多価性に準拠した成形性の予測*

守 時 一^{*1}, 奥 山 栄 樹^{*1}

Prediction of Formability Based on Multiplicity

Hitoshi MORITOKI and Eiki OKUYAMA

The necessary condition for the multiplicity in deformation rate was given by Hill. The condition is $\Delta \dot{\epsilon}_ij \Delta \dot{s}_ij = 0$, where $\dot{s}_ij$ denotes the nominal stress rate, and Δ shows the difference between any two multiple solutions. However, many proposed criteria of plastic instability in published literature did not take into consideration this necessary condition. They were based on phenomenological aspects. The sufficient condition for the multiplicity is deduced from the requirement which makes the equivalent strain rate $\dot{\epsilon}_s$ indefinite. This is given by $\dot{\epsilon}_ij \dot{s}_ij = 0$, which is called Z-plane in $\dot{s}_ij$ space. Plastic instability or unloading from a stable state always occurs on Z-plane. With respect to the formability in metal forming, especially, the possibility of plastic instability, processes are examined in plane stress, plane strain and three dimensional conditions. In sheet forming alternative criterion, $\dot{s}_1 = 0$ is also proposed for positive γ which is defined by the ratio $\dot{\epsilon}_2 / \dot{\epsilon}_1$. In bulk forming, the dependency of ductility upon mean normal stress is discussed, and the decrease of ductility is shown with increasing the mean stress. Furthermore, the occurrence of shear banding and its mode are studied. Since the shape of loading path is normally monotonic in $\dot{s}_ij$ space, a loading path intersects Z-plane only once and then plastic instability also can occur only once. Therefore, localized necking, in general, is merely the plastic deformation confined into a very thin layer with a rigid region on its both sides.

Key Words: Plastic Instability, Multiplicity, Formability, Ductility, Necking, Shear Banding

1. 緒 論

冷間加工においては、素材に塑性変形が付与されると、一般に強度の増加がもたらされる。しかし、塑性変形が素材の変形能を越えて課せられたときには、素材はこれに耐えることができなくなり裂を発生し、製品としての資質を失う。それゆえ、素材の変形能に相当する、強化から劣化への遷移となる変形の限界を予測することは大変重要な課題である。過度な変形による破壊は、熱間加工においても稀に見られることがあるが、これは多くは素材内部に介在する欠陥などが引き金になるものであり、材料学的な因子が大きく影響している。本論文では、考察の焦点を冷間加工における変形の限界に置くことにする。これに関する研究は、大きくは3種類の手法に大別される。その一つは、変形と損傷の累積を定性的な破壊考察から検討するものであり、これに基づいて種々の破壊規準モデルが提案されている⁽¹⁾⁽²⁾。これはあくまでもモデルであるので、現実の破壊現象がこれをどの程度満足しているかについては、各種定数の決定を含め個々に検証することが

必要である。第二は、ボイド(空孔)の発生から成長・合体の過程を追跡し、これにより破壊を予測しようとするものである⁽³⁾⁽⁴⁾。これも解析の過程で、現象面での種々の仮定が必要であり、これらの仮定が適切であるか否かについては実例に照らして検証されなければならない。第三は、連続体力学の観点から破壊発生の予測を試みるものである⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾。この予測は塑性理論に立脚しており、塑性力学の枠内で行われている点に特徴がある。したがって、従来の塑性理論に対して、新たな、特別な付加条件の設定を必要としていない。塑性理論が現象表現として適切に構築されたのであれば、これを用いた破壊予測もまたその適切さに応じて高い信頼度を備えていると考えることができる。本論文における考察は、この第三の分類に属するものである。

塑性変形初期には、変形は安定であるが、変形の増加に伴ってその安定度は低下し、不安定な状態へと移行する。ここでは、座屈現象におけるような、変形の形態が変わる不安定挙動は考えていない。したがって、変形の形態そのものは一意であり、一般に塑性不安定と呼ばれている不安定現象にのみ注目している。代表的な塑性不安定挙動として、Swiftの拡散くびれ⁽⁵⁾、Hillの局所くびれ⁽⁶⁾を挙げる事ができる。塑

* 原稿受付 1997年8月20日。

*¹ 正員、秋田大学鉱山学部(〒010-8502 秋田市手形学園町1-1)。

性不安定は、解の多価性と関連する現象であるが、多価解存在条件に準拠しているか否かについて十分な議論はこれまでなされていなかったようである。本論文では、多価解存在条件を必要にして十分に満足する塑性不安定規準に準拠して、各種の変形過程における成形限界を評価することを目的としている。そこでは、個々の変形過程における成形性を、これまでの著者らの考察を含め、この規準に則して考察している。塑性不安定現象は、変形の局所化の開始点であり、この段階の変形はき裂が発生するときの変形量とは大きく異なっていると考えられる。しかし、塑性不安定状態を経ることなくして局所化の現象は起こり得ないので、塑性不安定は、将来き裂へと発展する局所化変形の入口を表すものである。局所化がどのように進展するかは、これを取り巻く加工環境に大きく依存していて、これを定量化することは容易ではない。局所化の終えんでは、これまで三次元的な広がりを持っていた塑性変形域は、極限において平面層にまで縮退し、これがき裂へと進展するものと考えることができる。塑性不安定発生時の変形には、この局所化の過程における変形量の増加は含まれていないので、ここで提示する限界変形量は、現実の破壊ひずみに比べて過小に評価されている。これに対して、変形限界が存在しているか否かは破壊の有無と直接関連するものであり、本論文では、とくに、これについての評価を塑性不安定規準により検討するものである。

2. 塑性不安定規準

多価解の発生に際しては、これらの多価解の間で少なくとも満足していなければならない必要条件が存在する。2章では、多価解存在に関する、この必要条件から十分条件を導き、本質的な塑性不安定規準を提示する。

物体表面に速度境界条件として、表面力速度 $\dot{f}$ 、変位速度 v が付与された状態を考える。表面におけるこれらの負荷速度は指定されている。したがって、物体内部で多価の解が発生したとしても、これらは同一の境界条件のもとにある。それゆえ、

$$\int_s \Delta \dot{f} \cdot \Delta v ds = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

が常に満足されていなければならない。 Δ は、多価解を任意に二つ選び、これらに関する差を表す。表面積分を体積分に変換することにより、式(1)は

$$\int_V \Delta \dot{s}_{ij} \Delta v_{j,i} dV = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる⁽⁸⁾。ここで、 $\dot{s}_{ij}$ は公称応力速度テンソルの成

分を表す。物体内部の変形状態は、通常は、各点、各点で異なっている。したがって、新しく表面力、変位速度が付与された段階で、物体内部で、延性限界などにより多価解発生条件を最初に満足する物体点は、通常、非常に小さな領域に限られる。この微小な領域以外では、唯一解が保証されているので、式(2)の被積分関数は唯一解の差を表し、恒等的に零である。そこで、これらの領域を除外すると、式(2)の積分領域は多価解が発生しているごく限られた領域、あるいは点領域である。それゆえ、式(2)はこの限られた領域の被積分関数が零になることを要請している。したがって

$$\Delta \dot{s}_{ij} \Delta v_{j,i} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

と置くことができる。これは多価解が存在したとした場合に、これららの多価解が少なくとも満足しなければならない必要条件である。これは解の多価性を議論する上で検討しなければならない基本条件を与えている。式(3)を主軸座標に関して表すと

$$\Delta \dot{s}_i \Delta \dot{\epsilon}_i = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。主方向に関するテンソル成分は、一つの添字のみを付して表すことにする。

公称応力速度は、体積不変則のもとでは

$$\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{kj} v_{i,k} \quad \dots\dots\dots (5)$$

で表される。ひずみ速度と剛体回転速度は速度こう配により

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{j,i} + v_{i,j}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{j,i} - v_{i,j}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

の関係で定義される。このとき、Jaumann の応力速度は

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik} \omega_{kj} - \sigma_{kj} \omega_{ki} \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。これらを用いて式(5)は

$$\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} - \sigma_{kj} \dot{\epsilon}_{ik} + \sigma_{ik} \omega_{kj} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここでは、簡潔なレビー・ミーゼスの構成関係を適用し、相当応力と相当ひずみ速度を

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}, \quad \dot{\epsilon}_g = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

で定義する。 σ'_{ij} は偏差応力を表す。 n 乗加工硬化則のもとで

$$\dot{\epsilon}_g = \frac{\epsilon_g}{n} \frac{\dot{\sigma}'_g}{\sigma_g} \quad \dots\dots\dots (10)$$

である。 ϵ_g は相当ひずみであり、相当ひずみ増分 $d\epsilon_g$ の積分値を表す。さらに、Jaumann の応力速度を用いて

$$\dot{\sigma}'_g = \frac{3}{2\sigma_g} \sigma'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} \quad \dots\dots\dots (11)$$

である。レビー・ミーゼス構成式では

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \sigma'_{ij} = \frac{3\dot{\epsilon}_g}{2\sigma_g} \sigma'_{ij} \quad \dots\dots\dots (12)$$

の関係にある。これらを用いて、最終的に

$$\dot{\epsilon}_{ij} = C \sigma'_{ij} \sigma'_{rs} \dot{\sigma}'_{rs} \quad C \equiv \frac{9}{4} \frac{\epsilon_g}{n} \frac{1}{\sigma_g^3} \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。このとき、式(8)は

$$\dot{s}_{ij} = \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) - C_{ij} \sigma'_{rs} \right\} \dot{\sigma}'_{rs} + \sigma_{ik} \omega_{kj} \quad \dots\dots\dots (14)$$

と表現できる。ここで、

$$C_{ij} \equiv C \sigma'_{ik} \sigma'_{jk} \quad \dots\dots\dots (15)$$

と置いている。

式(6)で、任意の二つの多価解の差をとると、

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta v_{ji,i} + \Delta v_{i,j}), \quad \Delta \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta v_{j,i} - \Delta v_{i,j}) \quad \dots\dots\dots (16)$$

であり、式(3)は、これを用いて

$$\Delta \dot{s}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} + \Delta \dot{s}_{ij} \Delta \omega_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

と表される。変形物体内部には応力こう配が存在し、多価解が最初に発生する領域は変形物体内部において非常に狭い領域(これを領域Bと呼ぶ)に限られている。領域Bの剛体回転速度は、その周辺の領域の速度こう配に依存したある値を採らなければならない。このような環境にあるので、領域Bの多価解は

$$\Delta \omega_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

として論ずることができる。このとき、基本式、式(17)は

$$\Delta \dot{s}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

と書き換えられる。式(10)から式(14)の表現において、任意の二つの多価解について差をとり、式(18)を考慮すると

$$\Delta \dot{\epsilon}_g = \frac{\epsilon_g}{n} \frac{\Delta \dot{\sigma}'_g}{\sigma_g} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\Delta \dot{\sigma}'_g = \frac{3}{2\sigma_g} \sigma'_{ij} \Delta \dot{\sigma}'_{ij} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij} = \Delta \dot{\lambda} \sigma'_{ij} = \frac{3\Delta \dot{\epsilon}_g}{2\sigma_g} \sigma'_{ij} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij} = C \sigma'_{ij} \sigma'_{rs} \Delta \dot{\sigma}'_{rs} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\Delta \dot{s}_{ij} = \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) - C_{ij} \sigma'_{rs} \right\} \Delta \dot{\sigma}'_{rs} \quad \dots\dots\dots (24)$$

を得る。式(19)は式(22)を用いて

$$\Delta \dot{s}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} = \Delta \dot{\lambda} \Delta \dot{s}_{ij} \sigma'_{ij} \quad \dots\dots\dots (25)$$

と表される。上式右辺で $\Delta \dot{\lambda}$ を除いた項は、式(24)を用いて

$$\Delta \dot{s}_{ij} \sigma'_{ij} = (1 - \sigma'_{rs} C_{rs}) \sigma'_{ij} \Delta \dot{\sigma}'_{ij} \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。これを式(25)に代入し、式(22)を考慮すると

$$\sigma'_{ij} \Delta \dot{\sigma}'_{ij} = \frac{2\sigma_g}{3\Delta \dot{\epsilon}_g} \frac{\Delta \dot{s}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}}{1 - \sigma'_{rs} C_{rs}} \quad \dots\dots\dots (27)$$

を得る。これは、式(20)、(21)を用いて

$$\frac{n}{\epsilon_g} \sigma_g (\Delta \dot{\epsilon}_g)^2 = \frac{\Delta \dot{s}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}}{1 - \sigma'_{rs} C_{rs}} \quad \dots\dots\dots (28)$$

と変換できる。解が多価になると、相当ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_g$ に多価性が現れ、当然、相当ひずみ速度差 $\Delta \dot{\epsilon}_g$ にも多価性が出現する。式(28)の右辺の分子は、多価性の基本条件を表し、式(19)を満足し、零でなければならない。これらの状況から、式(28)において $\Delta \dot{\epsilon}_g$ が不定になるには、右辺分母を y と置き、

$$y \equiv 1 - \sigma'_{rs} C_{rs} = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

のときである。したがって、式(19)、(29)は解が多価となるための必要条件を表す。

次に、 $\dot{s}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ について考察する。これは式(12)を用いて

$$\dot{s}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \dot{s}_{ij} \sigma'_{ij} \quad \dots\dots\dots (30)$$

と表される。上式右辺で $\dot{\lambda}$ を除いた項は、式(14)を用いて

$$\dot{s}_{ij} \sigma'_{ij} = (1 - \sigma'_{rs} C_{rs}) \sigma'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} + \sigma'_{ij} \sigma_{ik} \omega_{kj} \quad \dots\dots\dots (31)$$

となる。上式の右辺第2項を A と置くと

$$A \equiv \omega_{kj} (\sigma'_{ij} \sigma'_{ik} + \delta_{ik} \sigma'_{ij} \sigma) = \omega_{ij} (\sigma'_{ik} \sigma'_{jk} + \sigma'_{ij} \sigma) \quad \dots\dots\dots (32)$$

である。ここで、 σ は応力の引張静水圧成分 $\sigma_{kk}/3$ を表す。剛体回転速度成分は、 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ の反対称関係にあるので、 A は恒等的に零であることがわかる。したがって、式(30)は

$$\dot{s}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} (1 - \sigma'_{rs} C_{rs}) \sigma'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} \quad \dots\dots\dots (33)$$

となる。これより、式(12)を考慮し、さらに、式(10)、(11)を用いると

$$\frac{n}{\epsilon_g} \sigma_g \dot{\epsilon}_g^2 = \frac{\dot{s}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}{1 - \sigma'_{rs} C_{rs}} \quad \dots\dots\dots (34)$$

を得る。これは、多価解の差に関する式(28)と対比される関係である。多価性の必要条件、式(29)から、式(34)の右辺分母は零である。多価の解 $\dot{\epsilon}_g$ が無数に存在できるためには、右辺分子も零でなければならない。それゆえ

$$\dot{s}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

が要請される。式(29)、(35)は解が多価であるための必要にして十分な条件を与える。したがって、多価解に関する必要条件、式(19)は式(35)で置き換えられなければならない。さらに、式(29)から、

$$\frac{\epsilon_{gd}}{n} = \frac{4}{9} \frac{\sigma_g^3}{\sigma_{ij} \sigma'_{ik} \sigma'_{jk}} \quad \dots\dots\dots (36)$$

を得る。これは塑性不安定が発生するときの変形を与える。これを用いて、式(29)は

$$y = 1 - \frac{\epsilon_g}{\epsilon_{gd}} = 0 \quad \dots\dots\dots (37)$$

となる。さらに、式(35)は式(12)より

$$z \equiv \sigma'_{ij} \dot{s}_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

の条件で置き換えられる。

塑性域では、式(34)の関係が成り立ち、左辺は常に正值である。式(34)の右辺分子は z に比例していることを考慮すると、塑性域を

$$\begin{aligned} y > 0 : z > 0 \\ y \leq 0 : z \leq 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (39)$$

に分類できる。前者は安定過程における $\dot{s}_{ij}$ 空間の変域を、後者は塑性不安定後のその変域である。塑性不安定発生時の状態は式(38)の条件、 $z=0$ を満足していなければならない。これは、 $\dot{s}_{ij}$ 空間において原点を通る超平面を表し、式(39)におけるように $\dot{s}_{ij}$ 空間の変域を、安定と不安定の領域に区分している。これを Z 平面と呼ぶ。この状況を図1に二次元表示で模式的に示す。

公称応力速度の成分はそれぞれの方向における荷重速度に相当している。金属材料では、一般に n 値は1より小さく、それゆえ、加工硬化率は塑性変形とともに減少の一途を辿る。塑性不安定が問題となる荷重環境の下では、引張試験に見られるように、多くは、加工硬化率の減少に伴って荷重速度も減少の過程にある。したがって、 $\dot{s}_{ij}$ 空間における負荷軌跡は $\dot{s}_{ij}$ の正值から負値へ向けて単調に変化し、負荷軌跡と Z 平面との交点は一点である。このことについての詳細な検討は文献(9)を参照いただきたい。

負荷軌跡と Z 平面との交点において、塑性不安定が発生することを示した。そこでは、式(34)で表されているように相当ひずみ速度が不定形で表現され、多価状態を許容している。さらに、上述のように、多価条件を満足する、負荷軌跡と Z 平面との交点は一点Dのみである。しかしながら、これまでの認識では、板材成形に見られるように、塑性不安定は拡散くびれと局所くびれに大別され、これらが前後して出現するものと考えられてきた。上述の考察では、多価解の発生できる変形段階は1回のみであるので、拡散くびれと局所くびれのどちらかがこれに対応しているとして

も、他の一つは多価性の許容条件を満足していない可能性がある。後で示すように、式(36)による限界値は、主方向平面応力場ではSwiftの拡散くびれ限界と全く一致していることから、多価性は拡散くびれに準ずる状態において発生していると考えることができる。

Swiftの拡散くびれ規準⁽⁵⁾は、

$$\dot{s}_1 = 0, \quad \dot{s}_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

で与えられる。それは塑性不安定の十分条件の一つ、式(35)を満足はしているが、これとは一致していない。また、拡散くびれ限界値は、特別な場合を除いて一般には式(40)を満足していないことが指摘されている⁽¹⁰⁾。式(36)による限界と拡散くびれ限界が平面応力場で一致していることから、拡散くびれは塑性不安定状態にあると考えることができる。これに対して、局所くびれではその規準として、例えば、Hillは

$$\begin{aligned} \dot{s}_1^* = 0, \quad \dot{s}_2^* = 0 \\ \dot{s}_i^* \equiv \dot{\sigma}_i + \sigma_i \dot{\epsilon}_3 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (41)$$

を掲げている⁽⁶⁾。この条件のもとで、 $\dot{\epsilon}_\theta$ の多価性は出現するが、式(41)の条件は塑性不安定の十分条件、式(35)を満足していない。したがって、式(41)の設定は、塑性不安定規準としては適切ではないと言える。しかし、局所くびれ現象そのものは種々の成形過程でその存在が認められていることも事実である。多価とは、その発生時に無数の解が存在できることであるが、多価性そのものが局所くびれ現象において現実に確認されているとは言い難い。局所くびれ現象は、剛(弾)性化した除荷域に挟まれた塑性域が薄い層状に存在している極限の状態を想定しているが、その塑性域と除荷域との間の境界で多価関係を実際に満足しているという保証はない。これは、むしろ、塑性不安定後、局所化の過程で塑性域が徐々に縮小し、その極限の状態として観察された状態であると解釈されるべきである。このような解釈のもとでも、局所化の過程で局所くびれ面は剛(弾)塑境界が許容できる形態へと変化していかなければならない。

いま、剛塑境界面の法線方向に座標軸 $\bar{x}_1$ を、その面内に互いに直交する座標軸 $\bar{x}_2, \bar{x}_3$ をとる。剛塑境界面上では、その一方の側にある塑性変形域で塑性変形が進行したとしても、この面の表裏は、ずれることなく一致していなければならない。そうでなければ、この境界面を境に剛性域と塑性域の間に変形後段差を生じる結果となる。このことから、境界面片側の塑性域においては、

$$\dot{\epsilon}_{22} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{33} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{23} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{11} = 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

の関係を満足する変形が求められる。ここで、 $\dot{\epsilon}_{ij}$ は座標系 $\bar{x}_i$ に帰属しているひずみ速度成分であること

Fig. 1 Loading state in $\dot{s}_i$ space

を表す。上式の最後の条件は、体積不変則から要請されている。これは、特性曲面の条件⁽¹¹⁾と一致しているので、剛塑境界面は特性曲面でなければならない。これより、剛塑境界面の形態は2種類であり、平面ひずみ速度変形の拘束下にある形態P、O⁽¹¹⁾のどちらかでなければならない。したがって、局所くびれ面もこの形態を採ることになる。

本論文では、塑性不安定規準に基づいた限界変形の考察を試みている。この限界値は局所化の過程における変形の付加分を含んでいないので、過小評価している点是否めない。塑性不安定の出現なくして局所化の過程もなく、き裂発生への誘因もあり得ない。したがって、3章の議論では、むしろ、限界値そのものよりも、限界の出現の有無が応力状態によりどのように影響されるかを調査することが主眼である。

3. 成形性

2章で、多価性に準拠した塑性不安定規準について概説した。3章では、これを基に各種条件下における成形性とその限界変形を考察する。

3・1 平面応力状態

3・1・1 板成形 通常、主応力場で論ぜられているので、ここでもこれに従う。主方向1、2に関して、式(36)は

$$\frac{\varepsilon_{gp}}{n} = \frac{4}{9} \frac{\sigma_g^3}{(\sigma_1 \sigma_1^2 + \sigma_2 \sigma_2^2)} \quad (43)$$

である。このとき、相当応力、相当ひずみ速度は

$$\sigma_g = \sigma_1 \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2} = \sigma_1 \sqrt{3} \frac{\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2}}{2 + \gamma} \quad (44)$$

$$\dot{\varepsilon}_g = \dot{\varepsilon}_1 \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \gamma + \gamma^2}$$

となる。ここで、応力比、ひずみ速度比を

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \gamma = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} \quad (45)$$

と置いている。これらの間には

$$\gamma = \frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha}, \quad \alpha = \frac{1 + 2\gamma}{2 + \gamma} \quad (46)$$

の関係がある。偏差応力成分は定義より

$$\sigma'_1 = \sigma_1 \frac{1}{2 + \gamma}, \quad \sigma'_2 = \sigma_1 \frac{\gamma}{2 + \gamma} \quad (47)$$

である。これらを用いて、式(43)は

$$\frac{\varepsilon_{gp}}{n} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{(\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2})^3}{(1 + \gamma)(2 - \gamma + 2\gamma^2)} \quad (48)$$

となる。これはSwiftの規準に従って算出された限界値と全く同じである⁽¹²⁾。式(35)は、一般に $\dot{\varepsilon}_1 \neq 0$ として

$$\dot{s}_1 + \gamma \dot{s}_2 = 0 \quad (49)$$

の条件となる。主方向に関する公称応力速度は、式(5)より

$$\dot{\sigma}_i = \dot{\sigma}_i - \sigma_i \dot{\varepsilon}_i \quad (50)$$

である。ここで、時間尺度に ε_g を採ることとする。このとき、式(44)、 n 乗硬化則を用いて

$$\frac{1}{\sigma_i} \dot{\sigma}_i = \frac{n}{\varepsilon_g} + A_i \dot{\gamma} \quad (51)$$

の関係をj得る⁽¹³⁾。ここで、

$$A_1 = \frac{1}{2 + \gamma} - \frac{1 + 2\gamma}{2(1 + \gamma + \gamma^2)} \quad (52)$$

$$A_2 = \frac{2}{1 + 2\gamma} - \frac{1 + 2\gamma}{2(1 + \gamma + \gamma^2)}$$

としている。したがって、公称応力速度は式(50)より

$$\dot{s}_1 = \sigma_1 \left(\frac{n}{\varepsilon_g} + A_1 \dot{\gamma} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2}} \right) \quad (53)$$

$$\dot{s}_2 = \sigma_2 \left(\frac{n}{\varepsilon_g} + A_2 \dot{\gamma} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2}} \right)$$

で表される。これを用いて、多価条件、式(49)は

$$\sigma_1 \left\{ \frac{n}{\varepsilon_g} (1 + \alpha\gamma) + \dot{\gamma} (A_1 + \alpha\gamma A_2) - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(1 + \alpha\gamma^2)}{\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2}} \right\} = 0 \quad (54)$$

となる。 σ_1 は通常、零ではないので、式(54)の中括弧内が零でなければならない。式(45・1)を用いて、中括弧内第2項は、恒等的に零

$$A_1 + \alpha\gamma A_2 = 0 \quad (55)$$

である。したがって、式(54)からも、式(48)で表される成形限界を得る。このように、多価性の二つの条件、式(35)、(36)は互いに整合関係にあることがわかる。ここで、注目しておきたいことは、恒等的に式(55)が成り立っているので、式(54)から限界値への $\dot{\gamma}$ の依存性はなく、 $\dot{s}_i$ 空間で式(49)の状態にどのようなひずみ経路で到達しても限界値は常に式(48)で与えられ、変形経路に依存していないことがわかる。

$\dot{s}_i$ 空間における負荷経路を図2に示す。ここでは、二軸引張負荷($\alpha \geq 0$)に注目し、 $\gamma \geq 0$ の両二軸張出し変形と一方が圧縮変形である $\gamma < 0$ の場合に分けて模式的に示している。負荷経路が $\dot{s}_2$ 軸と交差する変形段階を点S、Z平面に到達する段階を点Dで表してい

Fig. 2 Loading path in s space

る。負荷経路で点Sに到達するまでは、それぞれの負荷は絶対値が増大する過程にある。しかし点Sを越えて負荷がこの経路上を進むと、図2では、 $\dot{s}_1 < 0$, $\dot{s}_2 > 0$ の状態になり、一方の負荷(板面内の最小負荷)を増大させながら他方の負荷(最大負荷)を減少させる負荷環境を与えなければならない⁽¹⁴⁾。成形性試験では、これらの負荷を自由に制御できる構造である場合(例えば、円筒の軸引張り内圧張出し試験など)は非常に限られており、多くはこれらの負荷は連動している。このように連動している場合には、塑性不安定の考察に特別の配慮が必要である。不安定過程では、当然負荷の人為的な制御は可能でないで、このことが問題となるのは安定過程においてである。 $\gamma > 0$ では、安定過程において負荷速度の向きを変える状態が、点Dに至る状態Sで出現している。そこでは、指定の負荷経路、過程S、Dに沿って経路を辿ることができなく、状態Sにおいて s_1 の停留に連動して s_2 の停留がもたらされることになる。したがって、負荷は状態Sから原点Oに向かう経路に遷移し、原点Oで本来の塑性不安定状態に突入する結果となる。塑性不安定が変形経路の人為的な制御を失う現象であることから、 $\gamma > 0$ における状態Sは環境的には塑性不安定に準ずる状態である。したがって、塑性不安定に到達する前に、荷重の一つが停留する状態が出現するときには、これも実質的な塑性不安定として取扱うべき状態である。これを多価性の修正された許容規準と呼んでい

る⁽¹⁴⁾。

この許容規準は

$$\dot{s}_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (56)$$

与えられ、このときの成形限界は

$$\frac{\epsilon_{gs}}{n} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{(\sqrt{1+\gamma+\gamma^2})^3}{(2+\gamma)(1+\gamma\xi)} \quad \dots\dots\dots (57)$$

である⁽¹⁴⁾。ここで、応力速度比

$$\xi = \frac{\dot{\sigma}_2}{\dot{\sigma}_1} \quad \dots\dots\dots (58)$$

を定義し、これは $\dot{\gamma}$ と

$$\xi = \alpha \frac{\frac{n}{\epsilon_g} + A_2 \dot{\gamma}}{\frac{n}{\epsilon_g} + A_1 \dot{\gamma}} \quad \dots\dots\dots (59)$$

で関係付けられている⁽¹³⁾。このような停留過程における負荷追跡の、もう一つの方法は、式(56)の条件のもとで、点Sにおける $\dot{s}_2$ の値から、 $\dot{s}_2 = 0$ になるまで、 $\dot{s}_1 = 0$ を維持しながら順次、変形を s_i 空間の原点まで追跡する方法である。この方法は、一見、前者よりもより正確な予測法であるように写るが、負荷経路が、点Sから真直ぐ原点に向かう方向に偏るか否か

は実験装置の構造により影響を受けるので、後者が必ずしも正しいとは判断できない。さらに、点Sに到達する以前に経路の偏りが始まり、次第に原点Oに向かう場合も考えられる。このように、点Sからの経路は人為的に予測することが可能ではないので、一概に、これらの手法に優劣を下すことはできない。

3・1・2 ねじり試験 ねじり試験における純せん断変形は平面応力場にある。これを主方向で表すと、

$$\gamma = -1, \quad \sigma_2 = -\sigma_1, \quad \sigma'_2 = -\sigma'_1 \quad \dots\dots\dots (60)$$

である。このとき、式(43)右辺の分母は常に零となり、限界ひずみ ϵ_g は無限大を与える。したがって、純せん断変形では、塑性不安定は発生しない。これを、円筒ねじりの円周方向に座標 x_1 、円筒軸方向に座標 x_2 を採る座標系で考えると、零とならない応力成分は、 σ_{12} のみであり、式(36)の右辺分母は

$$2\sigma_{12}(\sigma'_{11} + \sigma'_{22}) \quad \dots\dots\dots (61)$$

となる。しかし、 $\sigma'_{11} = \sigma'_{22} = 0$ であるので、この場合も上式は零となり、単純せん断変形においても ϵ_g は無有限大となる。したがって、採用する座標系のいかんにかかわらず、塑性不安定の発生を予測しないことがわかる。

3・1・3 据込み試験における表面延性 据込み試験では、端面摩擦が大きいとき円柱試片はたる形に変形し、側表面にき裂が発生する。側表面は平面応力状態にあるので、これは、3・1節の分類に属する。工藤ら⁽¹⁵⁾は据込み試験におけるひずみ経路を詳細に観察している。このひずみ経路に従って、座標 x_1 を円柱円周方向に、母線方向に座標 x_2 を採り、式(56)の修正規準を満足する変形段階を著者らの一人が調べ、破壊の発生する少し前の変形過程でこの状態の出現していることを確かめた⁽¹⁶⁾。しかし、そこでのひずみ速度比は $\gamma < 0$ の変形過程にあるので、3・1・1項における考察からこの状態以前に純粋な塑性不安定状態が到来していることになる。このため、据込み試験における表面延性については、さらなる詳細な検討が必要である。

3・2 三次元変形 座標軸を主方向に採る。相当応力、相当ひずみ速度は

$$\sigma_g = \sigma_1 \frac{2-\alpha-\beta}{\sqrt{3}} \sqrt{1+\gamma+\gamma^2} \quad \dots\dots\dots (62)$$

$$\dot{\epsilon}_g = \dot{\epsilon}_1 \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+\gamma+\gamma^2}$$

である。ここで、

$$\beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \quad \dots\dots\dots (63)$$

と置いている。応力比とひずみ速度比の間には

$$\gamma = \frac{2\alpha - \beta - 1}{2 - \alpha - \beta} \quad \dots\dots\dots (64)$$

の関係がある。これらを式(36)に適用すると

$$\frac{\epsilon_{gd}}{n} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{(2 - \alpha - \beta)(\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2})^3}{1 + \alpha\gamma^2 + \beta(1 + \gamma)^2} \quad \dots\dots\dots (65)$$

を得る⁽¹⁷⁾。これは主方向三次元変形における限界変形を与える。このときの多価条件、式(35)は

$$\dot{s}_1 + \gamma \dot{s}_2 - (1 + \gamma) \dot{s}_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (66)$$

となる。ここでは証明は省略するが、式(66)は、平面応力問題における3・1・1項における考察と同様、式(65)と整合関係にあることを確認できる。

過度の塑性変形を受けると金属材料では、転位の蓄積、あるいは介在物を核としてポイド(空孔)の発生が確認されている。そして、このポイド発生、成長には素材に作用している静水圧が少なからず影響を及ぼすことが実験で観察されている。このことの定性的な特徴は、連続体の変形論からも以下のように説明できる。引張静水圧成分 σ は

$$\sigma = \sigma_1 \frac{1}{3} (1 + \alpha + \beta) \quad \dots\dots\dots (67)$$

である。これと、式(64)から

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{3} (1 + 2\gamma) - \frac{1}{3} (1 - \gamma) \frac{1 - 2\sqrt{3} \bar{\sigma} \sqrt{1 + \gamma + \gamma^2}}{1 + \sqrt{3} \bar{\sigma} \sqrt{1 + \gamma + \gamma^2}} \\ \beta &= -\frac{1}{3} (1 + 2\gamma) - \frac{1}{3} (2 + \gamma) \frac{1 - 2\sqrt{3} \bar{\sigma} \sqrt{1 + \gamma + \gamma^2}}{1 + \sqrt{3} \bar{\sigma} \sqrt{1 + \gamma + \gamma^2}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (68)$$

が得られる。ここで、

$$\bar{\sigma} \equiv \frac{\sigma}{\sigma_g} \quad \dots\dots\dots (69)$$

と置いている。これらを式(65)に代入すると、

$$\frac{\epsilon_{gd}}{n} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{(\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2})^3}{-3\gamma(1 + \gamma) + 2\sqrt{3}(\sqrt{1 + \gamma + \gamma^2})^3 \bar{\sigma}} \quad \dots\dots\dots (70)$$

となる。これは、延性限界の引張静水圧 $\bar{\sigma}$ への依存

Fig. 3 Ductility dependence upon mean stress

性を表している。γに関連して、限界値の $\bar{\sigma}$ への依存性を図3に示す。設定 $\bar{\sigma}$ の値によっては、式(70)は負値の ϵ_{gd} を与える。これは限界の現れないことを表している。 $\bar{\sigma}$ が正值であり、その値が大きくなると、限界変形の低下することが示されている。 Vujovicらは延性の静水圧依存性に関する実験を行い、図4の結果を得ている⁽¹⁸⁾。図3、4の間で、定性的には類似な傾向が示されているが、延性値は別として $\bar{\sigma}$ 軸に関して偏りが見られる。これについては若干の説明が必要である。 Vujovicらは、圧縮試験、引張試験においては延性値に試験片全体の巨視的な平均値を採用し、引張静水圧 σ の評価に関しては、とくに圧縮試験においてた形変形の影響を度外視している。工藤ら⁽¹⁵⁾の、実験結果に基づく応力値の評価では、 $\bar{\sigma}$ は破壊発生時にほぼ0.25~0.5の値が推測されている。ねじり試験では、実験が理想的に遂行されると、 $\bar{\sigma} = 0$ であり、引張試験では当然 $\bar{\sigma}$ は正值である。したがって、破壊時に $\bar{\sigma} < 0$ の状態は微視的には起こっていないことになり、 $\bar{\sigma}$ 軸の偏りに関しては、さらなる詳細な実験的考察が必要である。

3.3 平面ひずみ状態

3.3.1 主方向表現 平面ひずみ状態は、主方向に関して

$$\gamma = -1 \quad \dots\dots\dots (71)$$

で特徴付けられる。このとき、式(64)から

$$\beta = \frac{1}{2} (1 + \alpha) \quad \dots\dots\dots (72)$$

である。したがって、多価条件は、式(66)から

$$\dot{s}_1 - \dot{s}_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (73)$$

限界変形は、式(65)から

$$\frac{\epsilon_{gd}}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad \dots\dots\dots (74)$$

Fig. 4 Ductility dependence upon mean stress
[by Vujovic, V. and Shabaik, A. H., *J. Eng. Mater. Technol.*, 108 (1986), 245]

となる。式(73)を条件として、式(74)を用いて成形性を判定できる。これを規準に、押出し加工における中心割れが考察されている⁽¹⁷⁾⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾。

3・3・2 セン断帯の発生 セン断帯解析は、通常、平面ひずみ条件($\dot{\epsilon}_3=0$)下における一軸引張負荷で考察されている⁽²¹⁾⁽²²⁾。考察平面の主方向に座標 x_i ($i=1, 2$) を採る。このとき、 $\alpha=0$ であり、限界値は式(74)により

$$\frac{\epsilon_{gd}}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots (75)$$

で与えられる。ひずみ速度は、式(71)により

$$\dot{\epsilon}_2 = -\dot{\epsilon}_1 \quad \dot{\epsilon}_3 = 0 \dots\dots\dots (76)$$

の関係にある。また、セン断帯解析では、セン断面は座標面に垂直であると先験的に仮定されている。そこで、式(42)で用いた $\bar{x}_2$ 軸を主方向座標面 x_i ($i=1, 2$) 上に含まれるようにとることとする。このとき、 $\bar{x}_1$ 軸が x_1 軸となす角度を ψ とすると、垂直成分は

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\epsilon}}_{11} &= \dot{\epsilon}_1 \cos^2 \psi + \dot{\epsilon}_2 \sin^2 \psi \\ \dot{\bar{\epsilon}}_{22} &= \dot{\epsilon}_1 \sin^2 \psi + \dot{\epsilon}_2 \cos^2 \psi \end{aligned} \dots\dots\dots (77)$$

の関係にある。セン断帯を挟む両側領域は剛(弾)性域に相当しているので、セン断面は剛(弾)塑境界面でなければならない。したがって、式(76)の条件のもとで式(42)を満足する面は $\psi = \pm \pi/4$ であることが要請され、これは正しく形態 O に外ならない。従来のセン断帯解析で、セン断帯の形態は形態特性式に従って形態 O 以外の形態を許容できるとしているが、変形の整合性を配慮するとき、形態特性式を用いる従来の形態決定は適切ではない。

4. 結 言

多価の解を持つための必要条件を基に、多価解の存在に対して必要にして十分な規準を導き、これを塑性不安定の規準として提示した。塑性不安定は、 $\dot{s}_{ij}$ 空間における超平面(Z 平面)上においてのみ発生が可能である。この超平面上において、加工ひずみと限界のひずみを比較し、前者が後者に一致するとき塑性不安定状態が出現する。これに対して、前者が後者より小さいときには除荷過程へと移行する。Z 平面上で、前者が後者より大きくなることは論理的に起こり得ない。一般論に続いて、平面応力、平面ひずみ、三次元

問題のそれぞれについて考察し、限界状態の考え方、応力の静水圧成分が延性に及ぼす影響、ねじり変形やせん断帯発生について検討した。 $\dot{s}_{ij}$ 空間における負荷経路は単調に変化し、Z 平面との交差はただ 1 回のみであり、塑性不安定は Z 平面上以外では起こり得ない。そして、そこでは拡散くびれに類似した塑性不安定が生じている。したがって、局所くびれは、一般に、塑性不安定現象ではなく、塑性不安定後、局所化の過程において塑性変形域が平面的に縮退した状態であると認識すべきである。縮退した塑性域は剛(弾)塑境界面とほぼ平行に位置しており、その形態は特性曲面の形態と一致していなければならない。したがって、局所くびれ面は、平面ひずみ速度場の制約を受ける 2 種類の形態 P、O のいずれかの形態を採ることになる。

文 献

- (1) Cockroft, M. G. and Latham, D. J., *J. Inst. Met.*, **96** (1968), 33-39.
- (2) Oyane, M., Sato, T., Okimoto, K. and Shima, S., *J. Mech. Work. Tech.*, **4** (1980), 65-81.
- (3) McClintock, F. A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Ser. E, **35** (1968), 363-371.
- (4) Rice, J. R. and Tracy, D. M., *J. Mech. Phys. Solids*, **17** (1969), 201-217.
- (5) Swift, H. W., *J. Mech. Phys. Solids*, **1** (1952), 1-18.
- (6) Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, **1** (1952), 19-30.
- (7) Stören, S. and Rice, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, **23-6** (1975), 421-441.
- (8) Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, **5** (1957), 153-161.
- (9) 守時一・奥山栄樹, 機論, **64**-617, A (1998), 193-199.
- (10) 守時一・奥山栄樹, 機論, **61**-588, A (1995), 1789-1796.
- (11) 守時一・奥山栄樹, 機論, **61**-587, A (1995), 1639-1646.
- (12) 守時一, 機論, **56**-522, A (1990), 352-358.
- (13) 守時一・奥山栄樹, 機論, **59**-559, A (1993), 769-776.
- (14) 守時一・奥山栄樹, 機論, **59**-560, A (1993), 992-1000.
- (15) 工藤英明・青井一喜, 塑性と加工, **8-72** (1967), 17-27.
- (16) Moritoki, H., *Int. J. Plasticity*, **9** (1993), 507-523.
- (17) 守時一, 機論, **59**-531, A (1990), 2333-2338.
- (18) Vujovic, V. and Shabaik, A. H., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, **108** (1986), 245-249.
- (19) Moritoki, H., *Int. J. Plasticity*, **7** (1991), 713-731.
- (20) Moritoki, H. and Okuyama, E. (Chandra, T. 編), *IPMM97 (Intelligent processing & Manufacturing of Materials)*, **2** (1997), 927-933.
- (21) Hill, R. and Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, **23** (1975), 239-264.
- (22) Needleman, A., *J. Mech. Phys. Solids*, **27** (1979), 231-254.