セルラ・オートマトンを利用した薄板補強リブの最適化*

尾 田 十 八^{*1}, 劉 江 林^{*2}

Optimum Stiffener Design of Plate Using Cellular Automata

Juhachi ODA and Jianglin LIU

In this study, the principle by which the ribs are formed in a leaf of tree is applied to resolve the problem of stiffeners in plate and shell structures. The generalized cellular automata are used to form a structure shape and the parameters are evolved by the genetic algorithm. The effectiveness of this method is confirmed through the numerical examples of the minimum compliance design problem of thin plates. Traditional constraint conditions such as the maximum plate thickness, plate volume and so on can be omitted by taking the ratio between the biggest deflection of plate with the stiffener and the corresponding deflection of uniform thickness plate under the equivalent volume as the objective function. The obtained optimum solutions are very similar to the leaf ribs and the shapes with more degrees of freedom.

Key Words: Computational Mechanics, Structural Analysis, Minimum Compliance Design, Design Engineering, Genetic Algorithm, Optimum Stiffener, Cellular Automata

1. 緒 言

薄板の剛性を増大させる研究は与えられた体積の下で全域的な最適板厚分布を求める問題と、補強リブ付き薄板の最適化問題に大別される。前者の研究については、最適性規準法により最適解を求めるものが多い^{(1),(2)}。一方、後者の研究としては、補強リブの位相を予め規定してその最適寸法や間隔を求めるか⁽³⁾、あるいは板厚やリブの最大、最小高さを規定し、リブの形態あるいはリブ分布の密度を求めるものが多い^{(4),(5)}。

ところで、薄板と補強リブの関係と同様なものを自然界に求めるとき、木の葉とその葉脈に注目することができる。木の葉はその遺伝子情報で形態の基本構成が定められ、その条件の中で、生存目的と外部環境条件に適応するように、細胞組織やホルモン等のミクロ的構造化作用や刺激作用によって局所的な最適化が図られ、その形態が決まっていると考えられる⁽⁶⁾。そして長い年月の経過と共に、その環境に適合しやすいように造られてきたものであるから、あらゆる意味で最適化されているの

であろうことが予測される⁽⁷⁾。しかし、なぜ木の葉は全域的に板厚を変化させず、特異な形態の葉脈を形成しているのであろうか、またその葉脈はなぜかなり太いものから細いものまでに変化しているのであろうか、特にこのような特異な形態形成のメカニズムを解明できれば、人工の構造物である薄板、シェル構造の剛性設計に貢献できると考えられる。そこで、本研究では局所情報のみを利用するセルラ・オートマトンを用い、木の葉の葉脈の形成する現象を模倣して薄板補強リブの最適形態を求めることを考える。

2. 木の葉とその力学モデル

2.1 木の葉とその葉脈

図1に示すフキの葉の裏側を見ると、つややかな表の面と異なり、太い葉脈に加え、細い葉脈が網目状に走っている。葉脈は大きな葉を支えるために、葉面からかなり出っ張っている。つまり、薄板を補強するように、葉の裏面に葉脈が配置されているのであるが、葉自身の厚さは全域ほとんど同じものである。また、葉の主脈の断面は図2に示すように支持点から縁に向かって高さも幅も次第に小さくなっていく。他のリブ(2次脈)もほぼ同じ傾向を示している。さらに、葉脈の断面

* 原稿受付 1997年11月26日。

^{*1} 正員, 金沢大学工学部(☎920-8667 金沢市小立野2-40-20)。^{*2} 正員, 金沢大学大学院。

の形はほぼ楕円状のものである。

以上のように木の葉の葉脈は葉面内の2次元の自由度があるばかりでなく、厚さ方向の自由度も有している。そして、その場所、場所で特異な変化を示しているように見える。このような高い自由度と特異性を有する形態決定には、従来から知られている位相決定法^{(8),(9)}では無理であると思われる。そこで、これに対応する手法を考えると、木の葉は葉原基の発生から後期の成長までの全ての過程において、あくまでも葉内の様々の細胞が、それぞれの置かれている位置にあって周囲の細胞の影響を受けながら、分裂、増殖し、かつ消滅していくことにより、造られていることに注目すると、生物における細胞の状態変化を示すセルラ・オートマトン理論を用いることが有効であると考えられる。

Fig. 1 Leaf of Pelasite Japonicus

Fig. 2 Sectional area of main rib

2.2 木の葉の形態形成モデル

木の葉の細胞とその変化を図3に示す2次元モデルに簡単化し、かつその形態形成について、次の

ような条件を設定する。

- (1) 図3に示すような要素を木の葉の細胞と見なし、このような細胞がそれを囲む周囲の細胞から刺激を受け、厚さ方向のみに成長あるいは退化し、葉脈を形成すると考える。
- (2) 細胞 C_{ij} は近傍の細胞からある種の刺激を受けるが、その刺激量の総和がある値（最大閾値）を超えると、厚さ方向に成長し、逆にある値（最小閾値）より小さいとき、最小厚さまで退化できる。
- (3) 近傍細胞からの刺激は細胞 C_{ij} との距離、あるいはそれとの接触面積により影響される。
- (4) 細胞は急激に成長あるいは退化せずに、与えられた量により、一歩ずつ変化する。

Fig. 3 2-Dimensional cellular automata

2.3 数学表示

前述した木の葉の形態形成モデルは著者らの提示した一般化されたセルラ・オートマトン (cellular automata : CA) の形で表示可能である⁽¹⁰⁾。つまり、図3に示すような i 行 j 列にある任意の細胞を C_{ij} とすると、 C_{ij} に対する r 近傍細胞は

$$N_{rij} = \{C_{kl} | C_{kl} \in [|k-i| \leq r, |l-j| \leq r]\} \quad \dots (1)$$

で定義される。この2次元細胞に対するCAは、 C_{ij} の時間 $(t+1)$ における状態を $u_{ij}^{(t+1)}$ とすると、

$$u_{ij}^{(t+1)} = f(u_{ij}^{(t)}, q_{ij}^{(t)}) \quad \dots (2)$$

と表される。ここで、 f と q はそれぞれ状態推移関数と入力関数である。任意の細胞の状態空間は以下のようなになる。

$$u_{i,j} = \{h_1, h_2, \dots, h_i, h_{i+1}, \dots\}^T \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 h_i は細胞の厚さである．細胞の1回の変化量を δh とすると、

$$h_{i+1} = h_i + \delta h \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$h_i = h_{\min} \quad \dots\dots\dots (5)$$

と定義される．ここで、 $h_{\min}$ は細胞の最小厚さである．また、入力関数 q は以下のように定義される．

$$q_{i,j}^{(t)} = \left(\sum_{kl \in N_{rij}} w_{k,l} e_{kl}^{(t)} - \theta_{ij} \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 w は、細胞 C_{ij} の r 近傍要素 N_{rij} から受ける刺激の程度を示す重みである．これにより、異なる距離の細胞から細胞 C_{ij} に与える異なる刺激効果を考慮することができる．また、 $e_{kl}^{(t)}$ は細胞 C_{ij} の時刻 t における近傍細胞に及ぼす刺激量である． θ_{ij} は要素 C_{ij} の刺激量に対する閾値である．さらに、式(6)の入力関数は以下のように表せる．

$$q_{i,j}^{(t)} = \begin{cases} 1 & \sum_{C_{kl} \in N_{rij}} w_{k,l} e_{kl}^{(t)} \geq \theta_{\max} \\ 0 & \theta_{\min} < \sum_{C_{kl} \in N_{rij}} w_{k,l} e_{kl}^{(t)} < \theta_{\max} \\ -1 & \sum_{C_{kl} \in N_{rij}} w_{k,l} e_{kl}^{(t)} \leq \theta_{\min} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

よって、式(2)の状態推移関数は以下のように定義される．

$$u_{i,j}^{(t+1)} = \begin{cases} u_{i,j}^{(t)} + \delta h & q = 1 \\ u_{i,j}^{(t)} & q = 0 \text{ or } u_{i,j}^{(t)} = h_{\min} \\ u_{i,j}^{(t)} - \delta h & q = -1 \text{ and } u_{i,j}^{(t)} > h_{\min} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (8)$$

すなわち、重み w を掛けた細胞 C_{ij} の近傍細胞からの刺激量の総和は閾値の最大値を超えると、細胞 C_{ij} は成長方向の隣接する状態に推移し、逆に、閾値の最小値より小さく、かつ時刻 (t) におけるその状態が最小厚さより大きい場合、退化方向の隣接する状態に推移する．他の場合、そのままの状態を保つ．

以上より、刺激指標 e 、重み w 、最大と最小閾値を決めれば、時刻 $(t+1)$ における各細胞の状態が決められる．

3. 局所ルールの決定法

2章で述べた方法を力学的な条件の明確な薄板の最大剛性設計問題へ応用することを考える．つま

り、薄板を有限個の要素(細胞)からなるとし、これら要素の単位面積当たりのひずみエネルギーを刺激量と考え、その補強リブ配置を求めることにする．具体的には遺伝的アルゴリズム⁽¹¹⁾(Genetic Algorithm: GA)等の最適化手法を用いることにより、2章での重み w 、最大閾値 $\theta_{\max}$ と最小閾値 $\theta_{\min}$ を求めれば、薄板の最大剛性を与えるリブ形態がCAにより決定できると思われる．

そこで、式(1)での r を1とする最も簡単な局所ルールを考えた．このとき、局所ルールの適用範囲は図3に示すような注目要素とそれを囲む周辺8つの要素となる．さらに、重み w は以下のように設定できる．

$$w_{k,l} = \begin{cases} w_0 = \text{constant} & (k=i \text{ and } l=j) \\ w_1 = 0.1464(1-w_0) & (k=i \text{ and } l=j \pm 1 \text{ or } k=i \pm 1 \text{ and } l=j) \\ w_2 = 0.1036(1-w_0) & (\text{others}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\sum_{C_{kl} \in N_{rij}} w_{k,l} = 1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 w_0 は注目要素 C_{ij} 自身の重み、 w_1 は C_{ij} と線で接触する周辺要素の重み、 w_2 は C_{ij} と点で接触する周辺要素の重みである． w_1 と w_2 の係数は周辺要素の中心と注目要素の中心間の距離を考慮して計算したものであるが、この考え方は、注目要素が辺や端部に位置する場合でも同様に適用されている．このようにしてGAを用いて重み w_0 、最大と最小閾値を決めれば、式(8)より、 $(t+1)$ の時刻における各要素の状態は一意的に決められる．

4. 数値例と考察

数値例として図4に示すような中央に集中荷重($P=3600000 \text{ kN}$)の作用する周辺単純支持と相対する2辺が単純支持で他の2辺が自由の正方形板(大きさ: $1000.0 \times 1000.0 \text{ mm}$)の2種類のモデルを考える．また、支持条件と荷重条件の対称性を考慮し、図4に示す正方形板の4分の1($\square OABC$ 部分)を解析モデルとする．式(5)の最小板厚 $h_{\min}$ を 2.0 mm に設定する．閾値($\theta_{\max}$, $\theta_{\min}$)を決定するためのGAのパラメータは人口数を50、交叉率を40%、突然変異率を1%に設定する．また、閾値の変化領域を $500.0 \leq \theta_{\min} \leq 1500.0$, $1500.0 \leq \theta_{\max} \leq 3000.0$ に限定している．さらに、GAの適応度(fitness)は有限要素法の解析で得られた補

Fig. 4 Thin square plate under concentrated load

強リブ付き薄板の最大変位 D_{max} とその等価体積の一樣厚さの板の最大変位 D_0 の比 D_{max}/D_0 とした。これにより、薄板の体積、最大板厚等の制約条件を無くし、より自由度のある最適解を求めることができる。

4.1 周辺単純支持モデル

より多様性のある解を得るため、注目要素自身の重み w_0 を 0.25, 0.50, 0.75 と 0.99 に設定し、式 (4) の δt を 2.0 mm に設定する。GA を用いて最大と最小閾値のみを求めた。解析モデルを 5×5 に分割し、乱数によって薄板の初期状態を図 5 のように与える。また、荷重条件と支持条件も対角線対称であることを考え、局所ルールの計算では、対角線の右側の三角形部分 ($\triangle OAB$) のみを計算対象とした。GA と局所ルールによって得られた最適解を図 6(a), (b), (c), (d) に示す。図中の数字はその要素の板厚を表し、これの書いていない要素の板厚は全て 2.0 mm である。

これらの結果により、

(1) 薄板を有限個の要素に分割し、かつ最大板厚の制約条件がない限り、最大剛性の薄板は特に全域の板厚を変化させず、木の葉の葉脈のように補強リブを形成する。

(2) w_0 が 0.25 と 0.50 のとき、ほぼ同じリブ形態、つまり、荷重点から最も近い支持部に向かって十字ばりのようなリブ形態が得られた。しかし適応度 D_{max}/D_0 からみると、 $w_0 = 0.50$ モデルの方が 0.25 モデルより良いことがわかる。また、図 6(b) の左側の数字は、図 4 に破線で示すような中央に集中荷重を受ける単純支持ばりの断面高さを設計変数とする最適高さを表すものである⁽¹²⁾。この数字は支持

面高さを、その対応する位置の要素の中心点の高さで現したものである。薄板に形成されているリブの高さとはりの断面高さとを比較すると、両者よく似ていることが分かる。ただ、前者のほうの中央要素の板厚は単に 2 つのはりの高さの和とならず、それより小さいことが分かる。

(3) w_0 が 0.75 と 0.99 のとき、図 6(c), (d) のようなほぼ同じリブ形態が得られた。ただ要素の分割が非常に粗いため、これらからリブ形態の特徴を判断することは難しい。また、 D_{max}/D_0 の値から、 $w_0 = 0.75$ モデルの方が良いこともわかる。

以上の (3) 点を考慮し、リブの形態をより明確にするため、図 6 の 1 つの要素を 4 個に増殖させた。つまり、計算モデルを 10×10 の 100 の個要素に分割した。そして、図 6(b), (c) のリブ形態を初期状態に計算した。得られた結果を図 7 に示す。要素自身の重みが 0.25 と 0.50 のとき、図 6(a), (b) の結果と同じように位相は変わらない。ただ板中心 O 部を除き、対称軸 OA, OC 上の要素の板厚より、その隣接している要素の板厚が小さくなる現象が見られた。また、図 7(b) の左側の数字は、先に述べたと同様中央に集中荷重の作用する単純支持ばりの断面の最適高さを表すものであるが⁽¹²⁾、これが薄板に形成されているリブの高さに良く似ていることも図 6(b) の場合と同様である。

要素自身の重みが 0.75 と 0.99 の図 7(c), (d) の結果から、先の図 6(c), (d) のそれらより、リブの形態がより明確になっていることが分かる。つまり、荷重点を中心にほぼ同心円状のリブと 2 つの放射状のリブが形成されると同時に、最も近い支持部に向かうリブも形成されている。また、リブの高さもかなり高いもの (84.0 mm) から低いもの (18.0 mm) まで現れている。これも木の葉の葉脈と似ている。

O	6	10	16	20	18	A
	20	2	26	10	14	
	4	4	4	4	6	
	14	12	6	22	2	
	24	18	8	28	4	
C						B

Fig. 5 Initial configuration

Fig. 6 Optimum solutions in 25 elements

Fig. 7 Optimum solutions in 100 elements

以上の計算から、CAを用いることにより、特別な条件を与えることなく、リブ形態が創生され、かつその位相や寸法も極めて自由度のある形で求められることが確認できた。

4・2 相対する2辺単純支持のモデル

前節の結果を参考し、相対する2辺が単純支持で、他の2辺が自由のモデルの計算を試みた。ここで、要素自身の重み w_0 を0.50, 0.75に、式(4)の α を1.0 mmに設定する。解析モデルを5×5に分割し、図5の初期状態から前節で述べた方法で得られた結果を図8(a)に示す。図中の数字はその要素の板厚を表

し、これの書いていない要素の板厚は全て2.0 mmである。要素自身の重み w_0 を0.50から0.75に変化させたにも関わらず、同じ結果が得られた。つまり、リブは荷重点から最も近い支持部に向かってはりのようなリブを形成する。さらに、解析モデルを10×10に分割し、図8(a)の結果を初期状態にして解析を行った結果は5×5分割モデルと同じように要素自身の重み w_0 に関係なく、図8(b)に示す結果が得られた。このことから、本モデルでは要素自身の重みが最適解に与える影響はそれほど敏感ではないことが分かった。また、この2つ

Fig. 8 Two opposite edges simply supported and others free square plate

の結果で、リブの高さは、断面高さを設計変数とする単純支持ばりの最適高さ（図 8 (a),(b)の左側の数字）とほぼ一致している⁽¹²⁾ことも分かった。

以上より、中央に集中荷重を受ける相対する 2 辺が単純支持で他の 2 辺が自由の薄板に補強リブを付ける場合、断面高さを設計変数とする中央に集中荷重の作用する単純支持ばりの最適解を基に、荷重点から支持辺に向かってリブを形成すればほぼ良いことが分かる。

5. 結 論

本研究では、木の葉の葉脈の形成する現象を模倣して薄板補強リブ形態を創生する手法を考えた。その手法は CA によって要素の板厚を変化させるもので、最大と最小閾値を GA によって求めるものである。ここではまず、解析モデルを粗く分割し、最適解を求めた。次に、解析モデルを細かく分割し、前の解析で得られた最適解を初期状態に

し、大規模な最適化問題を解くという 2 段階の手法を試みた。数値例を通して本手法の有効性を確認し、次の結果を得た。

- (1) 構造物の最適形態を求めるとき、要素自身の状態のみを考慮するのではなく、その近傍の要素の状態を同時に考慮する CA 手法が有効である。このとき周辺要素の重みは最適解に与える影響は非常に敏感なものではなく、0.5 から 0.75 までの間に設定したほうが良いことが分かった。
- (2) 薄板を有限個の要素に分割し、かつそれらの最大板厚の制約条件がない限り、最適板厚分布というものが存在せず、最大剛性の薄板は木の葉の葉脈のように補強リブを形成する。
- (3) 周辺単純支持モデルでは、荷重点から最も近い支持部に向かう十字形の補強リブが作られた場合と、荷重点を中心とするほぼ同心円状のリブと放射状、および最も近い支持部に向かうリブの形成される場合とのあることが分かった。
- (4) 相対する 2 辺が単純支持で他の 2 辺が自由のモデルでは、荷重点から最も近い支持部に向かうリブが形成される。しかもそのリブの高さは中央に集中荷重の作用する単純支持ばりの最適高さとはほぼ一致する。

文 献

- (1) G.N. Vanderplaats and H.L. Thomas, Structural Optimization, 6,1-6(1993),1
- (2) Jean-Louis Armand and Bernard Lodier, Int. J. Num. Methods Engng., 13(1978),373
- (3) Richards. D.M., Int. J. Solids structures, 12(1976), 791
- (4) Keng-Tung Chang and Niels. Olhoff, Int. J. Solids structures, 18(1982), 153
- (5) 山崎, 小林, 機論, 54-501, A(1989-5), 1165
- (6) 日本機械学会編, 構造・材料の最適設計, (1989.7), 技報堂出版
- (7) 田中, 植物のデザイン (形と力学), (1983.11), 共立出版
- (8) 尾田, 主税, 機論, 63-606, A(1997-2), 425
- (9) 尾田, 白井, 劉, 多次元染色体を用いた GA 法とその構造位相決定問題への応用, 機論, 62-593, A(1996-1)
- (10) J.ODA and J.LIU, Stiffener layout design of plate using genetic algorithm and local rule, OPID'97 International symposium on optimization and innovative design (#97-210), 216-218
- (11) D.E.Goldberg, Genetic Algorithm in Search, Optimization, and Machine Learning, Addison-Wesley, Publ. (1989)
- (12) 尾田, 劉, 機論, 63-608, A(1997-4), 864