定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体のグリーン関数*

小林 雅 隆^{*1}, 古口 日出男^{*2}, 近 藤 俊 美^{*1}Green's Functions for a Steady State Heat Source
in a Semi-Infinite Transversely Isotropic Elastic Solid

Masataka KOBAYASHI, Hideo KOGUCHI and Toshimi KONDO

In this paper, we present the Green's functions of closed form for a steady state heat source in a semi-infinite transversely isotropic thermoelastic solid when the functions are expressed as the Cartesian coordinates. For thermal boundary conditions, both cases of the adiabatic condition and/or the zero temperature prescribed on the boundary plane are treated, and for the stress and the displacement boundary conditions the following three cases are treated; (1) the stress free condition on the boundary plane, (2) the fixed displacement condition on the boundary plane and (3) only the displacement u_z in the direction z vanishes on the boundary plane. To obtain the solutions of the problem the mirror reflection method is developed by using the solution of the infinite transversely isotropic thermoelastic solid reported in the previous paper. Furthermore, the closed form solutions in a semi-infinite isotropic thermoelastic solid are also shown. Finally, the numerical results for titanium in both cases of isotropy and transverse isotropy are given.

Key Words: Anisotropy, Elasticity, Thermal Stress, Green's Function, Thermoelasticity, Transverse Isotropy, Three-Dimensional Problem, Cartesian Coordinates, Composite Material

1. 緒 言

著者等は先に、直角座標系で表した定常点熱源に対する無限横等方性弾性体のグリーン関数を求めて報告した⁽¹⁾。本報は、同様な定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体の単根の場合のグリーン関数を求めたものである。また、直角座標系で表した半無限等方性弾性体のグリーン関数も併せて示す。

等方性弾性体の定常点熱源に対する軸対称グリーン関数の閉形解は、すでにMindlin⁽²⁾, Liu Hsien-Chin⁽³⁾やNowacki⁽⁴⁾等に見られる。また、半無限等方性体の表面加熱等の問題はレーザー加熱に関連して軸対称解として報告されている⁽⁵⁾⁻⁽¹¹⁾。山田は等方性弾性体の点熱源による接合膜を持つ半無限体の熱応力とその特異性について報告している⁽¹²⁾。一方、定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体のグリーン関数は、Sharmaによる積分解⁽¹³⁾, Mossakowska & Nowackiによる軸対称解⁽¹⁴⁾及びChoudhuryによる軸対称積分解及び一部は超幾何関数解⁽¹⁵⁾が見られるのみである。

本報では、前論文⁽¹⁾の無限体の解を用い、鏡像の概念を發展させて、定常点熱源に対する直角座標系によ

る半無限横等方性弾性体のグリーン関数の閉形解を求めた。熱的境界条件は境界上で温度が零になる場合、及び境界上で断熱条件の場合である。また、変位と応力の境界条件は、(1)境界で応力自由の場合、(2)境界で変位固定の場合、(3)境界で z 方向変位のみ固定の場合、の三種類の場合について報告する。さらに半無限横等方性弾性体の解も求め、チタンを例に横等方性とした場合と等方性とした場合の数値計算例を示す。

2. 半無限横等方性弾性体のグリーン関数

2.1 半無限横等方性弾性体の変位関数の考察 直角座標系を用いた、定常点熱源に対する無限横等方性弾性体の変位関数は次式で与えられる⁽¹⁾。

$$\psi_{1p} = C_u \sum_{j=1,2,4} D_{ij} \int_0^\infty \alpha^{-4} J_0(\alpha r) e^{-\alpha v_j(z-z_0)} d\alpha \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{ここで, } D_{ij} = \frac{\pm 1}{v_j(v_j^2 - v_i^2)(v_j^2 - v_\ell^2)}, \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $i, j, \ell = 1, 2, 4, (i \neq j \neq \ell)$ であり、 $z - z_0 > 0$ のときは+、 $z - z_0 < 0$ のときは-かつ $v_j \rightarrow -v_j$ と置く。

$$\text{また, } C_u = \frac{\beta_1 b_4}{4\pi\lambda_3 C_{33}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 λ_i は熱伝導率、 $\beta_i = C_{ij}\alpha_j$ (j は1, 2, 3の和)、 C_{ij} は弾性定数、 α_i は線膨張係数、 b_4 は単位体積・単位時間当たりの熱発生量、 z_0 は点熱源の位置、そして J_0 は零次のベッセル関数である。また、座標系は添え字1, 2が x, y 座標で等方面、添え字3を対称軸の z 方向とし、閉

* 原稿受付 1997年12月18日。

^{*1} 正員、長岡工業高等専門学校(☎940-8532 長岡市西片貝町888)。^{*2} 正員、長岡技術科学大学工学部(☎940-2188 長岡市上富岡町1603-1)。

形表現は点熱源の位置 z_0 で除した無次元座標である。

さて、半無限横等方性弾性体の境界条件を満足させるためには、特解 ψ_{1p} の他に補足解 ψ_{1c} が必要である。この ψ_{1c} は上半空間に特異点が無く、下半空間には特異点が在っても良いことを考慮し、

$$\psi_{1c} = C_u \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij} \int_0^\infty \alpha^{-4} J_0(\alpha r) e^{-\alpha v_i \left(z + \frac{v_j}{v_i} z_0 \right)} d\alpha \quad \dots\dots\dots (4)$$

と置く。この解は、デルタ関数の解であり、点

$$z = -\frac{v_j}{v_i} z_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

に点熱源があるが、それ以外では零の解である。従って、斉次方程式の解あるいは補足解である。また、この解 ψ_{1c} は次式をも満足する。

$$\left(v_i^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_{1c} = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(4)から求まる変位有限条件より、次式が必要である。

$$\text{実部} \quad \text{Re}(v_i z + v_j z_0) > 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

上式において、 v_i は無次元の異方性弾性定数に関係する特性根であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} z_1 &= v_1 z, \quad z_2 = v_2 z, \quad z_3 = v_3 z, \quad z_4 = v_4 z, \\ v_3 &= \sqrt{\frac{C_{66}}{C_{44}}} = \sqrt{\frac{1}{2(1+v_{12})\gamma}}, \quad v_4 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}, \\ v_1 &\left\{ = \sqrt{\frac{(C_C - C_{13})(C_C + C_{13} + 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}} \right. \\ v_2 &\left. \pm \sqrt{\frac{(C_C + C_{13})(C_C - C_{13} - 2C_{44})}{4C_{33}C_{44}}} \right\} \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで、 $C_C = \sqrt{C_{11}C_{33}}$ 、 v_{ij} は横ひずみ $\epsilon_i = -v_{ij}\epsilon_j$ となるポアソン比、 γ は x 方向縦弾性係数 E_1 とし、 $C_{44} = \gamma E_1$ となる無次元定数である。

2.2 $z=0$ で $T=0$ または断熱 $\partial T/\partial z=0$ となる一般解
点熱源の位置 z_0 で無次元化した座標系を用いて、定常点熱源に対する半無限横等方性弾性体の変位関数の一般解を $z-1>0$ で次の特解と補足解の和に仮定する。

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{1p} + \psi_{1c} \\ &= C_u \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^4} \left\{ \sum_{j=1,2,4} D_{ij} e^{-\alpha v_j(z-1)} + \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* e^{-\alpha(v_i z + v_j)} \right\} d\alpha \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

この変位関数より求まる境界 $z=0$ 付近の温度 T は、 $z-1<0$ を考慮して次式で与えられる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{C_{33}}{\beta_1} \left(v_1^2 \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(v_2^2 \nabla_r^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_1 \\ &= C_T v_4 \int_0^\infty J_0(\alpha r) \left\{ \sum_{j=1,2,4} D_{ij} (v_1^2 - v_j^2) (v_2^2 - v_j^2) e^{\alpha v_j(z-1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* (v_1^2 - v_i^2) (v_2^2 - v_i^2) e^{-\alpha(v_i z + v_j)} \right\} d\alpha, \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad C_T = \frac{b_4}{4\pi\lambda_3 v_4 z_0} \quad \dots\dots\dots (10)$$

第一項は $j=4$ のみ残り、第二項は $i=4, j=1, 2, 4$ が残る。従って、 $z=0$ で $T(r, 0)=0$ となる条件式は次式になる。

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= C_T v_4 (v_1^2 - v_4^2) (v_2^2 - v_4^2) \int_0^\infty J_0(\alpha r) \left\{ (D_{44} + D_{44}^*) \right. \\ &\quad \left. \times e^{-\alpha v_4} + D_{41}^* e^{-\alpha v_1} + D_{42}^* e^{-\alpha v_2} \right\} d\alpha \equiv 0. \quad (11) \end{aligned}$$

これより、係数は次式に求まる。

$$\left. \begin{aligned} D_{41}^* &= 0, \quad D_{42}^* = 0, \\ D_{44}^* &= -D_{44} = \frac{-1}{v_4 (v_4^2 - v_1^2) (v_4^2 - v_2^2)}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

従って、温度は次式に求まる。

$$T = C_T \int_0^\infty J_0(\alpha r) \left\{ e^{\alpha v_4(z-1)} - e^{-\alpha v_4(z+1)} \right\} d\alpha \quad \dots\dots\dots (13)$$

あるいはLipschitzの積分により、閉形で表し

$$\therefore T = C_T \left\{ \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_{44}} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

断熱条件の場合も熱流束が消えることから z での微分を用い $D_{44}^* = D_{44}$ と求まり、閉形表現は次式になる。

$$\therefore T = C_T \left\{ \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{44}} \right\}, \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、

$$R_4 = \sqrt{r^2 + v_4^2(z-1)^2}, \quad R_{44} = \sqrt{r^2 + v_4^2(z+1)^2}, \quad (16)$$

と求められる。式(14)が境界上で温度が零となる解であり、式(12)は断熱条件の解である。

この段階で D_{ij} は式(2)のように決まっているが、 D_{ij}^* はまだ全てが決まったわけではない。残りの定数は変位と応力の境界条件により決定される。特解は先に報告した文献(1)の無限体の解と同一であり、補足解も形は同一であるので特解に加えるべき補足解のみを上付き添え字 c を付けて、閉形表現で記す。

$$\left. \begin{aligned} u_x^c &= C_u \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* (1 - \alpha v_i^2) \frac{x}{R_{ij}^+}, \\ u_z^c &= C_u \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* v_i (b - k v_i^2) \ln \frac{1}{R_{ij}^+}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

u_y^c は u_x^c で x を y で置き換えたものである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^c &= -C_\sigma \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* \left\{ v_i^2 (d - e v_i^2) + q \frac{y^2}{r^2} (1 - \alpha v_i^2) \right\} \frac{1}{R_{ij}^+} \\ &\quad + q (1 - \alpha v_i^2) \left(1 - \frac{2y^2}{r^2} \right) \frac{1}{R_{ij}^+}, \\ \sigma_{zz}^c &= C_\sigma \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* (d - e v_i^2) \frac{1}{R_{ij}^+}, \\ \sigma_{yz}^c &= C_\sigma \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* v_i (d - e v_i^2) \frac{y}{R_{ij}^+}, \\ \sigma_{xy}^c &= -C_\sigma \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* q (1 - \alpha v_i^2) \frac{xy}{R_{ij}^+ R_{ij}^{+2}}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\text{ここで, } C_\sigma = \frac{\beta_1 b_4}{4\pi\lambda_3 z_0} \quad \dots\dots\dots (19)$$

σ_{yy}^c 及び σ_{xx}^c は σ_{xx}^c 及び σ_{yz}^c で y を x に置換したもの。式(3), (10), (19)以外の定数は全て無次元定数であり、詳細

は付録A.1に記す。また、次の表現を用いた。

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \\ R_j &= \sqrt{r^2 + v_j^2(z-1)^2}, \quad Z_j = v_j(z-1), \\ R_{ij} &= \sqrt{r^2 + (v_i z + v_j)^2}, \quad Z_{ij} = (v_i z + v_j), \\ R_j^+ &= R_j + |Z_j|, \quad R_{ij}^+ = R_{ij} + |Z_{ij}|, \\ R_j^- &= R_j - |Z_j|, \quad R_{ij}^- = R_{ij} - |Z_{ij}|. \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

2.3 境界 $z=0$ で応力自由の解 この場合の境界条件式は次式になる。

$$z=0 \text{ で, } \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

境界付近の応力は次式になる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz} &= C_\sigma \int_0^\infty J_0(\alpha r) \left\{ \sum_{j=1,2,4} D_{jj} (d - e v_j^2) e^{v_j \alpha (z-1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* (d - e v_i^2) e^{-\alpha (v_i z + v_j)} \right\} d\alpha, \\ \sigma_{yz} &= C_\sigma \int_0^\infty J_1(\alpha r) \left\{ \sum_{j=1,2,4} D_{jj} (-v_j) (d - e v_j^2) e^{v_j \alpha (z-1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* v_i (d - e v_i^2) e^{-\alpha (v_i z + v_j)} \right\} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

σ_{zx} は σ_{zx} で y を x と置くのみで他は同一である。ここで、 $z=0$ において r に無関係に零となるためには次式が成立しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1,2,4} D_{jj} (d - e v_j^2) e^{-\alpha v_j} \\ + \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* (d - e v_i^2) e^{-\alpha v_j} &= 0, \\ \sum_{j=1,2,4} D_{jj} (-v_j) (d - e v_j^2) e^{-\alpha v_j} \\ + \sum_{i,j=1,2,4} D_{ij}^* v_i (d - e v_i^2) e^{-\alpha v_j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

これは次の六本の式になる。

$$\left. \begin{aligned} D_{jj} (d - e v_j^2) + \sum_{i=1,2,4} D_{ij}^* (d - e v_i^2) &= 0, \\ -D_{jj} v_j (d - e v_j^2) + \sum_{i=1,2,4} D_{ij}^* v_i (d - e v_i^2) &= 0, \end{aligned} \right\} j=1,2,4 \quad (24)$$

従って、式(12)以外の未知係数は $T=0$ の場合次式になる。

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^* &= \frac{(v_1 + v_2)}{(v_1 - v_2)} D_{11}, \quad D_{21}^* = \frac{2v_1(d - e v_1^2)}{(v_2 - v_1)(d - e v_2^2)} D_{11}, \\ D_{12}^* &= \frac{2v_2(d - e v_2^2)}{(v_1 - v_2)(d - e v_1^2)} D_{22}, \quad D_{22}^* = \frac{(v_1 + v_2)}{(v_2 - v_1)} D_{22}, \\ D_{14}^* &= \frac{2v_4(d - e v_4^2)}{(v_1 - v_2)(d - e v_1^2)} D_{44}, \\ D_{24}^* &= \frac{2v_4(d - e v_4^2)}{(v_2 - v_1)(d - e v_2^2)} D_{44}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

また、断熱条件の場合は $D_{44}^* = D_{44}$ 以外次式になる。

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^* &= \frac{(v_1 + v_2)}{(v_1 - v_2)} D_{11}, \quad D_{21}^* = \frac{2v_1(d - e v_1^2)}{(v_2 - v_1)(d - e v_2^2)} D_{11}, \\ D_{12}^* &= \frac{2v_2(d - e v_2^2)}{(v_1 - v_2)(d - e v_1^2)} D_{22}, \quad D_{22}^* = \frac{(v_1 + v_2)}{(v_2 - v_1)} D_{22}, \\ D_{14}^* &= \frac{2v_4(d - e v_4^2)}{(v_1 - v_2)(d - e v_1^2)} D_{44}, \end{aligned} \right\}$$

$$D_{24}^* = \frac{2v_1(d - e v_4^2)}{(v_2 - v_1)(d - e v_2^2)} D_{44}. \quad \dots\dots (26)$$

2.4 境界 $z=0$ で変位固定の解 この場合の境界条件式は次式である。

$$z=0 \text{ で, } u_x = u_y = u_z = 0. \quad \dots\dots\dots (27)$$

同様な方法により求まる $T=0$ の場合の式(12)以外の未知係数は次式になる。

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^* &= \frac{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) + v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)}{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) - v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)} D_{11}, \\ D_{21}^* &= \frac{-2v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_1^2)}{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) - v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)} D_{11}, \\ D_{12}^* &= \frac{2v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_2^2)}{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) - v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)} D_{22}, \\ D_{22}^* &= \frac{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) + v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)}{v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2) - v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2)} D_{22}, \\ D_{14}^* &= \frac{2v_4(b - k v_4^2)(1 - a v_2^2)}{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) - v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)} D_{44}, \\ D_{24}^* &= \frac{-2v_4(b - k v_4^2)(1 - a v_1^2)}{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) - v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)} D_{44}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

また、断熱条件の場合は $D_{44}^* = D_{44}$ 以外次式になる。

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^* &= \frac{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) + v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)}{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) - v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)} D_{11}, \\ D_{21}^* &= \frac{-2v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_1^2)}{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) - v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)} D_{11}, \\ D_{12}^* &= \frac{2v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_2^2)}{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) - v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)} D_{22}, \\ D_{22}^* &= \frac{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) + v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)}{v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2) - v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2)} D_{22}, \\ D_{14}^* &= \frac{2v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_4^2)}{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) - v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)} D_{44}, \\ D_{24}^* &= \frac{-2v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_4^2)}{v_1(b - k v_1^2)(1 - a v_2^2) - v_2(b - k v_2^2)(1 - a v_1^2)} D_{44}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

2.5 境界 $z=0$ で z 方向変位のみ固定の解 この場合の境界条件式は次式である。

$$z=0 \text{ で, } u_z = 0, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \quad \dots\dots\dots (30)$$

同様な方法により求まる $T=0$ の場合の式(9)以外の未知係数は次式になる。

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^* &= D_{11}, \quad D_{21}^* = 0, \\ D_{12}^* &= 0, \quad D_{22}^* = D_{22}, \\ D_{14}^* &= \frac{2v_4 \{ (d - e v_4^2)(b - k v_2^2) - (d - e v_2^2)(b - k v_4^2) \}}{v_1 \{ (d - e v_1^2)(b - k v_2^2) - (d - e v_2^2)(b - k v_1^2) \}} D_{44}, \\ D_{24}^* &= \frac{2v_4 \{ (d - e v_4^2)(b - k v_1^2) - (d - e v_1^2)(b - k v_4^2) \}}{v_2 \{ (d - e v_2^2)(b - k v_1^2) - (d - e v_1^2)(b - k v_2^2) \}} D_{44}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

また、断熱条件の場合は $D_{44}^* = D_{44}$ 以外次式になる。

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^* &= D_{11}, & D_{21}^* &= 0, & D_{41}^* &= 0, \\ D_{12}^* &= 0, & D_{22}^* &= D_{22}, & D_{42}^* &= 0, \\ D_{14}^* &= 0, & D_{24}^* &= 0, & D_{44}^* &= D_{44} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

以上により、全ての係数が決定されたことになる。これらを式(14)と式(15)に代入し、特解である無限体の解に加えれば、全ての変位と応力が計算できる。

3. 半無限等方性弾性体のグリーン関数

等方性弾性体の場合には、前章の係数が不定になるために使用できない。この場合、文献(1)で述べた三重根の解 ψ_{1p} の鏡像解と文献(1)で記した、 ϕ_1 を用いる必要がある。 ϕ_1 は χ_3 に対応する変位関数で、温度場に影響を与えない(付録A.2参照)。

$$\phi_1 = C_u \int_0^\infty \frac{J_0(\alpha r)}{\alpha^2} \{B_1 + B_2 \alpha(z+1)\} e^{-\nu_4 \alpha(z+1)} d\alpha \dots\dots (33)$$

最初に、定常点熱源に対する等方性無限体の解とその鏡像点による解は上付き添え字 p を付けて次式に書ける。

$$\begin{aligned} \frac{u_z^p}{C_u} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R_4} \mp \frac{x}{R_{44}} \right), & \frac{T^p}{C_T} &= \left(\frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} \right), \\ \frac{u_z^p}{C_u} &= \frac{1}{2} \left(\frac{Z_4}{R_4} \mp \frac{Z_{44}}{R_{44}} \right), & \frac{\sigma_{yz}^p}{C_\sigma} &= -q \left\{ \frac{y}{2} \left(\frac{Z_4}{R_4^3} \mp \frac{Z_{44}}{R_{44}^3} \right) \right\}, \\ \frac{\sigma_{xx}^p}{C_\sigma} &= -q \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} + \frac{x^2}{R_4^3} \mp \frac{x^2}{R_{44}^3} \right), \\ \frac{\sigma_{zz}^p}{C_\sigma} &= -q \left\{ \left(\frac{1}{R_4} \mp \frac{1}{R_{44}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R_4^3} \mp \frac{r^2}{R_{44}^3} \right) \right\}, \\ \frac{\sigma_{xy}^p}{C_\sigma} &= -q \left\{ \frac{xy}{2} \left(\frac{1}{R_4^3} \mp \frac{1}{R_{44}^3} \right) \right\}, & q &= \frac{1-2\nu}{1-\nu} \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

負は $T=0$ 、正は断熱条件の場合である。上の閉形前の解と式(33)とから境界条件を満足する定数 B_1, B_2 を求めた後、閉形表現を行って解を求める。その結果の式(34)への付加項は、上付き添え字 c を付け以下ようになる。

(1) 境界 $z=0$ で $T=0$ 、応力自由の解

$$\begin{aligned} \frac{u_x^c}{C_u} &= 2(1-\nu) \frac{x}{R_{44} R_{44}^+} - \frac{xz}{R_{44}^3}, & \frac{u_z^c}{C_u} &= -2(1-\nu) \frac{1}{R_{44}} + \frac{r^2 + Z_{44}}{R_{44}^3}, \\ \frac{\sigma_{xx}^c}{C_\sigma} &= q \left\{ 2(1-\nu) \left(\frac{y^2 - x^2}{r^2} \frac{1}{R_{44} R_{44}^+} - \frac{y^2 Z_{44}}{r^2 R_{44}^3} \right) + \frac{Z_{44} + 1}{R_{44}^3} - \frac{3x^2 z}{R_{44}^5} \right\}, \\ \frac{\sigma_{zz}^c}{C_\sigma} &= qz \left(\frac{2}{R_{44}^3} - \frac{3r^2}{R_{44}^5} \right), & \frac{\sigma_{yz}^c}{C_\sigma} &= qy \left\{ \frac{2}{R_{44}^3} - \frac{3(r^2 + Z_{44})}{R_{44}^5} \right\}, \\ \frac{\sigma_{xy}^c}{C_\sigma} &= q \frac{xy}{r^2} \left\{ 2(1-\nu) \left(\frac{Z_{44}}{R_{44}^3} - \frac{2}{R_{44} R_{44}^+} \right) + \frac{3r^2 z}{R_{44}^5} \right\}, & \frac{T^c}{C_T} &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

(2) 境界 $z=0$ で $T=0$ 、変位固定の解

$$\begin{aligned} \frac{u_x^c}{C_u} &= -\frac{x}{3-4\nu} \frac{z}{R_{44}^3}, & \frac{u_z^c}{C_u} &= -\frac{4(1-\nu)}{3-4\nu} \frac{1}{R_{44}} + \frac{1}{3-4\nu} \frac{(r^2 + Z_{44})}{R_{44}^3}, \\ \frac{\sigma_{xx}^c}{C_\sigma} &= \frac{-q}{3-4\nu} \left\{ 2\nu \frac{Z_{44}}{R_{44}^3} + \frac{z}{R_{44}^3} \left(-1 + \frac{3x^2}{R_{44}^2} \right) \right\}, & \frac{T^c}{C_T} &= 0, \\ \frac{\sigma_{zz}^c}{C_\sigma} &= \frac{qz}{3-4\nu} \left(\frac{2}{R_{44}^3} - \frac{3r^2}{R_{44}^5} \right) + \frac{2q(1-\nu)}{3-4\nu} \frac{Z_{44}}{R_{44}^3}, & \frac{\sigma_{xy}^c}{C_\sigma} &= \frac{qxy}{3-4\nu} \frac{3z}{R_{44}^3}, \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_{yz}^c}{C_\sigma} = \frac{qy}{3-4\nu} \left\{ \frac{4}{R_{44}^3} - \frac{3(r^2 + Z_{44})}{R_{44}^5} \right\} - \frac{2\nu qy}{3-4\nu} \frac{1}{R_{44}^3} \dots\dots (36)$$

(3) 境界 $z=0$ で $T=0$ 、 z 方向変位のみ固定の解

$$\begin{aligned} \frac{u_x^c}{C_u} &= -\frac{x}{R_{44} R_{44}^+}, & \frac{u_z^c}{C_u} &= \frac{1}{R_{44}}, & \frac{T^c}{C_T} &= 0, \\ \frac{\sigma_{xx}^c}{C_\sigma} &= q \left\{ \frac{x^2 Z_{44}}{r^2 R_{44}^3} - \frac{x^2 - y^2}{r^2} \frac{1}{R_{44} R_{44}^+} \right\}, & \frac{\sigma_{zz}^c}{C_\sigma} &= -q \frac{Z_{44}}{R_{44}^3}, \\ \frac{\sigma_{yz}^c}{C_\sigma} &= -\frac{qy}{R_{44}^3}, & \frac{\sigma_{xy}^c}{C_\sigma} &= q \frac{xy}{r^2} \left(\frac{Z_{44}}{R_{44}^3} - \frac{2}{R_{44} R_{44}^+} \right) \dots\dots (37) \end{aligned}$$

上の式中 $\nu_4=1$ であり、また断熱の解は付録A.3に記す。

4. 数値計算例

本報では境界上で温度 $T=0$ かつ応力自由となる(1)の場合について数値計算を行い、チタンを例に半無限体の応力分布の様子を調べる。ここでは熱的に等方と仮定する。また、チタンは本来横等方性弾性体であるが、等方とした場合と横等方とした場合を数値計算し、その違いを数値的に比較する。その材料定数を表1から表3に示す⁽¹⁶⁾。全ての値は、等方性弾性体の係数

$$C_{u0} = \frac{\alpha b_4(1+\nu)}{4\pi\lambda_3(1-\nu)}, C_{T0} = \frac{b_4}{4\pi\lambda_3 z_0}, C_{\sigma 0} = \frac{\alpha E b_4}{4\pi\lambda_3(1-\nu)z_0} \quad (38)$$

で割って無次元化した値を示す。

チタンが等方性を示す場合及び横等方性を示す場合の数値計算結果は、比較のために同じ図の上に示す。図1と図2は無次元 z 座標を変化させた場合の無次元変位と応力であり、図3と図4は無次元 x 座標を変化させた場合の無次元変位と応力を表わし、 $z=0.9$ の断面と境界 $z=0$ 上の値を示す。応力は全て無限遠で消える条

Table 1. Elastic constants of transversely isotropic titanium

Voigt elastic constants [GPa]					
C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	C_{66}
162	92	69	181	46.7	35.2

Table 2. The other material properties of titanium

Thermal conductivity λ [W/(m·K)]	3.7
Coefficient of linear thermal expansion α [1/K]	8.7×10^{-6}
Specific heat c [J/(kg·K)]	125
Mass density ρ [kg/m ³]	4.51×10^3

Table 3. Elastic constants of isotropic titanium

Young's modulus E [GPa]	117.6
Shear modulus G [GPa]	44.1

Fig.1 Nondimensional generalized displacements at the section $y=0$, $x=0.1$, due to a unit heat source at $(0,0,1)$ in titanium.

Fig.2 Nondimensional stresses at the section $y=0$, $x=0.1$, due to a unit heat source at $(0,0,1)$ in titanium.

Fig.3 Nondimensional generalized displacements at the section $y=0$, $z=0$ or $z=0.9$, due to a unit heat source at $(0,0,1)$ in titanium.

Fig.4 Nondimensional stresses at the section $y=0$, $z=0$ or $z=0.9$, due to a unit heat source at $(0,0,1)$ in titanium.

件を満足する。図1の x 方向変位の差は小さく、 z 方向変位の差は最大約10%である。図3の変位は $z=0.9$ の断面であり差が無く、境界上では x , z いずれの変位も約10%の差である。図2の x , y 方向応力は点熱源付近では圧縮であるが、境界上では引っ張りである。等方と横等方の差は約13%である。 z 方向応力は全て圧縮で、せん断応力は点熱源の上下で符号が反転する。図4の $z=0.9$ での x 方向応力の等方と横等方の差は約22%に達する。また、 z 方向応力は約2%の差、境界上の x 方向応力は約14%の差である。

5. 結 言

定常点熱源に対する直角座標系による半無限横等方性弾性体中の変位と応力の閉形のグリーン関数を、無限体の解を用い、鏡像の概念を発展させることにより求めた。熱的境界条件は境界上で温度が零の場合、及び断熱条件の場合であり、また変位と応力の境界条件は、(1)境界で応力自由の場合、(2)境界で変位固定の場合、(3)境界で z 方向変位のみ固定の場合、の三種類である。さらに、直角座標系で表した半無限等方性弾性体の閉形のグリーン関数も誘導した。最後に、横等方性弾性を示すチタンを例に数値計算を行い、変位と応力に及ぼす異方性の影響を明らかにした。

付 録

A.1 グリーン関数に現れた定数 無次元定数は以下のように表される.

$$\begin{aligned} a &= \frac{C_{33}}{C_{44}} - k \left(1 + \frac{C_{13}}{C_{44}} \right), \quad b = k \frac{C_{11}}{C_{44}} - \left(1 + \frac{C_{13}}{C_{44}} \right), \quad a_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \\ b_1 &= \frac{2C_{66}}{C_{33}} \left(\frac{C_{13}}{C_{44}} + 1 \right), \quad d = \frac{(C_{13} - kC_{11})}{C_{33}}, \quad e = \frac{kC_{13}}{C_{33}} - 1, \\ f &= \frac{C_{13}}{C_{33}}, \quad k = \frac{\beta_3}{\beta_1}, \quad p = \frac{C_{11}}{C_{44}} - \frac{C_{13}}{C_{33}} \left(\frac{C_{13}}{C_{44}} + 1 \right), \quad q = \frac{2C_{66}}{C_{33}}, \\ w &= \frac{C_{33}}{C_{44}} - \frac{(C_{13} + C_{44})^2}{C_{44}(C_{11} - C_{66})}. \end{aligned} \quad (39)$$

A.2 ϕ_1 による変位と応力を求める公式

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{(C_{13} + C_{44})}{C_{44}} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial z}, \quad u_z = \left(\frac{C_{11}}{C_{44}} \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_1, \\ \sigma_{xx} &= -C_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left(a_1 \nabla^2 - b_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_1, \\ \sigma_{zz} &= C_{33} \frac{\partial}{\partial z} \left(p \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_1, \quad \sigma_{yz} = C_{33} \frac{\partial}{\partial y} \left(a_1 \nabla^2 - f \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_1, \\ \sigma_{xy} &= -C_{33} b_1 \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x \partial y \partial z}, \quad T = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

A.3 等方性弾性体の断熱条件の解 (付加項のみ)

(4) 境界 $z=0$ で断熱, 応力自由の解

$$\begin{aligned} \frac{u_x^c}{C_u} &= x \left\{ \frac{1}{R_{44}} + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{R_{44}^+} + \frac{1}{R_{44}R_{44}^+} \right) - \frac{z}{R_{44}^3} \right\}, \\ \frac{u_z^c}{C_u} &= 2(1-\nu) \left\{ \ln \frac{1}{R_{44}^+} + \frac{1}{R_{44}} - \frac{Z_{44}}{R_{44}} + \frac{r^2 + Z_{44}}{R_{44}^3} \right\}, \\ \frac{\sigma_{xx}^c}{C_\sigma} &= q \left\{ 2\nu \frac{1}{R_{44}} - \frac{x^2 - y^2}{r^2} \left[\frac{1}{R_{44}^+} + 2(1-\nu) \frac{1}{R_{44}R_{44}^+} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^2 - z}{R_{44}^3} + \left(\frac{2x^2}{r^2} + 2\nu \frac{y^2}{r^2} \right) \frac{Z_{44}}{R_{44}^3} + \frac{3r^2 z}{R_{44}^5} \right\}, \\ \frac{\sigma_{zz}^c}{C_\sigma} &= q \left\{ \frac{1}{R_{44}} + \frac{Z_{44}^2 + 2z}{R_{44}^3} - \frac{3r^2 z}{R_{44}^5} \right\}, \\ \frac{\sigma_{yz}^c}{C_\sigma} &= q y \left\{ \frac{z}{R_{44}^3} + \frac{3z Z_{44}}{R_{44}^5} \right\}, \quad \frac{T^c}{C^T} = 0, \\ \frac{\sigma_{xy}^c}{C_\sigma} &= q \frac{xy}{r^2} \left\{ 2(1-\nu) \left(\frac{1}{R_{44}^+} + \frac{Z_{44}}{R_{44}^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - 4(1-\nu) \left(\frac{1}{R_{44}^+} + \frac{1}{R_{44}R_{44}^+} \right) + \frac{r^2}{R_{44}^3} + \frac{3r^2 z}{R_{44}^5} \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

(5) 境界 $z=0$ で断熱, 変位固定の解

$$\begin{aligned} \frac{u_x^c}{C_u} &= \frac{x}{3-4\nu} \left\{ \frac{1}{R_{44}} - 2(1-\nu) \left(\frac{1}{R_{44}^+} + \frac{1}{R_{44}R_{44}^+} \right) - \frac{z}{R_{44}^3} \right\}, \\ \frac{u_z^c}{C_u} &= \frac{1}{3-4\nu} \left\{ \frac{Z_{44}}{R_{44}} - \frac{r^2 + Z_{44}}{R_{44}^3} \right\}, \quad \frac{T^c}{C^T} = 0, \\ \frac{\sigma_{xx}^c}{C_\sigma} &= -\frac{q}{3-4\nu} \left\{ 2\nu \left(\frac{1}{R_{44}} + \frac{Z_{44}}{R_{44}^3} \right) + \frac{x^2}{r^2} \left(\frac{r^2 + 1}{R_{44}^3} + \frac{3r^2 z}{R_{44}^5} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{x^2 - y^2}{r^2} \left\{ 2(1-2\nu) \frac{1}{R_{44}} + \frac{1}{R_{44}^+} + 4(1-\nu) \frac{1}{R_{44}R_{44}^+} - \frac{z}{R_{44}^3} \right\}, \\ \frac{\sigma_{zz}^c}{C_\sigma} &= -\frac{q}{3-4\nu} \left\{ -(1-2\nu) \left(\frac{1}{R_{44}} + \frac{Z_{44}}{R_{44}^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{R_{44}} - \frac{r^2 + Z_{44}}{R_{44}^3} + \frac{2z}{R_{44}^3} - \frac{3r^2 z}{R_{44}^5} \right) \right\}, \\ \frac{\sigma_{yz}^c}{C_\sigma} &= -\frac{q y}{3-4\nu} \left\{ 2(1-\nu) \left(\frac{1}{R_{44}R_{44}^+} + \frac{1}{R_{44}^3} \right) + \frac{Z_{44} + 2}{R_{44}^3} - \frac{3(r^2 + Z_{44})}{R_{44}^5} \right\}, \\ \frac{\sigma_{xy}^c}{C_\sigma} &= -\frac{q xy}{3-4\nu r^2} \left\{ 4(1-\nu) \left(\frac{1}{R_{44}} + \frac{Z_{44}}{R_{44}^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - 8(1-\nu) \left(\frac{1}{R_{44}^+} + \frac{1}{R_{44}R_{44}^+} \right) + \frac{r^2}{R_{44}^3} + \frac{3r^2 z}{R_{44}^5} \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

(6) 境界 $z=0$ で断熱, z 方向変位のみ固定の解
付加項は不要である.

文 献

- (1) 小林・古口・近藤, 定常点熱源に対する横等方性弾性体のグリーン関数, 機論 A, **63**-612 (1997-8), 1658-1662.
- (2) Mindlin, R.D. & Cheng, D.H., Thermoelastic Stress in the Semi-Infinite Solid, *J. Appl. Phys.*, **21** (1950), 931-933.
- (3) Liu Hsien-Chin, The Elastic Stresses and Deformations Produced in a Semi-Infinite Elastic Solid by a Point Source of Heat Beneath its Free Surface, *Scientia Sinica*, **9**, 5 (1960), 604-651.
- (4) Nowacki, W., *Thermoelasticity*, 2nd Edition, (1986) 566, Pergamon Press Lond., 173-181.
- (5) Sternberg, E. & McDowell, E.L., On the Steady-State Thermoelastic Problem for the Half-Space, *Q. Appl. Math.*, **14**, 4 (1956), 381-399.
- (6) Nowinski, J., Transient Thermoelastic Problem for an Infinite Medium With a Spherical Cavity Exhibiting Temperature-Dependent Properties, *J. Appl. Mech. ASME*, (1962), 399-407.
- (7) Kulshrestha, P. K. & Puri, P., Coupled thermoelastic problem for an elastic half-space with an embedded spherical cavity, *Arch. Mech.*, **23**, 2 (1971), 249-263.
- (8) Welsh, L. P., Tuchman, J. A. & Herman, I. P., The importance of thermal stresses and strains induced in laser processing with focused Gaussian beams, *J. Appl. Phys.*, **64**, 11 (1988), 6274-6286.
- (9) Germanovich, I. D., Kill, I. D. & Tsodokova, N. S., Thermoelastic Stresses in a Half-Space Heated by a Concentrated Energy Flux, *Appl. Math. & Mech.*, **52**, 4 (1988), 525-533, (in Russian).
- (10) Volchenok, I. A. & Rudin, G. I., Thermoelastic Stresses in a Multilayer Plate upon Action of Laser Radiation, *J. Eng. Phys.*, **55**, 5 (1989), 1286-1290.
- (11) Hector, Jr. L. G. & Hetnarski, R.B., Thermal Stresses due to a Laser Pulse: Elastic Solution, *J. Appl. Mech., ASME*, **63**, (1996), 38-46.
- (12) 山田勝稔, 点熱源による接合膜をもつ半無限体の熱応力とその特異性, 機論 A, **62**, 594 (1996-2), 540-547.
- (13) Sharma, B., Thermal Stresses in Transversely Isotropic Semi-Infinite Elastic Solids, *J. Appl. Mech.*, **25**, 1 (1958), 86-88.
- (14) Mossakowska, Z. & Nowacki, W., Thermal Stresses in Transversely Isotropic Bodies, *Arch. Mech. Stos.*, **4**-10 (1958), 569-603.
- (15) Choudhury, P., On the Steady-State Thermo-Elastic Problem for the Half-Space of Transversely Isotropic Material, *Indian J. Mech. & Math.*, **1**, 1 (1963), 6-11.
- (16) 金属データブック, 日本金属学会編を参照.