オイラー座標による一軸応力状態における 固体の弾・塑・粘塑性応力波伝ば理論*

谷 本

昇^{*1}

One-Dimensional Theory of Elastic-Plastic-Viscoplastic Stress Waves of Solids in Uniaxial Stress State at Eulerian Coordinate

Noboru TANIMOTO

An elastic-plastic-viscoplastic constitutive equation has been proposed in which the understress is introduced to the plastic strain and the overstress is employed for the viscoplastic strain. The constitutive equation has a form in which the inelastic strain component consists of steady and unsteady component. Using the equation, an analysis on the one-dimensional wave propagation in the uniaxial stress state at the spacial coordinate is done by the characteristic method. As the results, equations describing the wave propagation speed and the relation of the every physical quantities in Eulerian coordinate. Also, it is shown that the theories are derived of an elastic-plastic, elastic-viscoplastic and longitudinal elastic wave propagation in Eulerian coordinate from that of the developed elastic-plastic-viscoplastic wave propagation.

Key Words: Stress Wave, Constitutive Equation, Plasticity, Elasticity, Inelasticity, Viscoplasticity, Understress, Overstress, Wave Propagation Speed

1. 緒 言

固体材料の動的挙動の研究は、数多くなされてきている^{(1)~(10)}。材料の巨視的現象の研究において、注目すべき現象は数多くあるが、基礎的なものとして、応力のひずみ速度依存性(あるいは、ひずみの応力速度依存性)と波動伝ば速度のひずみおよびひずみ速度依存性(あるいは、波動伝ば速度の応力および応力速度依存性)がある。弾・塑性伝ば理論では、応力波伝ば速度のひずみ依存性を表現できるが、応力のひずみ速度依存性を表現できない。弾・粘塑性伝ば理論では、応力のひずみ速度依存性を表現できるが、先行波を除いて、応力波伝ば速度を表現できない。弾・塑・粘塑性応力波伝ば理論では、応力のひずみ速度依存性と、応力波伝ば速度のひずみおよびひずみ速度依存性を表現できる⁽¹¹⁾。

オイラー座標における波動伝ばの解析は GI テイラ—⁽²⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾ によってなされている。そこでは、質量保存を考えると、変形中の微小長さではなく、単位長

さ当たりの質量を考えている。また、そこでは、具体的な構成式を用いていないが、弾・塑性体が想定されている。

本論文では、オイラー座標における一軸応力状態での弾・塑・粘塑性波動伝ばを特性曲線法によって解析する。さらに、弾・塑・粘塑性波動伝ば理論から、オイラー座標における一軸応力状態の弾・塑性、弾・粘塑性および縦弾性波動伝ば理論を導くことができることを示す。なお、本解析では、微小変形を対象とし、熱エネルギーを考慮しない。

2. 基 礎 式

オイラー座標における固体の動的挙動を支配する方程式系は

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\rho \dot{v}_i = \tau_{ij,j} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} \{1/(2\mu) + \Psi(H)\} \dot{s}_{ij} + \Phi(F) s_{ij} \\ \quad + \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk}/(9K) & \text{for } F > 0 \\ \dots\dots\dots (4\cdot a) \\ \dot{s}_{ij}/(2\mu) + \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk}/(9K) & \text{for } F \leq 0 \\ \dots\dots\dots (4\cdot b) \end{cases}$$

である。式(1)~(3)はそれぞれ、連続の式、ひずみ

* 1997 年 3 月 6 日 機械学会中国四国支部第 35 期総会・講演会において講演, 原稿受付 1997 年 5 月 16 日。

^{*1} 正員, 宇部工業高等専門学校機械工学科(☎ 755-8555 宇部市常盤台)。

速度・粒子速度こう配関係式, 運動方程式⁽¹⁴⁾であり, 式(4)は弾・塑・粘塑性構成式⁽¹⁵⁾である。右下添字 $(, k)$ は $(\partial/\partial x_k)$ を表す。 $\rho, v_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ および s_{ij} は密度, 粒子速度, 公称ひずみ, 公称応力および偏差応力である。 τ_{ij} は真応力である。ドット $(\dot{})$ は, 時間微分を表す。 δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり, μ と K は横弾性係数と体積弾性係数である。 $\Psi(H)$ と $\Phi(F)$ は低下応力関数(あるいは塑性関数)と超過応力関数(あるいは粘塑性関数)であり, H と F は低下応力と超過応力である。低下応力は正を採用する。塑性は非弾性の中の定常成分であり, 粘塑性は非弾性の中の非定常成分である。弾性ひずみはコーシーの法則(フックの法則)⁽¹⁶⁾に従う。塑性ひずみと粘塑性ひずみは非圧縮性を有すると仮定する。式(4)を, ひずみを弾性ひずみ, 塑性ひずみおよび粘塑性ひずみ成分に分解した形式で表すと,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{vp} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = \sigma_{ij}/(2\mu) - (\nu/E)\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad (6)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \begin{cases} \Psi(H)\dot{s}_{ij} & \text{for } F > 0 \\ 0 & \text{for } F \leq 0 \end{cases} \quad (7\text{a})$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \begin{cases} \Phi(F)s_{ij} & \text{for } F > 0 \\ 0 & \text{for } F \leq 0 \end{cases} \quad (8\text{a})$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \begin{cases} \Phi(F)s_{ij} & \text{for } F > 0 \\ 0 & \text{for } F \leq 0 \end{cases} \quad (8\text{b})$$

となる。右肩の e, p および vp はそれぞれ弾性, 塑性および粘塑性成分を表す。 E と ν は縦弾性係数とポアソン比である。

3. 一軸応力状態における棒の運動

棒の軸方向に対して, $i=1(j=1)$ をオイラー座標の x_1 軸にとる。各物理量は時間 t と位置 x_k の関数である。変形前に x_1 面である横断面は平面であり, 変形後も平面を保つと仮定する。式(1)と式(2)から

$$\dot{\rho} + \rho(\dot{\varepsilon}_{11} + 2\dot{\varepsilon}_{22}) = 0 \quad (9)$$

を得る。一方, 非弾性ひずみの非圧縮性とフックの式から

$$\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11}/2 \quad (10)$$

となる。したがって, 式(9)と式(10)から

$$\rho = \rho_0 \quad (11)$$

を得る。ここで, ρ_0 は初期密度である。また, 式(10)を用いると, 棒の横断面積の変形後 A と前 A_0 の比は

$$A/A_0 = 1 - \varepsilon_{11} \quad (12)$$

である。次に, 式(3)から

$$\rho \dot{v} = \tau_x \quad (13)$$

を得る。ここで, $v=v_1, \tau=\tau_{11}, x=x_1$ とおき, 右下添字 x はそれによる偏微分を表す。 $A\tau=A_0\sigma, \partial A/\partial x = \partial A_0/\partial x = 0$ であるので, 式(12)と(13)から,

$$\rho(1-\varepsilon)\dot{v} = \sigma_x \quad (14)$$

を得る。ここで, $\varepsilon=\varepsilon_{11}, \sigma=\sigma_{11}$ とおいた。さらに, $|\varepsilon| \ll 1$ であるので, 式(14)から

$$\rho \dot{v}/(1+\varepsilon) = \sigma_x \quad (15)$$

と書くこともできる。さらに, ε を微小として, 省略すると, 式(14)あるいは式(15)から

$$\rho \dot{v} = \sigma_x \quad (16)$$

を得る。次に, 式(2)から

$$\dot{\varepsilon} = v_x \quad (17)$$

を得る。式(11)が質量保存の式, 式(14), (15)あるいは(16)が運動方程式そして式(17)がひずみ速度・粒子速度こう配関係式である。次に, 構成式は, 式(5)~(8)から

$$\dot{\varepsilon}^e = \dot{\sigma}/E \quad (18\text{a})$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \phi(H)\dot{\sigma} \quad (18\text{b})$$

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \phi(F)\dot{\sigma} \quad (18\text{c})$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p + \dot{\varepsilon}^{vp} \quad (18\text{d})$$

となる。ここで, $\varepsilon^e = \varepsilon_{11}^e, \varepsilon^p = \varepsilon_{11}^p, \varepsilon^{vp} = \varepsilon_{11}^{vp}$ および $\varepsilon = \varepsilon_{11}$ とおいた。微小変形では, 運動方程式として, 式(14), (15)あるいは(16)の三者が使用可能であるが, ここでは式(16)を採用する。棒の x_1 面である横断面は変形前後で平面を保つと仮定しているから, 軸方向物理量の横方向(x_2 と x_3 方向)こう配は零であるので, 軸方向物理量に対する時間微分は,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \quad (19)$$

である。また, 式(16)~(18)は任意の位置 x と時間 t で成立する。さらに,

$$H = \sigma^E/\sigma - 1 \quad (20)$$

$$F = \sigma/\sigma_s - 1 \quad (21)$$

$$\phi(H) = H^{k_1}/\zeta \quad (22)$$

$$\phi(F) = F^{k_2}/\eta \quad (23)$$

$$\sigma^E = E\varepsilon \quad (24)$$

$$\varepsilon_s = \sigma_s/E + a(\sigma_s/\sigma_Y - 1)^b \quad (25)$$

である⁽¹¹⁾⁽¹⁵⁾。ここで, ζ と η は塑性係数と粘塑性係数であり, k_1 と k_2 は塑性定数と粘塑性定数である。 σ^E と σ_s は仮弾性引張応力と静的単純引張応力である。 σ_Y は静的引張初期降伏応力であり, a と b は材料定数である。また, $\sigma^E = (\sigma_{11})^E, \sigma_s = (\sigma_{11})_s, \varepsilon_s = (\varepsilon_{11})_s$ および $\sigma_Y = (\sigma_{11})_Y$ を用いた。 ζ, η, k_1 および k_2 は動的および静的単純引張(圧縮)試験から求めることができる⁽¹¹⁾。弾・塑・粘塑性構成式に超過応力を採用しているのので, 式(25)を用いるとき, 静的ひずみ ε_s を現在のひずみ ε に置換しなければならない。式(16)~(18)から, 式(19)を考慮すると, 次式を得る。

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^e}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial x} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^i}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x} = \psi \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + \phi \sigma \quad \dots\dots\dots (29)$$

さらに,

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^i \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\varepsilon^i = \varepsilon^p + \varepsilon^{vp} \quad \dots\dots\dots (31)$$

である。また、 $\varepsilon^i = \varepsilon_{11}$ と置いた。式(26)～(29)を整理すると、次式を得る。

$$L(W) \equiv A W_t + B W_x + D = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

右下添字 t はその変数による偏微分を表す。 A と B はマトリックスを、 W と D は列ベクトルを表す。

$$A = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/E & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \psi & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (33\cdot a)$$

$$B = \begin{bmatrix} \rho v & -1 & 0 & 0 \\ 0 & v/E & -v & 0 \\ -1 & 0 & v & v \\ 0 & v\psi & 0 & -v \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (33\cdot b)$$

$$W = \begin{bmatrix} v \\ \sigma \\ \varepsilon^e \\ \varepsilon^i \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (33\cdot c)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi \sigma \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (33\cdot d)$$

式(32)は W を未知数とする双曲形・準線形・1階偏微分方程式である。式(32)は特性曲線法で解くことができる⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾。式(32)の固有値 λ 、すなわち、特性速度 λ は

$$|\lambda A - B| = 0 \quad \dots\dots\dots (34)$$

Fig. 1 Schematic diagram of characteristic curves

から求めることができ、特性曲線は

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \quad \dots\dots\dots (35)$$

から求めることができるので、特性速度は $\lambda_{(1)} = U_1$, $\lambda_{(2)} = U_2$, $\lambda_{(3)} = v$ および $\lambda_{(4)} = v$ となり、特性曲線は

$$\frac{dx}{dt} = U_1, \frac{dx}{dt} = U_2, \frac{dx}{dt} = v, \frac{dx}{dt} = v \quad \dots\dots\dots (36)$$

となる。ここで、

$$U_1 = c + v \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \quad \dots\dots\dots (37\cdot a)$$

$$U_2 = -c + v \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \dots\dots\dots (37\cdot b)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{E} + \psi \right)}} \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \text{ and } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \dots\dots\dots (37\cdot c)$$

である。図1は t - x 平面上の任意の点 P を通る特性曲線の模式図を示す。 U_1 と U_2 はそれぞれ、一軸応力状態における、オイラー座標の x の正方向と負方向に伝ばする波動伝ば速度である。オイラー座標における特性速度には、波の伝ば速度のほかに粒子速度も含まれる。 c がラグランジェ座標の波動伝ば速度⁽¹¹⁾ に対応する。式(35)の固有値に対応して、左固有列ベクトル l は、

$$l^T \cdot (\lambda A - B) = 0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

から、

$$l_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\rho c \\ -\rho c \\ -\rho c \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (39\cdot a)$$

$$l_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho c \\ \rho c \\ \rho c \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (39\cdot b)$$

$$l_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (39\cdot c)$$

$$l_{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (39\cdot d)$$

となる。ここで、右肩添字 T は転置を表す。そして、式(32)と式(39)の線形結合

$$l^T \cdot L = 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

から次式を求めることができる。

$$\frac{d\sigma}{dt} - \rho c \frac{dv}{dt} + \rho c^2 \phi \sigma = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1$$

.....(41・a)

$$\frac{d\sigma}{dt} + \rho c \frac{dv}{dt} + \rho c^2 \phi \sigma = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2$$

.....(41・b)

$$\frac{d\epsilon^e}{dt} - \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = v \quad \text{.....(42・a)}$$

$$\frac{d\epsilon^i}{dt} - \phi \frac{d\sigma}{dt} - \phi \sigma = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = v \quad \text{.....(42・b)}$$

式(41)と式(42)は、オイラー座標における特性曲線に沿った微分方程式である。式(41・a)は前進波に対する応力速度・加速度の関係を、式(41・b)は後退波に対する応力速度・加速度の関係を、式(42・a)は粒子速度に対する弾性ひずみ速度・応力速度の関係を、式(42・b)は粒子速度に対する非弾性ひずみ速度・応力速度の関係を表す。

次に、前進波と後退波に対する加速度・ひずみ速度関係を導出する。まず、式(18・d)を時間で微分し、式(18・a)～(18・c)を用いると次式を得る。

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \left(\frac{1}{E} + \phi \right) \frac{d\sigma}{dt} + \phi \sigma \quad \text{for any } t \text{ and } x$$

.....(43)

一方、「任意の時間と位置」は「特性曲線」を含むので

$$\{\text{any } t \text{ and } x\} \ni \left\{ \frac{dx}{dt} = U_1 \right\} \quad \text{.....(44・a)}$$

$$\{\text{any } t \text{ and } x\} \ni \left\{ \frac{dx}{dt} = U_2 \right\} \quad \text{.....(44・b)}$$

が成立する。したがって、式(44)を考慮すると、特性曲線上で成立する式(37)と任意の時間と位置で成立する式(43)から次式を得る。

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{d\sigma}{dt} + \phi \sigma$$

for $\frac{dx}{dt} = U_1$ and $\frac{dx}{dt} = U_2$ (45)

式(45)は前進波と後退波の両方で成立する。式(41・a)と式(45)から、応力速度を消去すると次式を得る。

$$\frac{dv}{dt} - c \frac{d\epsilon}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \quad \text{.....(46・a)}$$

式(46・a)が、前進波に対する、加速度・ひずみ速度関係式である。後退波に対する、加速度・ひずみ速度関係式は、前進波の場合と同様にして、式(41・b)、(43)、(44)および式(45)を用いると、

$$\frac{dv}{dt} + c \frac{d\epsilon}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \text{.....(46・b)}$$

となる。

次に、オイラー座標における波動伝ば速度 U_1 と U_2 の式(37)の別形式を導出する。このとき、変形の対象

となるのは式(37・c)の c であるので、ここでは、式(37・a, 37・b)を省略する。式(18・d)を応力で微分し、式(18・a, 18・b)を用い、さらに、式(44)を考慮すると

$$\frac{1}{E} + \phi = \frac{d\epsilon}{d\sigma} - \frac{d\epsilon^{vp}}{d\sigma}$$

for $\frac{dx}{dt} = U_1$ and $\frac{dx}{dt} = U_2$ (47)

を得る。したがって、式(37・c)と式(47)から次式を得る。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{d\epsilon}{d\sigma} - \frac{d\epsilon^{vp}}{d\sigma} \right)}}$$

for $\frac{dx}{dt} = U_1$ and $\frac{dx}{dt} = U_2$ (48)

次に、式(18・c)と式(44)を用いると、式(48)から次式を得る。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{d\epsilon}{d\sigma} - \frac{\phi \sigma}{\sigma} \right)}}$$

for $\frac{dx}{dt} = U_1$ and $\frac{dx}{dt} = U_2$ (49)

また、式(48)を $\sqrt{d\sigma/d\epsilon}/\rho$ で整理すると、次式を得る。

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{d\epsilon^{vp}}{d\epsilon}}} \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\epsilon}}$$

for $\frac{dx}{dt} = U_1$ and $\frac{dx}{dt} = U_2$ (50)

さらに、式(18・c)と式(50)から、式(44)を考慮すると、次式を得る。

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\phi \sigma}{\epsilon}}} \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\epsilon}}$$

for $\frac{dx}{dt} = U_1$ and $\frac{dx}{dt} = U_2$ (51)

式(48)～(51)が、それぞれ、オイラー座標における波動伝ば速度 U_1 、式(37・a)と U_2 、式(37・b)の右辺第1項 c の別形式である。式(37・c)および式(48)～(51)は等価である。式(48)は、全ひずみの応力に関する変化率と粘塑性ひずみの応力に関する変化率の差を含む。式(49)は、全ひずみの応力に関する変化率および応力速度を含む。式(50)は、粘塑性ひずみの全ひずみに関する変化率と応力のひずみに関する変化率を含む。式(51)は、応力のひずみに関する変化率およびひずみ速度を含む。このように、オイラー座標における弾・塑・粘塑性体の波動伝ば速度 U_1 と U_2 は、固体材料の変形状態の変化に依存することがわかる。

式(37)、(41)～(42)、(46)および式(48)～(51)から、オイラー座標で、一軸応力状態における粒子速度、応力、ひずみおよび波動伝ば速度はひずみ速度依存性(あるいは、応力速度依存性)を有することがわかる。

なお、運動方程式として、式(16)の替わりに、式(15)を用いる場合、これまでに導出した各式の中に含まれる密度 ρ を $\rho/(1+\varepsilon)$ に置換すればよい。

4. 弾・塑・粘塑性波動伝ば理論から 弾・塑性、弾・粘塑性および弾性 波動伝ば理論の導出

オイラー座標における弾・塑性波動伝ば理論の必要な式は、粘塑性ひずみが零であるので、弾・塑・粘塑性波動伝ば理論の各式において $\varepsilon^{vp}=0$, $\phi=0$ および $\varepsilon^i=\varepsilon^p$ と置くことによって求めることができる。構成式は、式(18)から

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E} + \phi \right) \dot{\sigma} \quad \text{.....(52)}$$

となる。式(52)は塑性ひずみに低下応力を導入した弾・塑性構成式の一形式である。波動伝ば速度 U_1 と U_2 の式は、式(37)から

$$U_1 = c_{e-p} + v \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \quad \text{.....(53・a)}$$

$$U_2 = -c_{e-p} + v \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \text{.....(53・b)}$$

$$c_{e-p} = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{E} + \phi \right)}}$$

$$\text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \text{ and } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \text{.....(53・c)}$$

となる。右下添字 $e-p$ は弾・塑性を表す。また、式(53)の別形式は、式(37・a, 37・b)と式(51)から

$$U_1 = c_{e-p} + v \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \quad \text{.....(54・a)}$$

$$U_2 = -c_{e-p} + v \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \text{.....(54・b)}$$

$$c_{e-p} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \text{ and } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \text{.....(54・c)}$$

を得る。式(53)は式(37)と形式が同じである。しかし、前者は粘塑性ひずみを考慮していないので、後者と内容が異なる。このことは、式(54)と式(51)の比較から容易にわかる。特性曲線に沿った各物理量の関係は、式(41), (42)と式(46)から

$$\frac{d\sigma}{dt} - \rho c_{e-p} \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \quad \text{.....(55・a)}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} + \rho c_{e-p} \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \text{.....(55・b)}$$

$$\frac{d\varepsilon^e}{dt} - \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = v \quad \text{.....(55・c)}$$

$$\frac{d\varepsilon^p}{dt} - \phi \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = v \quad \text{.....(55・d)}$$

$$\frac{dv}{dt} - c_{e-p} \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \quad \text{.....(56・a)}$$

$$\frac{dv}{dt} + c_{e-p} \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \text{.....(56・b)}$$

となる。式(55・c)と式(42・a)は同じであるが、理解のしやすさのためそれを再記した。他の式も必要な場合同様にする。

オイラー座標における弾・粘塑性波動伝ば理論の必要な式は、塑性ひずみが零であるので、弾・塑・粘塑性波動伝ば理論の各式において、 $\varepsilon^p=0$, $\phi=0$ および $\varepsilon^i=\varepsilon^{vp}$ と置くことによって求めることができる。構成式は、式(18)から

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \phi \dot{\sigma} \quad \text{.....(57)}$$

となる。式(57)は粘塑性ひずみ速度に超過応力を採用した弾・粘塑性構成式の一形式である。波動伝ば速度 U_1 と U_2 の式は、式(37)から

$$U_1 = c_{e-vp} + v \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \quad \text{.....(58・a)}$$

$$U_2 = -c_{e-vp} + v \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \text{.....(58・b)}$$

$$c_{e-vp} = c_0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \text{ and } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \text{.....(58・c)}$$

となる。右下添字 $e-vp$ は弾・粘塑性を表す。ここで $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ である。弾・粘塑性理論の波動伝ば速度式(58)は縦弾性波動伝ば速度の式〔式(62)〕と同じになる。特性曲線に沿った各物理量の関係は、式(41), (42)と式(46)から

$$\frac{d\sigma}{dt} - \rho c_e \frac{dv}{dt} + \rho c_e^2 \phi \sigma = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \quad \text{.....(59・a)}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} + \rho c_e \frac{dv}{dt} + \rho c_e^2 \phi \sigma = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \text{.....(59・b)}$$

$$\frac{d\varepsilon^e}{dt} - \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = v \quad \text{.....(59・c)}$$

$$\frac{d\varepsilon^{vp}}{dt} - \phi \sigma = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = v \quad \text{.....(59・d)}$$

$$\frac{dv}{dt} - c_e \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \quad \text{.....(60・a)}$$

$$\frac{dv}{dt} + c_e \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2 \quad \text{.....(60・b)}$$

となる。ここで、 $c_e = c_{e-vp}$ である。

オイラー座標における縦弾性波動伝ば理論の必要な式は、塑性ひずみと粘塑性ひずみが零であるので、弾・塑・粘塑性波動伝ば理論の各式において $\varepsilon^p=0$, $\varepsilon^{vp}=0$, $\varepsilon^i=0$, $\varepsilon=\varepsilon^e$, $\phi=0$ および $\phi=0$ と置くことによって求めることができる。構成式は、式(18)から

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \quad \text{.....(61)}$$

となる。波動伝ば速度 U_1 および U_2 の式は、式(37)から

$$U_1 = c_e + v \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \cdots \cdots (62 \cdot a)$$

$$U_2 = -c_e + v \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2 \cdots \cdots (62 \cdot b)$$

$$c_e = c_0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \text{ and } \frac{dx}{dt} = U_2 \cdots (62 \cdot c)$$

となる。右下添字 e は弾性を表す。特性曲線に沿った各物理量の関係は、式(41)、(42)と式(46)から

$$\frac{d\sigma}{dt} - \rho c_e \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \cdots \cdots (63 \cdot a)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} + \rho c_e \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2 \cdots \cdots (63 \cdot b)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = v \cdots \cdots (63 \cdot c)$$

$$\frac{dv}{dt} - c_e \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_1 \cdots \cdots (64 \cdot a)$$

$$\frac{dv}{dt} + c_e \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad \text{for } \frac{dx}{dt} = U_2 \cdots \cdots (64 \cdot b)$$

となる。このように、オイラー座標における弾・塑・粘塑性波動伝ば理論から、オイラー座標における典型的な各理論の関係式を導出することができる。

5. 結 言

弾・塑・粘塑性構成式を用いて、空間固定座標から見た一軸応力状態における一次元棒の波動伝ばを特性曲線法で解析した。その結果、オイラー座標における波動伝ば速度の式および各物理量間の関係式を導出した。また、オイラー座標における粒子速度、応力、ひずみおよび波動伝ば速度はひずみ速度依存性(あるいは、応力速度依存性)を有することを示した。さらに、局開した弾・塑・粘塑性波動伝ば理論が、オイラー座

標における一軸応力状態の弾・塑性、弾・粘塑性および縦弾性波動伝ば理論を含むことを示した。

文 献

- (1) Goldsmith, W., *Impact*, (1960), 145-341, Edward Arnold.
- (2) Kolsky, H., *Stress Waves in Solids*, (1963), 163-182, Dover, New York.
- (3) N・クリステスク(黒崎永治訳), 衝撃塑性, (1970), 1-573, コロナ社.
- (4) Jhonson, W., *Impact Strength of Materials*, (1972), 121-349, Edward Arnold, London.
- (5) Zukas, J. A., Nicholas, T., Swift, H. F., Greszczuk, L. B. and Curran, D. R., *Impact Dynamics*, (1982), 1-447, Krieger.
- (6) 林卓夫・田中吉之助編著, 衝撃工学, (1988), 1-373, 日刊工業新聞社.
- (7) 日本機械学会編, 衝撃破壊工学, (1990), 172-183, 技報堂.
- (8) Zukas, J. A.編, *High Velocity Impact Dynamics*, (1990), 1-926, John Wiley and Sons.
- (9) 岸田敬三, 固体の動力学, (1993), 79-104, 培風館.
- (10) 高山和喜編, 衝撃波ハンドブック, (1995), 297-323, シュプリンガー・フェアラーク, 東京.
- (11) 谷本昇, 一軸応力状態における固体の一次元応力波伝ば理論, 機論, **62**-594, A(1996), 437-444.
- (12) Taylor, G. I., Propagation of Earth Waves From an Explosion, *British Official Report RC 70*, (1940).
- (13) Taylor, G. I., The Plastic Wave in a Wire Extended by an Impact Load, *British Official Report RC 329*, (1942).
- (14) YC・ファン(大橋義夫・村上澄男・神谷紀生訳), 固体の力学/理論, (1979), 121-122, 培風館.
- (15) 谷本昇, 一般化弾・塑・粘塑性構成式, 機講論, No. 965-1 (1996-3), 3-4.
- (16) DC・リー(村上澄男訳), 非線形連続体力学, (1975), 6-9, 共立出版.
- (17) Courant, R. and Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics, Vol. II, Partial Differential Equations*, (1962), 424-427, Interscience.
- (18) Jeffrey, A. and Taniuti, T., *Non-Linear Wave Propagation*, (1964), 65-71, Academic.