Double Holes Drilling 法による異方性材料の 残留応力の測定理論*

川 岸 雄 一^{*1}, 平 島 健 一^{*2}
広 瀬 幸 雄^{*3}, 千 野 嘉 英^{*4}

Measurement Theory of Residual Biaxial Stresses of Anisotropic Materials by Using Double Holes Drilling Method

Yuichi KAWAGISHI, Ken-ichi HIRASHIMA,
Yukio HIROSE and Yoshihide CHINO

The semi-destructive hole drilling method for measurement of residual stresses using electrical resistance strain gages has been used for a wide range of engineering materials. In this paper, a new method with two holes (measurement hole and release hole) based on the elastic stress concentration by successive interactions of the neighboring holes is proposed for the case of anisotropic materials. This method is named as Double Holes Drilling Method. Several numerical results are shown as the variation of strains which detect with three gages around the measurement hole, the values of parameters such as distance of two holes, principal angle of anisotropy, radius of release hole and so on. Then, the back analysis by use of the measured strains is given for determining the residual biaxial stresses.

Key Words: Residual Stress, Hole Drilling Method, Strain-Gage, Anisotropic Materials, Two Holes Interaction, Back Analysis

1. 緒 言

応力測定は、現在までにさまざまな方法が開発されているが、それらの原理のほとんどは平衡状態にある応力場を擾乱し、それによって材料が応答して示す種々の物理量の変化を測定するものである。

その中の一つに、Mathar が考案した Hole Drilling 法がある⁽¹⁾。これは残留(作用)応力の存在する材料の表面に三軸のゲージロゼットを貼り付け、そのロゼット中心に円孔をあけ、それにより生じる弛緩ひずみをゲージで測定し残留応力を求める方法である。この方法では孔は正確にゲージロゼットの中心に穿孔されなければならない、また孔の径や深さ、形状などにも制約があり、さらに巨視的に等質材に制限されており、試験を行う際は円孔における応力集中を考慮して、残留応力は降伏応力の 1/3 を越えてはいけない。このようにさまざまな制約があるにもかかわらず、孔が材料に及ぼす影響は非常に局所的であり、材料の全体強度に

ほとんど影響を及ぼさないため、本手法は準破壊検査法と呼ばれて、広範囲にわたって用いられている⁽¹⁾。

一般に本手法で残留応力を測定する際、板厚方向に孔径と同じ大きさの孔深さ以上に穿孔すれば、最もひずみの弛緩が大きくなり、正確に測定できると報告されている⁽²⁾。しかし、通常の直交異方性材のような薄板に対しては孔を最適な深さにする必要はなく、望ましいひずみ弛緩を得るには貫通孔で十分であると報告されている⁽³⁾。しかしこの場合を含めて、一般的な場合、一つの材料に添付したひずみゲージに対して、測定が 1 回しかできないという欠点がある。これに対して、このゲージを利用して、複数回の測定ができれば便利であり、また測定精度の向上にもつながる。

そこで本論文ではもとの孔を第 1 番目の測定孔として、これに隣接する第 2 番目の孔(解放孔)を穿孔することにより部分的に応力解放を行い、残留応力を測定する方法を提案する。ここではこの方法を Double Holes Drilling 法と称することとする。この方法は、近接した二つの孔の相互干渉による弾性的な応力集中を利用するもので、一種の応力再分布法あるいは部分応力解放法と呼べるものである。

したがって、本論文は残留応力が存在する等方性または異方性材料の表面に第一の円孔を穿孔し、まず一

* 原稿受付 1996 年 11 月 14 日。

^{*1} 正員、金沢大学大学院(☎ 920-1192 金沢市角間町)。

^{*2} 正員、山梨大学工学部(☎ 400-0016 甲府市武田 4-3-11)。

^{*3} 金沢大学理学部。

^{*4} (株)コミヤマ工業(☎ 409-3813 山梨県中巨摩郡玉穂町一町畑 882)。

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= a'_{11} \cos^4 \alpha + (2a'_{12} + a'_{66}) \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\
 &\quad + a'_{22} \sin^4 \alpha, \\
 a_{22} &= a'_{11} \sin^4 \alpha + (2a'_{12} + a'_{66}) \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\
 &\quad + a'_{22} \cos^4 \alpha, \\
 a_{12} &= a'_{12} + (a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12} - a'_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \\
 a_{66} &= a'_{66} + 4(a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12} - a'_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \\
 a_{16} &= \{a'_{22} \sin^2 \alpha - a'_{11} \cos^2 \alpha \\
 &\quad + 1/2(2a'_{12} + a'_{66}) \cos 2\alpha\} \sin 2\alpha, \\
 a_{26} &= \{a'_{22} \cos^2 \alpha - a'_{11} \sin^2 \alpha \\
 &\quad - 1/2(2a'_{12} + a'_{66})\} \sin 2\alpha.
 \end{aligned}$$

.....(5)

ここに、 α は図 1 に示すように弾性主軸 E_1 と x 軸とのなす角を表す。また、 a'_{ij} は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
 a'_{11} &= 1/E_1, \quad a'_{22} = 1/E_2, \\
 a'_{12} &= -\nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2, \\
 a'_{66} &= 1/G_{12}, \quad a'_{16} = a'_{26} = 0.
 \end{aligned} \right\} \text{.....(6)}$$

ここに、 E_i , G_{ij} , および ν_{ij} ($i, j=1, 2$) は、それぞれ縦弾性係数、せん断弾性係数およびポアソン比である。最終的に、式(1)の複素応力関数 $\phi_k(z_k)$ および $\phi'_k(z_k)$ は、孔 Σ_1 の境界とその外部領域に対する式として具体的に次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_1(z_1) &= \frac{\mu_2 \bar{\alpha}_1 - \bar{\beta}_1}{\mu_2 - \mu_1} \cdot \frac{1}{\zeta_1}, \\
 \phi_2(z_2) &= -\frac{\mu_1 \bar{\alpha}_1 - \bar{\beta}_1}{\mu_2 - \mu_1} \cdot \frac{1}{\zeta_2}, \\
 \phi'_1(z_1) &= -\frac{\mu_2 \bar{\alpha}_1 - \bar{\beta}_1}{\mu_2 - \mu_1} \cdot \frac{1}{\zeta_1^2} \cdot \frac{1}{I_1}, \\
 \phi'_2(z_2) &= \frac{\mu_1 \bar{\alpha}_1 - \bar{\beta}_1}{\mu_2 - \mu_1} \cdot \frac{1}{\zeta_2^2} \cdot \frac{1}{I_2}.
 \end{aligned} \right\} \text{.....(7)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\alpha}_1 &= a(-\sigma_y^\infty + i\tau_{xy}^\infty)/2, \quad \bar{\beta}_1 = a(\tau_{xy}^\infty - i\sigma_x^\infty)/2, \\
 z_k &= x + \mu_k y \\
 &= a\{(1 - i\mu_k)\zeta_k + (1 + i\mu_k)\zeta_k^{-1}\}/2, \\
 \zeta_k &= [z_k^2 + \{z_k - a^2(1 + i\mu_k^2)\}^{1/2}]/a(1 - i\mu_k), \\
 I_k &= dz_k/d\zeta_k = a\{(1 - i\mu_k) - (1 + i\mu_k)\zeta_k^{-2}\}/2.
 \end{aligned} \right\} \text{.....(8)}$$

Fig. 2 Location of two holes and coordinate system

2・2 Double Holes Drilling 法の基礎理論

前述のような状態で、これに隣接して平行する第二の孔 Σ_2 (半径 b) が穿孔される場合の応力および変位の計算は、以下のような演算を行うことによって求めることができる。

いま、孔 Σ_1 の場合と同様に新しく穿孔する孔 Σ_2 に対して、図 1 に示すような直交座標系 ($x'y'$) をとるとすれば、両者の座標間には次の関係が成立する。

$$x' = x + s_0, \quad y' = y + h_0. \quad \text{.....(9)}$$

ここに、 s_0 および h_0 はそれぞれ二つの孔の中心間の x 方向および y 方向の距離である。ここで座標系 (x', y') 内の孔 Σ_2 をもつ単連結領域に対しても、式(8)と同様に複素平面 $z'_k (= x' + \mu_k y')$ を考え、これを ζ'_k -平面 ($\zeta'_k = \rho'_k e^{i\theta'}$) の単位円とその外部に写像するものとすれば、次式が成立する。

$$z'_k = (b/2)\{(1 - i\mu_k)\zeta'_k + (1 + i\mu_k)\zeta_k'^{-1}\}. \quad \text{.....(10)}$$

ところで、上式の z'_k と式(8)の z_k との間には、式(9)から

$$z'_k = z_k + (s_0 + \mu_k h_0). \quad \text{.....(11)}$$

の関係が存在するため、 ζ_k と ζ'_k の関係として、

$$\begin{aligned}
 a\{(1 - i\mu_k)\zeta_k + (1 + i\mu_k)\zeta_k^{-1}\} - b\{(1 - i\mu_k)\zeta'_k \\
 + (1 + i\mu_k)\zeta_k'^{-1}\} + 2(s_0 + \mu_k h_0) = 0. \quad \text{.....(12)}
 \end{aligned}$$

が得られる。上式は ζ_k -平面および ζ'_k -平面での孔 Σ_1 と Σ_2 との相互の位置関係を示すものである。

したがって、次のような操作を実行する。すなわち、

[I] 図 2 (a) に示すように孔 Σ_1 だけが穿孔された状態に対して、上式の ζ'_k に Σ_2 の仮想境界位置を表す $e^{i\theta}$ を代入してこの 2 次方程式を解けば、 Σ_1 の座標系を基準とした Σ_2 の位置 $\zeta_k (= \rho_k e^{i\theta k})$ が決定できる。この ζ_k を用いて式(8)、式(7)および式(1)から応力成分 σ_r , $\tau_{r\theta}$ を求めれば、これらは図 2 (a) の破線 (Σ_2 の仮想境界) 上における応力を表したことになる。

[II] 上記 [I] で求めた応力成分に Σ_2 の孔の境界の有限個の点 (i.e. 選点) での半径方向直応力 $\sigma_r = 0$, せん断応力 $\tau_{r\theta} = 0$ を満たすように、重ね合わせを行って新たに複素応力関数 $\phi_k^*(z'_k)$ を求めれば、上記と同様の手順により、図 2 (b) の状態の任意点での応力、変位およびひずみが決定できる。ただし、上述の [I], [II] の結果を重ね合わせれば、 Σ_2 の境界上での境界条件は満足されるが、 Σ_1 の境界における自由境界条件は損なわれる。

[III] そこで再び Σ_1 の境界における自由境界条件を満足させるように、上述の [II] の操作を図 2 (a) の状態のものに適用する。

以下、同様の操作を順次各々の孔周縁での応力値

$\sigma_r, \tau_{r\theta}$ が作用荷重に対して十分に小さくなるまで繰返して計算し、それぞれの段階で得られた値を重ね合わせれば、求めるべき Double Holes の応力および変位分布が得られる。通常は、上記 [I], [II] の操作を適切な選点数および 4~6 回の繰返し計算を実行すれば、高精度の解を得ることができる。

例えば、境界上での選点数を $\Delta\theta=2.5^\circ$ すなわち 144 点とし、以下に示す式(13)の級数式の項数 m を 25 まで採用して繰返し回数を 6 回行ったものは、Haddon の解析結果⁽⁵⁾ および双極座標系を用いた解などの他の数値解と比較して、ほぼ 0.5% 程度以内の精度が得られることが検証されている⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

前述の [II] の計算で用いられる複素応力関数 $\phi_k^*(z_k)$ は、次式に示すような級数形で与えられるものである。

$$\phi_k^*(z_k) = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma'_{km} \zeta_k'^{-m}, \quad (k=1, 2). \dots\dots (13)$$

ここに、複素係数 Γ'_{km} は式(7)の第 1, 2 項に示す複素応力関数の分子と類似の形であり、この $\bar{a}_1, \bar{\beta}_1$ の代わりに孔の境界に作用する応力を境界に沿って線積分して得られる $\bar{a}'_m, \bar{\beta}'_m$ をそれぞれ代入することによって求められる。

なお、実験による計測ではひずみが得られるが、理論的な取扱いでは応力が求められておれば、式(2)の構成式により、簡単にひずみが計算できる。

3. Double Holes Drilling 法のための数値解析

3.1 解析条件 2.2 節で述べた DHD 法を確立するための基礎理論を具体的なモデルに適用して求めた数値解析例を以下に示す。解析モデルは図 1 に示すように半径 a の孔 Σ_1 に隣接して孔 Σ_2 (半径 b) が穿孔される場合を考える。上述したように、ASTM に規定されている Hole Drilling 法 (HD 法)⁽⁸⁾ では一般に、

Fig. 3 Analytical model for problem of two neighboring holes

ゲージ長として約 2 mm 程度の三軸のゲージロゼットを貼り付け、その中心に孔 (孔径約 2 mm) を穿孔し、それぞれのゲージにより検出されるひずみ変化から残留応力を求めるが、本手法も同様に図 3 に示すように添付した三つのゲージ gage 1~3 の中心に Σ_1 を穿孔した場合を想定した。したがって、gage 2 を x 軸上に、また gage 1 を y 軸上になるように座標系をとり、 Σ_2 を gage 1 と gage 3 から等距離になるように、つまり x 軸に対して 22.5° の方向に中心がくるように穿孔し、主弾性軸方向の角度 α 、二つの孔の中心距離 l_0 および Σ_2 の半径 b をパラメトリックに変化させて解析する。ここでは、材料は二次元的な直交異方性体で、主弾性係数の比 $e^* (= E_1/E_2) = 2.0$ 、ポアソン比 $\nu_{12} = 0.25$ と仮定した。また、解析は平面応力状態とし、さらに直交異方性体のせん断弾性係数 G_{12} として、次式により計算するものとした。

$$G_{12} = \left(\frac{1+2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)^{-1} \dots\dots\dots (14)$$

これは、 e^* を等方性の場合に縮退 (i.e. $e^* \rightarrow 1.0$) させたときに、 G と E, ν の関係式に帰着するように仮定したものである。なお、DHD 法を利用して残留応力を測定する場合には、残留応力状態下であらかじめ材料表面にゲージロゼットを貼り付け、ロゼットの中心に測定孔 Σ_1 を穿孔し、ひずみを測定し、さらに解放孔 Σ_2 の穿孔を行って再度ひずみを測定しその変化量を求めればよい。つまり DHD 法では従来の手法である Σ_1 のみの場合のひずみと Σ_2 を穿孔させた場合のひずみ変化量による二つより、残留応力を求めることができ、二重の確認を行うことが可能である。それらを求めるためには、 Σ_1 周辺の材料表面のゲージ位置での半径方向のひずみ変化量 $\Delta\epsilon_r$ の理論解析が必要となる。

3.2 2 孔の相互作用の影響 図 4, 5 は残留応力 σ_x, σ_y および τ_{xy} をそれぞれ作用させ、 Σ_1 を穿孔した状態で Σ_1 から離隔距離 l のところに Σ_2 を穿孔した場合に、gage 1~3 で得られたひずみ変化量 $\Delta\epsilon_r$ を、 l と Σ_1 の半径 a の比 ($= l/a$) との関係で整理したものである。これらは Σ_2 の大きさが等円 ($b=a$) と 2 倍円 ($b=2a$) の場合について計算したものであり、図 4, 5 は主弾性軸方向の角度 α がそれぞれ $0^\circ, 45^\circ$ のものである。なお、二つの孔の離隔距離 l と中心距離 l_0 の間には次式が成り立つ。

$$l = l_0 - (a+b), \quad l_0 = \sqrt{s_0^2 + h_0^2} \dots\dots\dots (15)$$

ここでは、ひずみ変化量 $\Delta\epsilon_r$ は Σ_2 を穿孔したときに各ゲージで検出されたひずみ値より、孔が一つも存在しない場合に生じている残留応力から算定されるひず

み値を差し引いて求めてある。

これらの図よりわかるように、 l/a が小さい範囲では二つの孔の相互作用により、 $\Delta\epsilon_r$ の変動は大きい、 l/a が大きい範囲では相互作用は、徐々に小さくなり $\Delta\epsilon_r$ の値も一定値に近づくことがわかる。例えば、 $l/a=10$ 以上のように 2 孔が十分に離れて存在する場合には、相互作用はほとんどなくなるため、この場合の $\Delta\epsilon_r$ の値は DHD 法の第 1 回目の測定である Σ_1 のみを穿孔した場合のひずみの値とみなすことができる。

また、通常の Hole Drilling 法 (HD 法) で残留応力を測定する際、ひずみ変化量の絶対値は大きい方が当然精度良く測定できるが、 l/a が小さい範囲での $\Delta\epsilon_r$ は変動が大きいため、 l/a の値の選定には注意が必要である。

3.3 ゲージ領域の影響 3.2 節で示したひずみ値はゲージ長さの中央の 1 点での値であるが、実際のゲージで測定されるひずみはゲージ長さの領域全体に対する平均の値である。このため、一般にゲージはそ

Fig. 4 Effect of the drilling hole Σ_2 on radial strains of the gages by the hole Σ_1 for the case of $\alpha=0^\circ$

Fig. 5 Effect of the drilling hole Σ_2 on radial strains of the gages by the hole Σ_1 for the case of $\alpha=45^\circ$

Fig. 6 Effect of drilling the hole Σ_2 on radial strains of three points (center and both sides) of the gages by the hole Σ_1 in the case of $\alpha=0^\circ$

Fig. 7 Effect of drilling the hole Σ_2 on radial strains of three points (center and both sides) of the gages by the hole Σ_1 in the case of $\alpha=45^\circ$

の周辺のひずみ場が一定であるようなところに貼るのが理想的である。しかし、HD 法ないし DHD 法のように応力集中部近傍で測定を行う際は、極端な応力勾配が生じ一様ひずみ場は存在しなくなる。このような場合、ゲージで検出されるひずみはそのひずみ場におけるゲージ領域内の平均値を示したものとなる⁽⁹⁾。したがって、ゲージ領域内の各点におけるひずみを調べる必要がある。

そこで、ここでは簡略的にゲージ長さの中心位置とその両端の合計 3 点におけるひずみ変化量を、 Σ_2 が 2 倍円 ($b=2a$) の場合のみについて求め、 ℓ/a との関係で整理したものを図 6, 7 に示す。ここで、gage 1~3(c), gage 1~3(i) および gage 1~3(o) はそれぞれゲージの中心位置 ($r=2a$)、 Σ_1 に対して内側の端 ($r=1.37a$) および外側の端 ($r=2.61a$) におけるひずみ変化量を示す。これよりわかるように、gage 1~3(c) の値は gage 1~3(i) と gage 1~3(o) との完全な平均値にはなっておらず、gage 1~3(c) の値だけで評価することは必ずしも正しくないことがわかる。

上述したように、ゲージで検出されるひずみはそのゲージ領域内のひずみの平均値であるため、このように 3 点だけではなく、ゲージ領域内全体のひずみを求め、その平均値をとることが理想的である。

Schajer & Yang⁽¹⁰⁾ は HD 法を用いて直交異方性材の残留応力を求めるために、残留応力下における直交異方性材の孔周辺の解析式に基づいた新しい応力測定法について提案し、また実験を行うことによって、その手法の妥当性を示したが、そこでは、ゲージで検出されるひずみはゲージ領域内のひずみの平均値として扱っている。著者らの理論で、1 円孔問題とした同一の計算例は Schajer & Yang によるものと基本的に、ほぼ一致した結果となっている。

Fig. 8 Estimation charts of sensitivity coefficients of the gages by the hole Σ_1

4. 残留応力の算定手法

今までに述べた数値解析結果は、座標軸方向成分の残留応力がそれぞれ単独に作用した場合の、gage 1~3 で検出されるひずみの変化量を与えるものである。すなわち、個々の残留応力に対する感度係数 (ひずみ係数) を提示したことになる。これらにより、各ゲージでのひずみの変化量が測定されると、

これらの解析結果を使って、材料の残留応力(主応力)を求めることができる。ここでは、各々のひずみの測定値 ϵ_r を用いて、残留応力を算定する方法について以下に提示する。

例えば、対象とする材料の弾性定数が前もって実測され、それらが先に求めた物性のもの(すなわち、弾性係数の比 $e^*=E_1/E_2=2.0$ 、異方性の弾性主軸の傾斜角度 $\alpha=0^\circ, 45^\circ$ およびポアソン比 $\nu_{12}=0.25$) の場合には、図 4、5 の結果が利用できる。

図 8(a)~(c) は、 $b=2a$ 、 $\alpha=45^\circ$ の場合に gage 1~3 で得られたひずみ変化量に対する後述する、いわゆる感度係数を示したもので、いずれもゲージ位置の材料物性に対応した感度係数が与えられている。また図 8(d) は、上述の(a)~(c)の結果を重ね合わせたものである。材料に作用している残留応力は、座標軸方向の各応力成分が組合わさったものであり、測定値は当然図 8(d)の結果と対応することになる。さらに、 $a_1 \sim a_3$ 、 $b_1 \sim b_3$ 、 $c_1 \sim c_3$ および $d_1 \sim d_3$ は感度係数を示すもので、 a_1, a_2, a_3 は σ_x^∞ に対応し、それぞれ gage 1, gage 2, gage 3 で検出されるひずみ変化量の感度係数である。同様に b_1, b_2, b_3 は σ_y^∞ に、 c_1, c_2, c_3 は τ_{xy}^∞ に対応した感度係数であり、最後に、 d_1, d_2, d_3 は、それぞれ $a_{1,2,3} \sim c_{1,2,3}$ の値を重ね合わせたものである。

いま、gage 1 でひずみ変化量 $\Delta\epsilon_{r(1)}$ が得られたとすると、計測ひずみと残留応力成分との関係は図 8 を用いて次式のように表示される。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\epsilon_{r(1)} &= \Delta\epsilon_{r(1)(a)} + \Delta\epsilon_{r(1)(b)} + \Delta\epsilon_{r(1)(c)} \\ &= \frac{1}{E_1} (a_1 \sigma_x^\infty + b_1 \sigma_y^\infty + c_1 \tau_{xy}^\infty) \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

ここに、 E_1 は弾性主軸方向の弾性係数、 a_1, b_1, c_1 は感度係数であり、ゲージ位置に対応して図 8 から読取ることができる。また、 $\Delta\epsilon_{r(1)(a)}$ 、 $\Delta\epsilon_{r(1)(b)}$ 、 $\Delta\epsilon_{r(1)(c)}$ は、それぞれ計測ひずみ $\Delta\epsilon_{r(1)}$ に対する各残留応力成分の寄与度を表す。

したがって、それぞれのゲージで 3 点の半径方向ひずみ変化量 $\Delta\epsilon_{r(k)}$ ($k=1, 2, 3$) が測定されると、残留応力の成分はそれぞれ次式(17)あるいは式(18)から容

易に算定することができる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_{r(1)} \\ \Delta\epsilon_{r(2)} \\ \Delta\epsilon_{r(3)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_1} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^\infty \\ \sigma_y^\infty \\ \tau_{xy}^\infty \end{Bmatrix} \dots\dots (17)$$

上式を逆表示して次式を得る。

$$\{\sigma_{ij}^\infty\} = E_1 [B]^{-1} \{\Delta\epsilon_{r(k)}\}, (i, j = x, y, k = 1, 2, 3). \dots\dots (18)$$

ここに、 σ_{ij}^∞ は残留応力成分、 B は感度係数のマトリックスである。

5. 逆解析による残留応力の算定手法

材料内部の残留応力は、4章で述べたようにあらかじめ解析によって求められた感度係数を利用して、逆解析により直接算定することができる⁽¹¹⁾。

逆解析の手法には、逆定式化法と直接定式化法がある⁽¹²⁾、ここでは第 2 章で示した異方性弾性体に対する高精度の解を用いた直接定式化法について、主応力を同定する方法を述べる。

まず、同定すべきパラメータとしては図 1 に示す三つの面内残留応力 σ_x^∞ 、 σ_y^∞ および τ_{xy}^∞ とする。なお、異方性材料の弾性定数は前もって実測され、それらが先に求めた物性のもの(すなわち、主弾性係数の比 $e^*=E_1/E_2=2.0$ 、異方性の弾性主軸の傾斜角度 $\alpha=0^\circ, 45^\circ$ およびポアソン比 $\nu_{12}=0.25$) とした。

入力データは次のように取扱う。例えば、 Σ_1 から離隔距離 l のところに Σ_2 を穿孔した場合に、gage 1~3 でひずみ変化量 $\Delta\epsilon_{r(1) \sim (3)}$ が得られたものとする。これらは原位置での測定値によって定まるものであり、逆解析の入力データとなるものである。一方、解析によるひずみ変化量 $\Delta\epsilon_{r(1) \sim (3)}^*$ は式(2)により、前述の同定パラメータを適宜与えることによって自動的に決定される。これより、原位置計測および解析により求められるひずみ変化量の値が、次式の条件を満足するまで各パラメータを変化させながら繰返し

Table 1 Input data for inverse analysis using strains in the case of $l/a=2.0$

($\times 10^{-4}$)			
Strain	$\Delta\epsilon_{r(1)}$	$\Delta\epsilon_{r(2)}$	$\Delta\epsilon_{r(3)}$
Analysis1,2	-0.0295	-0.2377	0.2731
Analysis3~5	-0.0307 (+4%)	-0.2329 (-2%)	0.2622 (-4%)

Table 2 Results of inverse analysis using Table 1

	E_1	E_2	σ_x^∞	σ_y^∞	τ_{xy}^∞	$\Delta\epsilon_{er}$
Correct Ans.	100,000	50,000	5.00	3.00	2.00	—
Analysis1	100,000*	50,000*	5.00	3.00	2.00	10^{-10}
Analysis2	100,000*	50,000*	4.74	3.07	1.98	10^{-5}
Analysis3	100,000*	50,000*	5.19	2.98	2.20	10^{-10}
Analysis4	100,000*	50,000*	5.18	2.96	1.98	10^{-5}
Analysis5	100,000*	50,000*	7.44	1.78	0.61	10^{-4}

(* Fixed to correct answer)

計算を行うことによって、最適なパラメータを同定することができる。

$$\sum_{k=1}^3 (\Delta \varepsilon_{r(k)} - \Delta \varepsilon_{r(k)}^*)^2 \leq \Delta \varepsilon_{er}^2, \quad (k=1, 2, 3) \cdots (19)$$

ここに、 $\Delta \varepsilon_{er}$ は許容誤差を表す。

表 2 にこのようにして同定した逆解析の一つの例を示す。ここでは、図 1 に表示したような異方性弾性体内に、残留応力成分 $\sigma_x^0=5.00$, $\sigma_y^0=3.00$, $\tau_{xy}^0=2.00$ (これは $\sigma_1^0=6.24$, $\sigma_2^0=1.76$, および σ_1^0 の反時計回りの方向角 $\phi=32^\circ$ に相当) が作用している状態で、 Σ_1 とそれより $l/a=2.0$ のところに $\Sigma_2(b=2a)$ が穿孔された場合をあらかじめ解析し、そのときに得られた gage 1~3 の位置でのひずみ変化量を原位置での測定値とみなして表 1 に示すように入力データとして与えた。このうち解析 1 と 2 は、上記で与えられたひずみを有効数字 3 けたに丸めて入力データとしたもので、解析 1 は式 (19) 中の $\Delta \varepsilon_{er}=1.0 \times 10^{-10}$ として、また解析 2 は $\Delta \varepsilon_{er}=1.0 \times 10^{-5}$ として解析したものである。また解析 3~5 は、原位置計測では測定誤差が伴うことを考慮して、それぞれ $\pm 5\%$ の範囲でランダム変化させたものであり、解析 3 は $\Delta \varepsilon_{er}=1.0 \times 10^{-10}$, 解析 4 は $\Delta \varepsilon_{er}=1.0 \times 10^{-5}$ また、解析 5 は $\Delta \varepsilon_{er}=1.0 \times 10^{-4}$ として解析したものである。表 2 に示すように、材料の弾性定数を与えて逆解析した結果は、解析 5 の場合を除いて、残留応力成分の値を精度良く同定できていることがわかる。また、 $\Delta \varepsilon_{er}$ の値によって同定される値が異なっているが、解析 1 と 2 では、 $\Delta \varepsilon_{er}=8.2 \times$

10^{-6} を境に、また解析 3~5 では $\Delta \varepsilon_{er}=8.19 \times 10^{-5}$ を境として、同定値が急激に変わってくる。このことは $\Delta \varepsilon_{er}$ をある程度以下に設定することの必要性を示唆している。

上記の場合に対して、従来から実施されている、通常の Hole Drilling 法 (HD 法) による場合についての結果を示す。すなわち、測定孔 Σ_1 のみを穿孔したときに得られるひずみ値より、材料内部の残留応力を算定した一例を表 4 に示す。これは異方性弾性体内に、残留応力成分 $\sigma_x^0=5.00$, $\sigma_y^0=3.00$, $\tau_{xy}^0=2.00$ が作用している状態で、 Σ_1 が穿孔された場合をあらかじめ解析し、そのときに得られた gage 1~3 の位置でのひずみ $\varepsilon_{r(1)-(3)}$ を原位置での測定値とみなして表 3 に示すように入力データとして与えた。これらの解析 6~10 は、それぞれ解析 1~5 に対応しており、表 3 に示すひずみを有効数字 3 けたに丸めて入力データとしたものである。なお、これらの解析は Σ_1 を穿孔したときに得られるひずみ値より、残留応力を測定した場合に近似でき、したがって、DHD 法における第 1 回目の測定と対応している。

表 4 に示すように解析 10 の場合を除いて、残留応力成分の値を精度良く同定できていることがわかる。また、表 2 と同様に $\Delta \varepsilon_{er}$ の値によって同定される値が異なり、同定値の精度が急激に悪くなるのは、解析 6 と 7 では、 $\Delta \varepsilon_{er}=6.3 \times 10^{-6}$, 解析 8~10 では $\Delta \varepsilon_{er}=1.9 \times 10^{-4}$ である。

なお、表 2 と表 4 を比較した場合、特に解析 2 と解析 7 の比較では、解析 2 の方が解析 7 より精度が劣っており、DHD 法の方が HD 法よりも精度が低い結果となっているが、これは許容誤差 $\Delta \varepsilon_{er}$ の値の設定が大きいことが原因である。解析 1 と解析 6 の比較でわかるように $\Delta \varepsilon_{er}$ の値を十分に小さくしておけば、両手法の精度には差がほとんど見られない。

6. 結 言

本論文では、近接した二つの孔の相互干渉による弾性的な応力集中を利用した応力測定法 (Double Holes Drilling 法) の測定理論に関して、二次元残留応力下での異方性弾性材の場合にも適用拡張を図るために、複素関数論に関する弾性解を用いた、Double Holes の感度係数に関する高精度の弾性解を提示した。この手法によると、二次元残留応力の 3 成分 (σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0) を決定することができる。また従来の Hole Drilling 法では一つの材料に添付したひずみゲージに対して、測定が 1 回しかできないという欠点があるが、本手法ではこのゲージに対して 2 回まで測定を行うことがで

Table 3 Input data for inverse analysis using strains in the case of single hole

Strain	$(\times 10^{-4})$		
	$\Delta \varepsilon_{r(1)}$	$\Delta \varepsilon_{r(2)}$	$\Delta \varepsilon_{r(3)}$
Analysis 6, 7	-0.0846	-0.2242	0.2390
Analysis 8~10	-0.0880 (+4%)	-0.2197 (-2%)	0.2294 (-4%)

Table 4 Results of inverse analysis using Table 3

	E_1	E_2	σ_x^0	σ_y^0	τ_{xy}^0	$\Delta \varepsilon_{er}$
Correct Ans.	100,000	50,000	5.00	3.00	2.00	—
Analysis 6	100,000*	50,000*	5.00	3.00	2.00	10^{-10}
Analysis 7	100,000*	50,000*	4.84	3.04	1.95	10^{-5}
Analysis 8	100,000*	50,000*	5.14	2.95	2.16	10^{-10}
Analysis 9	100,000*	50,000*	4.95	2.98	2.11	10^{-5}
Analysis 10	100,000*	50,000*	4.53	1.96	-1.21	10^{-4}

(* Fixed to correct answer)

き、二重の確認が可能である。

しかし、本論文で示したひずみの値はゲージの中心部での値であるのに対して、実際にゲージで検出されるひずみ値はゲージ領域全体にわたっての平均値であるため、両者の値が必ずしも一致していない。このことに関しては今後の課題である。

なお、Double Holes Drilling 法の実験的な検証に関しては、次の機会に発表したい。

文 献

- (1) Mathar, J., *Trans. ASME*, **56** (1934), 249-254.
- (2) Rendler, N. J. and Vigness, I., *Exp. Mech.*, **6** (1966), 577-586.
- (3) Lake, B. R., Appl, F. J. and Bert, C. W., *Exp. Mech.*, **10** (1970), 233-239.
- (4) 菊地慎二・山下幸夫・平島健一・川本眺万, 土木学会論文集, No. 440 (1994), 39-48.
- (5) Haddon, R. A. W., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **20** (1963), 277-291.
- (6) Hirashima, K., *Proc. of JSCE*, No. 220 (1973), 131-141.
- (7) 丹羽義次・平島健一, 土木学会論文報告集, No. 196 (1971), 9-18.
- (8) *Annual Book of ASTM*, (1992), 747-753.
- (9) Schajer, G. S., *Strain*, **29** (1993), 9-13.
- (10) Schajer, G. S. and Yang, L., *Exp. Mech.*, **34** (1994), 324-333.
- (11) 平島健一・川上哲太郎・藤原紀夫・山下幸夫, 土木学会論文集, No. 439 (1991), 1-8.
- (12) 桜井春輔・武内邦夫, 土木学会論文集報告書, No. 337 (1983), 137-145.