FEM モデリングにおける 6 面体メッシュと 4 面体メッシュを混合する自動メッシング技術の開発*

横 張 孝 志^{*1}, 西 垣 一 朗^{*1}, 江 澤 良 孝^{*1}

Algorithm Combining Hexahedron and Tetrahedron Meshes for FEM Modeling

Takashi YOKOHARI, Ichirou NISHIGAKI and Yoshitaka EZAWA

Advanced calculation due to progress in computing power and the development of mesh-generating capabilities for analyzing structures have led to the need for a pre-processor that can generate an optimal mesh quickly and accurately. Tetrahedron and hexahedron meshes are generally used in structural analysis; the former is very adaptable to various structural configurations, and the latter calculates accurate results. Using these features, we have developed an automatic mesh pre-processor that can generate a hexahedron mesh for the part requiring precise results and tetrahedron mesh for the remaining part. To conserve displacement compatibility, a pyramidal mesh is used for the interface between these two meshes. Simulation showed that this method works well for finite-element-method modeling of holed-plate extensions and gearings.

Key Words: Numerical Analysis, Finite Element Method, Computer Aided Engineering, Automatic Mesh Generation

1. 緒 言

計算機性能の向上とあいまって解析技術が大幅に進歩し、大規模かつ高精度な解析を高速で行える環境が整備されつつある。このような状況下で、製品開発における CAE を用いた解析シミュレーションへの期待は高まっているが、解析用データ作成等の対話的処理の占める時間は逆に増大しており、全体の解析作業時間を短縮する上でのネックとなっている。

上記問題を解決するためには、3 次元 CAD システムで作成した製品モデルを用いて、解析モデルの作成から解析結果の評価までの一連の解析作業を支援する CAD-CAE 一貫システムの構築が必須であり、そのなかでも解析用メッシュの自動生成技術の開発が最も重要な課題となっている。高度な解析を短時間で行うためのメッシュ生成技術としては、総メッシュ数を増加させずに解析対象の形状を精度良く表現することや、メッシュを高速に生成することが要求される。しかしながら、最近の研究状況⁽¹⁾を見ても解析者が意図する実用性の高いメッシュ生成システムはいまだ開発されていないのが現状である。

筆者らは、3 次元 CAD-CAE 一貫システムを構築するために、これまでソリッドモデルのための独自の写像

法に基づく 6 面体メッシュ自動生成技術⁽²⁾や 4 面体メッシュ自動生成技術⁽³⁾を開発してきた。さらに、これらのメッシュ生成に基づくアダプティブメッシュ解析機能⁽³⁾⁽⁴⁾やズーム解析機能⁽⁵⁾の技術開発によってシステムの機能拡張を図ってきた。

本報告では、システムの機能をさらに向上させるための、4 面体と 6 面体メッシュを混合するメッシュ自動生成技術について述べる。解析対象が 3 次元ソリッドの場合には一般に 6 面体や 4 面体メッシュが用いられる。規則的に配置した 6 面体メッシュは解析結果にばらつきが無いという利点を有しているが、形状が複雑な構造への適用が困難であるという欠点がある。一方、4 面体メッシュは任意の形状に適用可能であるが、メッシュの並びが不規則なために要素間での解析結果にばらつきを生じる欠点を有している。そこで、解析対象で精度が要求される領域にのみ 6 面体メッシュを、その他の領域については 4 面体メッシュを自動生成する。この場合、6 面体と 4 面体メッシュの間に 4 角錐メッシュを生成して、6 面体と 4 面体メッシュ間で生じる変位の不連続性を解消している。さらに、開発した技術を実製品のはずば歯車の接触問題に適用し、接触部における解析結果を精度良く評価できることや収束安定性が良くなることを確認して、本手法の妥当性を検証する。

* 原稿受付 1997 年 10 月 6 日。

^{*1} 正員、(株)日立製作所機械研究所(☎ 300-0013 土浦市神立町 502)。

2. 6 面体と 4 面体の混合メッシュ 生成システム

2.1 システム構成 図 1 に 6 面体と 4 面体の混合メッシュ生成システムの全体構成を示す。本システムは、①形状モデル入力部、②メッシュ自動生成部、③形状モデルとメッシュモデルを格納するモデルデータベースとから構成されている。形状モデル入力部では、解析対象の形状モデル作成と、6 面体メッシュ領域の設定、6 面体メッシュ領域に対するメッシュ分割数の設定、4 面体メッシュの標準メッシュ寸法の設定を対話的に行う。メッシュ生成部では、6 面体メッシュ生成、4 面体メッシュ生成、および 6 面体メッシュと 4 面体メッシュ接続用の 4 角錐メッシュ生成を行う。以下、混合メッシュ生成の具体的手順を述べる。

Fig.1 Combined mesh generation system

2.2 混合メッシュ生成手順 図 2 は解析対象とするブロックへの球の押し込み問題(1/4 領域)の例である。本例を用いて 6 面体メッシュと 4 面体メッシュを混合したメッシュモデルを生成する処理手順を説明する。この例では、上下の構造物が接する部分を 6 面体メッシュ領域とし、残りの部分を 4 面体メッシュ領域としている。

2.2.1 6 面体メッシュ生成 図 3 は、図 2 で示した 6 面体メッシュ領域の各辺にメッシュ分割数を設定し、写像メッシュ法⁽⁶⁾を用いて生成した 6 面体メッシュである。写像メッシュ法は 6 面体メッシュを生成する部分領域を直方体と見なし、ユーザが入力したメッシュ分割数などの情報に基づき、直方体の表面と

Fig.2 Geometry model

Fig.3 Hexahedral mesh generated using mapping method

内部にメッシュを生成した後、形状関数を用いて元の形状にメッシュを写像するものであり、対話的な 6 面体メッシュ生成処理において多く使われている。

メッシュ分割数は形状モデル入力部において、6 面体メッシュ生成領域の縦、横、高さ方向にあたる稜線を対話的に指示し、その稜線に分割数を表す整数値を入力することで設定する。この例では、図 2 における上部の領域(A)に対し(縦×横×高さ)=($3 \times 3 \times 3$)、領域(B)に対し($3 \times 3 \times 5$)としている。

2.2.2 4 角錐メッシュ生成 図 3 のハッチング部分は、4 面体メッシュ領域に隣接する 6 面体メッシュである。形状モデルの各領域を構成する面の識別番号等の境界表現構造に基づき、領域間の共有面を検索することで、該当する 6 面体メッシュを抽出し、ここに 4 角錐メッシュを配置する。

4 角錐メッシュのデータ構造は、既存の解析プログラムを利用するために、6 面体メッシュを縮退した形態としている。図 4 に 6 面体メッシュと比較した 4 角錐メッシュのデータ構造を示す。図 4(a)は 1 次の 6 面体メッシュの節点番号であり、図 4(b)は 1 次の 4 角錐メッシュの節点番号である。また、それぞれのメッシュを節点番号に基づいて扱うための計算機上でのデータ

構造を図 4(e) に示す。位相的なデータ構造を 6 面体メッシュと 4 角錐メッシュとで共通とするため、節点番号の格納のために双方とも 8 カラムずつ使用している。そして 4 角錐メッシュの節点番号をカラム 1, 2, 3, 4 において重複させる。このように、見かけ上は 4 角錐メッシュであるが、6 面体メッシュと同一の位相構造として、6 面体メッシュに対する解析計算と同様の手段で 4 角錐メッシュの解析を行う。

(e) Data array of node numbers with above elements

Fig.4 Comparison between hexahedral and pyramidal mesh data

図 4(c) および図 4(d) は 2 次の 6 面体メッシュと 4 角錐メッシュの節点番号とデータ表現である。6 面体メッシュのコーナー部分の 4 節点(カラム 1, 2, 3, 4)に加え、中間節点部分(カラム 9, 10, 11, 12)も重複させたデータ表現としている。

本メッシュ生成処理において、事前に図 4(a) で示した 1 次の 6 面体メッシュが生成されている場合は、図 4(b) で示した 1 次の 4 角錐メッシュを生成し、また、図 4(c) で示した 2 次の 6 面体メッシュが生成されている場合は図 4(d) で示した 2 次の 4 角錐メッシュを生成する。

次に 4 角錐メッシュの頂点(底面に対向する節点)の座標の決定方法を説明する。4 角錐メッシュの頂点方向は 6 面体メッシュの形状に依存して決定している。それを図 5 により説明する。3 次元では図示し難いため便宜上 2 次元で示している。この図は傾斜している形

状境界に 4 角形メッシュが平行四辺形状に生成されており、そこに 3 角形メッシュを配置した状態を表している。図 5 ①は 3 角形メッシュの頂点を底辺から垂直方向に生成したものであり、3 角形メッシュと形状境界との干渉が生じている。この問題を回避するため、4 角形メッシュの傾斜を考慮して 3 角形メッシュの頂点方向を決定したものが図 5 ②である。3 次元の場合も同様にして、6 面体メッシュの傾斜を考慮して 4 角錐メッシュの頂点方向を決定することにより形状境界との干渉を回避している。以下、具体的な頂点座標値の導出アルゴリズムを述べる。

Fig.5 Geometry control of pyramidal mesh in 2D problem

図 6 で N1 から N8 は 6 面体メッシュの節点であり、Np は面 [N1, N2, N3, N4] の重心点、Nq は面 [N5, N6, N7, N8] の重心点である。また、Np の座標値を (Xp, Yp, Zp)、Nq の座標値を (Xq, Yq, Zq) とする。そこで、6 面体メッシュの幅、奥行き、高さに相当する Whex, Dhex, Hhex を次のように定義する。

Whex : [N1, N2] 間の距離と [N3, N4] 間の距離の平均

Dhex : [N1, N4] 間の距離と [N2, N3] 間の距離の平均

Hhex : Np と Nq の距離

Fig.6 The top of pyramidal mesh

このとき、4 角錐メッシュの高さに相当する Hpyra を次の式(1)で定義する。

$$H_{pyra} = \min(Whex \times C_1, Dhex \times C_1, Hhex \times C_1, MS \times C_2) \quad \dots (1)$$

式(1)で'min'は引数の最小値を返す関数であり、MS は標準メッシュ寸法である。また、C1 および C2 は 4 角錐メッシュの高さを制御する定数である。そして、次の

式(2)により, 6 面体メッシュの面の重心点 N_p と N_q の位置から 4 角錐メッシュの頂点方向ベクトルを決定し, 頂点座標値 (X_c, Y_c, Z_c) を求める.

$$\left. \begin{aligned} X_c &= X_p + (X_p - X_q) / H_{hex} \times H_{pyra} \\ Y_c &= Y_p + (Y_p - Y_q) / H_{hex} \times H_{pyra} \\ Z_c &= Z_p + (Z_p - Z_q) / H_{hex} \times H_{pyra} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

上式で得られた頂点と, 対応する 6 面体メッシュの節点 (N_1, N_2, N_3, N_4) とから 4 角錐メッシュを生成する. また, 2 次要素の場合には中間節点を除く N_1 から N_8 までの 8 節点座標値を用いて 1 次要素の場合と同様に頂点座標値を求める.

図 7 は式(1)における定数を $C_1=0.5, C_2=0.2$ として 6 面体メッシュ上に 4 角錐メッシュを生成した例である. 以降の例でも同じ定数値を用いる.

Fig.7 Hexahedral and pyramidal mesh

2・2・3 4 面体メッシュ生成 4 面体メッシュ生成では先ず形状モデル入力部で設定された標準メッシュ寸法値に従って 4 面体メッシュ生成領域表面に 3 角形メッシュを生成する. 6 面体メッシュ生成領域に隣接する部分には 4 角錐メッシュが生成されているので, ここに新たな 3 角形メッシュは生成せず, 4 角錐メッシュの表面 3 角形を取り出す. これらの表面 3 角形メッシュを用いて 4 面体メッシュを生成する. ここ

Fig.8 Completed combination mesh

では 4 面体メッシュ生成アルゴリズムについての説明は省略するが, 例えばアドバンシング・フロント法, デローニ法⁽⁷⁾等を用いる.

図 8 は, 図 7 の状態に 4 面体メッシュを追加して完成した最終的な形態のメッシュモデルである. 4 面体メッシュは規則性の点では 6 面体メッシュに劣るが, 任意形状に対する適用性が高く, 容易に自動メッシュ生成が行える.

3. 本手法の信頼性の検討および考察

3・1 円孔平板モデルによる検証 図 9 に示す円孔平板の引張り問題を取りあげ, 6 面体と 4 面体の混合メッシュの解析精度等を検証する.

Fig.9 Geometry model and analytical conditions

(a) Combined mesh

(b) Hexahedral mesh

(c) Tetrahedral mesh

Fig.10 Mesh model

図 10(a)に 6 面体と 4 面体の混合メッシュを示す。応力集中部に 6 面体メッシュを配置し、さらにメッシュ集中を施した。また、図 10(b)は比較のための 6 面体メッシュであり、特に円孔部にメッシュを集中させた。図 10(c)は同様の 4 面体メッシュである。

表 1 はそれぞれのメッシュの節点数、要素数および図 9 に示した評価点における x 方向応力 σ_x の解析誤差であり、評価点における解析結果に関してはいずれのメッシュも許容値内であると考えられる。図 12 は評価点を起点とし、Y 方向へ 10.0mm 移動する地点に至る応力変化の大きい箇所の σ_x を示したものである。4 面体メッシュによる解析では応力値にばらつきが見られるが、6 面体と 4 面体の混合メッシュの場合は 6 面体メッシュによる解析とほぼ同様の結果が得られた。

Table 1 Analysis results

	Number of nodes	Number of elements	$(\sigma_x - \sigma_{x \text{ exact}}) / \sigma_{x \text{ exact}}$
model(a)	982	286	-3.01%
model(b)	2,715	480	-5.33%
model(c)	1,591	810	-4.00%

($\sigma_{x \text{ exact}}$ は日本機械学会編 機械工学便覧より出典)

Fig.11 Stress distribution

3.2 接触問題への適用 はすば歯車の接触解析に適用したメッシュを図 12(a)に示す。2つの歯車の噛み合う部分に 6 面体メッシュを配置している。図 12(b)は接触部における 6 面体メッシュと、それに接続する 4 角錐メッシュであり、4 角錐メッシュの頂点の位置(高さ)と方向が 6 面体メッシュ形状に依存している状態を表している。

図 13 はこのメッシュを用いて解析した時に得られた応力分布であり、接触部において妥当な圧縮応力が求められていると考える。従来の 4 面体メッシュを使う方法では、本例のように接触部が広く、大きくねじれている形状では、接触解析のためのモデル作成が難しく、また、解析計算の収束性が悪くなって解析が困

難であった。表 2 に本例の解析作業にかかった時間を示す。形状モデル作成時に 6 面体メッシュ生成領域を定義するための手間が加わるが、形状モデル全体を 6 面体メッシュで分割する場合と比較してメッシュ生成は容易であるので、解析作業時間の短縮に効果があった。

Fig.12 Mechanical gear model

Fig.13 Stress distribution

Table 2 Execution time

Geometry modeling	4 hour
Combined mesh generation	0.2 hour
Contact stress analysis	3 hour
(Including file I/O and interactive operation)	

5. 結 言

6 面体メッシュと 4 面体メッシュを混合させたメッシュの自動生成手法を開発し、以下の結論を得た。

- (1) 4 角錐メッシュを用いて 6 面体メッシュと 4 面体メッシュを接合する技術を開発し、節点変位の連続性に矛盾のない解析モデルを作成した。また、それら一連のメッシング処理作業を完全自動化できた。
- (2) 円孔平板の引張り問題で解の妥当性を定量的に評価し、混合メッシュが 6 面体メッシュと同等の解析結果を得ることを検証した。
- (3) 6 面体自動メッシュ生成が困難であるはずば歯車の接触解析に適用し、形状近似精度が要求される接触部分に 6 面体メッシュを配置することにより、解の収束性向上に効果があり、解析作業時間が改善できることを確認した。

文 献

- (1) Sandia National Lab., *SANDIA REPORT*, SAND95-2130(1995), SAND96-2301(1996), Sandia Corp.

- (2) 滝澤千恵・青山ひろみ・西垣一朗・山下禎文・千葉矩正, 形状制御が可能な 6 面体メッシュ自動生成システム, 機論, 62-603, A(1996), 2428-2434.
- (3) 横張孝志・西垣一朗・江澤良孝・土屋俊一・岡本紀明, 三次元アダプティブメッシュ解析用自動要素分割プログラムの開発, 日本機械学会第 72 期通常総会講演会講演論文集(I), 95-1, (1995), 214-215.
- (4) 土屋俊一・江澤良孝・横張孝志・岡本紀明, 要素境界での平衡方程式の残差に基づく誤差評価と三次元アダプティブ有限要素解析, 機論, 62-599, A(1996), 1709-1714.
- (5) 西垣一朗・横張孝志・斎藤直人, 3 次元形状モデリングをベースとしたズーム解析システム, 日本機械学会第 10 回計算力学講演会講演論文集, 97-7, (1997), 423-424.
- (6) 鳥谷浩志・千代倉弘明, 「3 次元 CAD の基礎と応用」, (1991), 共立出版.
- (7) D.A.Field, A Generic Delaunay Triangulation Algorithm for Finite Element Meshes, Adv. Eng. Software, 13-5, (1991), 263-272.