を含む問題を境界要素法により解析する目的で、計算点解析法と名付ける方法の定式化と例題の解析を行った。 b を空間座標の多項式によって近似するのと同じように、 u も空間座標の多項式で近似する。 u の多項式の係数 c_j を消去し、 u およびその導関数を b の多項式の未知係数 c_j の関数として表す。非線形方程式に関する未知数を最小限に絞り、 c_j だけについての局部反復計算により、初期値によらず

に、高効率で解を求められることがわかった。正方形領域と複雑な領域における解析を行い、計算点解析法の有効性を確認した。内部計算点は必ず必要であるとともに、境界要素分割は、計算点解析法の計算精度を左右するものであることがわかった。

文 献

- (1) 神谷紀生・許松青, 非同次・非線形問題の境界要素解析のための一定式と解法, 機論, **64**-617, A(1988), 147-154.
- (2) Cheng, A. H. -D., Lafe, O. and Grilli, S., Dual-reciprocity BEM based on global interpolation functions, *Eng. Anal. Bound. Elems.*, **13**(1994), 303-311.
- (3) Partridge, P. W., Dual reciprocity BEM: local versus global approximation functions for diffusion, convection and other problems, *Eng. Anal. Bound. Elems.*, **14**(1994), 349-356.
- (4) Golberg, M. A., The numerical evaluation of particular solutions in the BEM-A Review, *Bound. Elems. Comm.*, **6**(1995), 99-106.
- (5) 神谷紀生・許松青, 非線形境界条件を伴う境界要素法解析におけるアダプティブメッシュ, 機論, **63**-611, A(1997), 1567-1572.