接合部材の応力集中緩和のための接合部形状最適化*

関根 英樹^{*1}, 胡 寧^{*2}, 渋谷 学^{*3}Shape Optimization to Reduce Stress Concentrations
of Jointed Bodies

Hideki SEKINE, Ning HU and Manabu SHIBUYA

This paper proposes a shape optimization method to reduce stress concentration of jointed bodies by paying attention to stress singularities at the ends of bonded interface. The shape geometry is expressed by the Bezier function and is optimized using the sequential linear programming. The effectiveness of the proposed shape optimization method is demonstrated through a numerical example of single-lap joint. Results can provide much information for optimum design of single-lap joint.

Key Words: Composite Material, Jointed Body, Optimum Design, Stress Concentration, Stress Relaxation, Single-Lap Joint, Shape Optimization, Sequential Linear Programming

1. 緒 言

近年、機械、構造物の機械的特性に対する要求がますます厳しく、かつ多様になり、金属・セラミックス接合部材をはじめとする互いに異なる材料を接合した接合部材が注目され、幅広い分野で実用化が図られようとしている。しかし、接合部材を使用する際の問題点として、接合界面が自由縁と交差する接合部端において、材料および形状の不連続性のために応力およびひずみに特異性が現れ、応力集中が生じることが挙げられる。この応力集中は接合界面のはく離の発生を招き、やがては接合部材全体を破壊へと至らしめる。そのため、特異性を考慮した上での接合部における応力場を把握する必要がある、これまでに特異性に関する数多くの研究がなされてきた^{(1)~(6)}。一方、構造部材におけるひずみ分布や応力分布は、その形状に大きく影響されるため、形状を適当に変化させることにより、応力集中をできる限り緩和することが構造部材の強度向上を図る上で重要となる。単一材料から成る構造部

材の応力集中緩和のための形状最適化に関する研究は、数値解析法の進展に伴い盛んに行われており⁽⁶⁾⁽⁷⁾、接合部材についても応力集中緩和を目的とした形状最適化は重要な課題であり、これまでにいくつかの研究がなされている^{(8)~(10)}。しかし、接合部材には応力特異性が現れるにもかかわらず、形状最適化における応力集中緩和の目的関数として数値解析より得られた応力の値を直接採用するなどの便法が取られ、応力特異性を十分に考慮した詳細な研究はこれまでにない。

本研究では、接合部材の接合界面上における応力集中緩和のための接合部の形状最適化を行うために、まずはじめに応力特異性が消失している場合と応力特異性が現れる場合のそれぞれについて、数値計画法に基づいた形状最適化問題を定式化した。次に、数値例として、シングラップジョイントを取り上げ、定式化した形状最適化問題に対して境界要素法を用いた逐次線形計画法による解法を示し、接合部材の強度を向上させるための最適形状を明らかにした。

2. 接合部端における応力特異性

接合部材の接合部端近傍を図1に示す。接合部端に原点Oを置く極座標を (r, θ) とする。接合材は二つの材料からなり、 θ_1 の接合角を有する材料1と θ_2 の

* 原稿受付 1997年10月30日。

*¹ 正員、東北大学工学部(☎980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉01)。*² 東北大学工学部[現：中国清華大学]。*³ 東北大学大学院[現：石川島播磨重工業(株)]。

接合角を有する材料2とが、 $\theta=0$ の線上で接合している。材料1と材料2はともに均質等方弾性体であると仮定し、せん断弾性係数をそれぞれ G_1 および G_2 、ポアソン比を ν_1 および ν_2 と表す。このとき、原点Oにおける応力特異性を支配する特性方程式は、次式のように表される⁽¹⁾⁽³⁾。

$$\begin{aligned} D(\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta, p) = & \{4p^2(p^2-1)\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 + \sin^2 p(\theta_1-\theta_2) - p^2\sin^2(\theta_1-\theta_2)\}\alpha^2 \\ & + 4p^2\{\sin^2\theta_1(\sin^2 p\theta_2 - p^2\sin^2\theta_2) + \sin^2\theta_2(\sin^2 p\theta_1 - p^2\sin^2\theta_1)\}\alpha\beta \\ & + 4(\sin^2 p\theta_1 - p^2\sin^2\theta_1)(\sin^2 p\theta_2 - p^2\sin^2\theta_2)\beta^2 + 2\{\sin^2 p\theta_1 - \sin^2 p\theta_2 - p^2\sin^2\theta_1 + p^2\sin^2\theta_2 \\ & - 2p^2(\sin^2\theta_2\sin^2 p\theta_1 - \sin^2\theta_1\sin^2 p\theta_2)\}\alpha + 4p^2(\sin^2\theta_2\sin^2 p\theta_1 - \sin^2\theta_1\sin^2 p\theta_2)\beta \\ & + \sin^2 p(\theta_1+\theta_2) - p^2\sin^2(\theta_1+\theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 p は応力特異性の強さを表す複素パラメータ、 α, β はダンダース・パラメータ⁽²⁾で次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{G_1 m_2 - G_2 m_1}{G_1 m_2 + G_2 m_1}, \quad \beta = \frac{G_1(m_2-2) - G_2(m_1-2)}{G_1 m_2 + G_2 m_1} \quad (2)$$

上式において、 m_i は、平面ひずみおよび平面応力に対してそれぞれ次のように表される。

$$m_i = 4(1-\nu_i) \quad (\text{平面ひずみ}) \quad (3)$$

$$m_i = 4/(1+\nu_i) \quad (\text{平面応力}) \quad (4)$$

p が $0 < \text{Re}(p) \leq 1$ において式(1)の根となる場合、接合部端近傍($r \rightarrow 0$)における応力場は次のようになる⁽³⁾。

$$\sigma_i = \begin{cases} O(r^{p-1}); & \text{if } p \text{ is real} \\ O[r^{\epsilon-1} \cos(\eta \log r) \text{ or } r^{\epsilon-1} \sin(\eta \log r)]; & \text{if } p = \xi + i\eta \text{ is complex} \\ O(\log r); & \text{if } D \neq 0 \text{ in } 0 < \text{Re}(p) < 1 \text{ and } dD/dp = 0 \text{ at } p=1 \\ O(1); & \text{if } D \neq 0 \text{ in } 0 < \text{Re}(p) < 1 \text{ and } dD/dp \neq 0 \text{ at } p=1 \end{cases} \quad (5)$$

本研究では、き裂先端近傍における応力場が $\sigma = O(r^{-\lambda})$ で表されるとする破壊力学的表記に統一するため、特性方程式の根 p を用いて次式より得られるパラメータ λ を応力特異性の強さを表す指数とする。

$$\lambda = 1 - p \quad (6)$$

ここで、接合部端近傍の応力およびひずみの挙動を与える λ として、 $0 \leq \text{Re}(\lambda) < 1$ における実部が最大となる λ を考える。 λ の値が大きくなるに従って応力特異性は強く、小さくなると応力特異性は弱くなり、 $\lambda=0$ (ただし、 $dD/dp \neq 0$) になると特異性は完全に消失し、非特異となる。

まずはじめに、式(1)の特性方程式を数値的に解くことにより、接合角と応力特異性の強さの関係を検討する。図1の接合部材を平面ひずみ問題として扱い、ポアソン比を $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ に固定し、せん断弾性係数

の比が $G_2/G_1 = 1.0, 2.0, 3.0$ のそれぞれの場合について λ を求めた結果を図2に示す。 $G_2/G_1 = 1.0$ の場合 [図2(a)]、接合部端における応力特異性の出現と消失の境界線は、 $\theta_1 + \theta_2 = \pi \text{ rad}$ の直線と一致し、境界線を境として $\theta_1 + \theta_2$ が大きくなるに従い、 λ の値は増加し、応力特異性は強くなる。 $\theta_1 = \theta_2 = \pi \text{ rad}$ の場合には $\lambda = 0.5$ となり、無限弾性平板中の直線き裂先端における応力特異性の強さ 0.5 と一致する。一方、境界線を境として $\theta_1 + \theta_2$ が小さい場合、常に $\lambda = 0$ となり、応力特異性は消失している。 $G_2/G_1 = 2.0, 3.0$ の場合 [図2(b), (c)]、応力特異性の出現と消失の境界線は $\theta_1 + \theta_2 = \pi \text{ rad}$ の直線を中心として振動的となり、その振幅は G_2/G_1 が増加するに従って大きくなることがわかる。なお、 $G_2/G_1 = 2.0, 3.0$ の場合、 $\theta_1 = \theta_2 = \pi \text{ rad}$ 周辺の領域において応力特異性の強さを表す指数は複素数となるが、特性方程式の根のうち最大となる $\text{Re}(\lambda)$ の値のみを図に示した。

以上の結果より、シングラップジョイントのような形状を有する接合部材では、一方の材料の接合角が $\pi \text{ rad}$ に固定されているから、もう一方の接合角が 0 rad となる場合のみ接合部端において応力特異性が消失することがわかる。

3. 接合部材における形状最適化問題の定式化

接合部材の接合部端において応力特異性が消失している場合と応力特異性が現れる場合のそれぞれについて

Fig. 1 Jointed body

て、数理計画法に基づいた応力集中緩和のための形状最適化問題を定式化する。なお、ここでは最適化イタレーションごとに目的関数・制約関数を設計変数に関して逐次、線形化する逐次線形計画法に基づいた定式化を行う。

3・1 応力特異性が消失している場合 接合部端において応力特異性が消失している場合、接合部端における応力は有限の値となり、接合部形状最適化における目的関数として、応力値を直接用いることができる。応力集中緩和のための形状最適化を行う場合、最適化イタレーションごとに応力集中の位置が変化するので、緩和対象である応力に上限値 s を設定し、この上限値を最小化することを考える。また、線形近似の精度を保証するため、設計変数である制御点座標を可動範囲 $2d$ 以内に制限する。このとき、応力集中緩和のための形状最適化問題は次式のように定式化される。

$$\begin{aligned} \min s \\ \text{s.t. } \sigma_j^{(k)} + (\nabla \sigma_j^{(k)})^T (\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k)}) \leq s \\ \max(x_i^l, x_i^{(k)} - d) \leq x_i \leq \min(x_i^u, x_i^{(k)} + d) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 σ_j は接合界面上の j 番め節点における応力、 $\nabla \sigma$ は応力感度、 $\mathbf{X}$ は設計変数のベクトル、 x_i は設計変数であり、設計境界の i 番め制御点の座標、 x_i^u と x_i^l はそれぞれ各制御点座標の上限値および下限値、上添字 (k) は最適化イタレーションごとの回数を示す数である。また、収束条件としては次式を用いる。

$$|(\sigma_{\max} - \sigma_{\max}^{(k)}) / \sigma_{\max}^{(k)}| < \varepsilon \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 ε は収束判定のためのパラメータである。式(8)を満足した場合は最適化終了となり、満足しない場合は次の最適化イタレーションへ進む。なお、式(7)における応力感度 $\nabla \sigma$ は前進差分法を用いて計算する。

3・2 応力特異性が現れる場合 接合部端において応力特異性が現れる場合、非特異要素を用いた有限

要素法、境界要素法による応力解析では、最大応力の値は要素分割の粗密の程度に依存するものとなり、したがって、最大応力を用いての形状最適化問題の定式化は不適当である。そこで、応力に代わるパラメータとして、特異応力場の強さを導入して、接合部端において応力特異性が現れる場合の応力集中緩和のための形状最適化問題の定式化を行う。

応力特異性が現れる場合、接合部端近傍の接合界面上の応力 $\sigma(r)$ は次式で表される。

$$\sigma(r) = K/r^\lambda \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 K は特異応力場の強さである。式(9)の両辺の対数をとれば次式が得られる。

$$\log \sigma(r) = -\lambda \log r + \log K \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(1)の特性方程式の根 p から λ を計算し、接合部端近傍の応力解析結果 $\sigma(r)$ を式(10)にあてはめて、最小二乗法を用いれば、特異応力場の強さ K が得られる。

接合部端におけるはく離発生時の特異応力場の強さ K の限界値を K_{cr} とする。すなわち、 K が K_{cr} よりも小さければはく離は起こらず、 K_{cr} に達するとはく離が発生するものとする⁽¹¹⁾。したがって、接合部材の強度を向上させるためには、 K を K_{cr} で無次元化した無次元特異応力場の強さ K/K_{cr} を緩和すればよいことになり、応力特異性が消失している場合の形状最適化問題の定式化と同様に、応力特異性が現れる場合の形状最適化問題は次式のように定式化される。

$$\begin{aligned} \min s \\ \text{s.t. } (K/K_{cr})^{(k)} + (\nabla (K/K_{cr})^{(k)})^T (\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k)}) \leq s \\ \max(x_i^l, x_i^{(k)} - d) \leq x_i \leq \min(x_i^u, x_i^{(k)} + d) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11)$$

また、収束条件としては次式を用いる。

$$|(K/K_{cr} - (K/K_{cr})^{(k)}) / (K/K_{cr})^{(k)}| < \varepsilon \quad \dots\dots\dots (12)$$

なお、式(11)における感度 $\nabla (K/K_{cr})$ は、3・1節における $\nabla \sigma$ と同様に、前進差分法を用いて計算する。

Fig. 2 Relationship between strength of stress singularity and jointed angles

Fig. 3 Single-lap joint under uniform tension

Fig. 4 0°-0° single-lap joint

4. 数値計算例および考察

4.1 数値解析モデル 数値解析モデルとして、図3に示されるような一様引張応力 t を受けるシングルラップジョイントを考える。シングルラップジョイントを構成する材料1および2は固相接合法⁽¹²⁾により接合されているものとし、それぞれの材料の縦弾性係数を E_1 および E_2 、ポアソン比を ν_1 および ν_2 とする。接合界面長さは l で表し、他の寸法は図3中に示すとおりである。また、二つの接合部端近傍領域を図3に示すように領域1および2とし、領域 $n(n=1, 2)$ における材料1および2の接合角を θ_1^n および θ_2^n とする。座標系としては、シングルラップジョイントの接合界面の中心を原点とする直角座標系 (x, y) をとる。応力解析には境界要素法を用い、二次の3節点アイソパラメトリック要素を用いる。このとき、接合部端における最小要素サイズは 10^{-2} mm のオーダーとし、接合部端近傍領域では、接合部端から離れるに従って等差数列的に要素サイズが大きくなるように要素分割を行う。なお、本研究におけるシングルラップジョイントの解析は、すべて平面ひずみ問題として扱う。

シングルラップジョイントの接合部の形状最適化を行う際、各接合部端近傍領域において図3中の黒丸印で示される三つの制御点によって Bezier 関数近似⁽¹³⁾される境界をここでは設計境界とする。このとき、設計変数は、接合部端から3番めの二重丸で示される制御点の x 座標である。領域1および2における設計変数をそれぞれ x_1 および x_2 と表す。Bezier 関数は、始点と終点となる制御点を通り、始点とその隣の制御点の結ぶ直線、および、終点とその隣の制御点の結ぶ

Fig. 5 Initial shape and optimum shape

直線に接するという特徴を有するから、接合部端から2番めの制御点の位置は接合角を支配しており、最適化過程においてこの制御点の位置を固定することによって接合角を一定に保つことができる。なお、逐次線形計画法の各ステップにおける最適化手法としては、シンプレックス法を用いる。

4.2 応力特異性が消失している場合 図4に示すような接合部端において応力特異性が消失している0°-0°シングルラップジョイント ($\theta_1^1 = \theta_2^2 = 0$ rad) の場合の形状最適化結果を示す。形状最適化を行う際、応力感度計算における設計変数の差分ステップを $\Delta x_i = 0.02$ mm、設計変数のムープリミットを $d = 1.0$ mm、収束判定パラメータを $\varepsilon = 0.01$ とした。このとき、数十回と比較的多数の繰返し計算を行って最適解が得られたが、その収束の状況は良好であった。なお、式(7)で表される形状最適化問題における応力としては、接合界面のはく離に対して強い支配因子となる接合界面上のせん断応力を用いた。

4.2.1 材料特性の最適結果に対する影響 シン

グラップジョイントを構成する材料の材料特性が、形状最適化後の接合部形状および接合界面上の最大せん断応力 $\tau_{\max}$ に及ぼす影響について検討する。ここでは、 0° - 0° シングルラップジョイントの接合界面長さ l を 32.93 mm に固定し、材料特性が表 1 の Case (a), Case (b), Case (c) の各場合について形状最適化を行った結果について述べる。

接合部の初期形状と最適形状の比較を図 5 に示す。最適形状については、Case (a) から Case (b), Case (c) になるに従いせん断弾性係数比 G_2/G_1 が大きくなるから、材料 2 に比べて材料 1 は相対的にせん断に対する変形が大きくなるため、それを補うように材料 1 の体積が増す。なお、このとき材料 2 の最適形状は Case (a), Case (b), Case (c) でほとんど同じである。

最大せん断応力 $\tau_{\max}$ は接合部端ではなく接合部端の近傍に生じる。表 1 より、形状最適化により、Case (a), Case (b), Case (c) のいずれの場合も、接合界面上の応力集中を大幅に緩和することができ、また、せん断弾性係数比 G_2/G_1 が大きいほど、そのときの $\tau_{\max}$ の値は大きくなることがわかる。

4.2.2 接合界面長さの最適結果に対する影響

シングルラップジョイントの接合界面長さ l が、接合部の最適形状および接合界面上の最大せん断応力 $\tau_{\max}$ に及ぼす影響について検討する。ここでは、 0° - 0° シングルラップジョイントの材料特性を一つの場合に固定し、接合界面長さ l が表 2 の Case (a), Case (b),

Case (c) の場合について形状最適化を行った結果について述べる。

接合部の初期形状と最適形状の比較を図 6 に示す。接合界面長さ l にかかわらず、接合部端近傍の形状がほとんど同じという最適結果が得られた。これは、本形状最適化問題の場合、最適形状に対して接合部端近傍の応力が支配的であることを意味する。最大せん断応力 $\tau_{\max}$ については、表 2 に示されるように、大幅に緩和される。また、接合界面長さ l が長くなるに従い、そのときの $\tau_{\max}$ の値は小さくなることがわかる。

4.2.3 接合部材の強度向上 0° - 0° シングルラップジョイントを構成する材料および接合界面長さのさまざまな組合せについて形状最適化を行い、接合界面上の最大せん断応力からその接合部材の強度向上について検討する。

表 1 の Case (a), Case (b), Case (c) の各場合について、初期形状および最適形状における接合界面長さ l に対する最大せん断応力 $\tau_{\max}$ の関係を図 7 に示す。図 7 において、横軸はシングルラップジョイントの数値解析モデルの全長 L で無次元化した接合界面長さ l を、縦軸は一様引張応力 t で無次元化した最大せん断応力 $\tau_{\max}$ をとっている。4.2.1 項、4.2.2 項ですでに述べたが、形状最適化により、応力集中は大幅に緩和されることがよくわかる。

次に、初期形状および最適形状の場合の接合界面長さ l に対する接合部材の極限引張強さ t_{ul} の関係を図 8 に示す。図 8 において、横軸は L で無次元化した接

Table 1 Material properties, lap length and results of optimization

	E_1	E_2	ν_1	ν_2	G_2/G_1	L	Normalized maximum shear stress $\tau_{\max}/t$	
	(GPa)	(GPa)				(mm)	Initial shape	Optimum shape
Case(a)	100.0	100.0	0.3	0.3	1.0	32.93	1.358	0.223
Case(b)	100.0	200.0	0.3	0.3	2.0	32.93	1.728	0.362
Case(c)	100.0	300.0	0.3	0.3	3.0	32.93	1.908	0.495

Table 2 Material properties, lap length and results of optimization

	E_1	E_2	ν_1	ν_2	G_2/G_1	L	Normalized maximum shear stress $\tau_{\max}/t$	
	(GPa)	(GPa)				(mm)	Initial shape	Optimum shape
Case(a)	100.0	200.0	0.3	0.3	2.0	32.93	1.728	0.362
Case(b)	100.0	200.0	0.3	0.3	2.0	98.78	1.068	0.237
Case(c)	100.0	200.0	0.3	0.3	2.0	164.64	0.702	0.162

合界面長さ l を、縦軸は接合界面せん断強さ τ_{cr} で無次元化した極限引張強さ t_{ul} をとっている。接合界面上の最大せん断応力 τ_{max} および接合界面せん断強さ τ_{cr} を用いると、極限引張強さ t_{ul} は次のように表される。

$$t_{ul} = \tau_{cr} \frac{t}{\tau_{max}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

上式を用いれば、接合界面長さに対する接合部材の極限引張強さ t_{ul} の関係は、接合界面長さに対する最大せん断応力 τ_{max} の関係から容易に得ることができ、事実図8は図7を基に作ったものである。

(a) Case (a) in Table 2

(b) Case (b) in Table 2

(c) Case (c) in Table 2

Fig. 6 Initial shape and optimum shape

図8より、いずれの場合についても、形状最適化により、接合部材の極限引張強さ t_{ul} を大幅に高くすることができる。また、極限引張強さ t_{ul} は、最適形状において、 τ_{cr} が一定であれば Case (a) の場合が最も高く、接合界面長さ l については、長くなるに従い高くなる。すなわち、 0° - 0° シングルラップジョイントを構成する材料1, 2の材料特性が近くなり、また、接合界面長さが長くなるに従い、シングルラップジョイントの強度は向上することになる。

4.3 応力特異性が現れる場合

4.3.1 接合形状についての予備的検討 接合部端において応力特異性が現れる場合について、二つの設計変数をパラメトリックに変動させることにより、特異応力場の強さ K を用いた形状最適化に関する予備的検討を行う。ここでは、応力特異性が現れるシングルラップジョイントとして、 $\theta_1^1 = \theta_2^2 = \pi/2$ rad の 90° - 90° シングルラップジョイントを対象とし、材料特性と接合界面長さ l は表1の Case (b) の場合とした。なお、 90° - 90° シングルラップジョイントには単

Fig. 7 Relationship between maximum shear stress and lap length

Fig. 8 Relationship between ultimate tensile strength and lap length

Table 3 Critical values of strengths of stress singularities and results of optimization

	κ	K_{1cr}	K_{2cr}	$\max(K_1/K_{1cr}, K_2/K_{2cr})$	
				Initial shape	Optimum shape
Case(a)	2.0	1.0	2.0	0.381	0.275
Case(b)	1.0	1.0	1.0	0.588	0.451
Case(c)	0.5	2.0	1.0	0.588	0.426

Fig. 9 Relationship between normalized strengths of stress singularities and design variables

位の一様引張応力が作用するものとした。解析では、領域1および2における特異応力場の強さの限界値の比 $\kappa = K_{2cr}/K_{1cr}$ をパラメータとし、 $\kappa = 2.0$ ($K_{1cr} = 1.0$, $K_{2cr} = 2.0$) の場合を取扱った。その際、二つの設計変数の許容範囲を $-20.0 \text{ mm} \leq x_1 \leq 30.0 \text{ mm}$, $-30.0 \text{ mm} \leq x_2 \leq 20.0 \text{ mm}$ に設定した。なお、特異応力場の強さとしては、接合界面上のせん断応力の特異応力場の強さを用いた。

解析結果を図9に示す。図9(a)は領域1における無次元特異応力場の強さ K_1/K_{1cr} 、図9(b)は領域2における無次元特異応力場の強さ K_2/K_{2cr} 、図9(c)は領域1と領域2における無次元特異応力場の強さの最大値(最大無次元特異応力場の強さ) $\max(K_1/K_{1cr}, K_2/K_{2cr})$ をそれぞれ示したものである。図9(a)から、領域1の無次元特異応力場 K_1/K_{1cr} を緩和するためには、設計変数 x_1 , x_2 をともに大きくする必要がある。一方、図9(b)を見ると、領域2の無次元特異応力場 K_2/K_{2cr} を緩和するためには、設計変数 x_1 , x_2 をともに小さくしなければならないことがわかる。結局、 $\max(K_1/K_{1cr}, K_2/K_{2cr})$ を最小にすることを考えたときは、図9(c)に示されるように、図9(a), (b)の場合とは異なった最適設計点が存在することになる。

4・3・2 形状最適化 設計変数をパラメトリックに変動させて最適設計点を探索する場合、大量に繰返して境界要素解析を行うために膨大な計算時間をお

Fig. 10 Initial shape and optimum shape

し、はなはだ非効率的である。その上、より多くの設計変数を用いる場合、パラメトリックな探索は不可能となる。そこで、式(11)で定式化した接合部端において応力特異性が現れる場合の形状最適化法に従って形状最適化を実行し、その有効性を検証する。

ここでも、4・3・1項と全く同じ材料特性、接合界面長さ、荷重条件の 90° - 90° シングルラップジョイントを対象とする。ただし、特異応力場の強さの限界値については、表3のCase(a), Case(b), Case(c)の三とりの場合を取扱う。このとき、式(11)の形状最適化問題は次のように書き表される。

$$\begin{aligned}
 & \min s \\
 & \text{s.t. } (K_1/K_{1cr})^{(k)} + (\nabla(K_1/K_{1cr})^{(k)})^T (X - X^{(k)}) \leq s \\
 & \quad (K_2/K_{2cr})^{(k)} + (\nabla(K_2/K_{2cr})^{(k)})^T (X - X^{(k)}) \leq s
 \end{aligned}$$

$$\max (x_i^l, x_i^{(k)} - d) \leq x_i \leq \min (x_i^u, x_i^{(k)} + d) \quad \dots\dots\dots (14)$$

また、収束条件は次のように与えられる。

$$|(K_1/K_{1cr} - (K_1/K_{1cr})^{(k)}) / (K_1/K_{1cr})^{(k)}| < \varepsilon$$

$$|(K_2/K_{2cr} - (K_2/K_{2cr})^{(k)}) / (K_2/K_{2cr})^{(k)}| < \varepsilon \quad \dots (15)$$

なお、形状最適化を行う際、感度計算における設計変数の差分ステップを $\Delta x_i = 0.02 \text{ mm}$ 、設計変数のムーブリミットを $d = 2.0 \text{ mm}$ 、収束判定パラメータを $\varepsilon = 0.001$ とした。なお、4・2節と同様、数十回の繰返し計算で最適解が得られた。

接合部端の端面が平面の初期形状と最適形状との比較を図10に示す。図10より、領域1と2の特異応力場の強さの限界値の組合せによって、最適形状はかなり変わることがわかる。表3に、Case(a)、Case(b)、Case(c)の各場合の、初期形状と最適形状での最大無次元特異応力場の強さを示す。Case(a)、Case(b)、Case(c)のいずれの場合も、形状最適化により最大無次元特異応力場の強さが20数%とかなり大きく緩和されている。すなわち、これにより、シングルラップジョイントの強度は30数%向上することを意味している。

5. 結 言

接合部材の接合界面上における応力集中緩和のための形状最適化問題を、応力特異性が消失している場合と応力特異性が現れる場合のそれぞれについて定式化した。数値例として、シングルラップジョイントを取り上げ、その有効性を示し、接合部材の強度向上について検討した。

応力特異性が消失している場合、接合部端の形状最適化により、接合界面上に生じるせん断応力集中を大

幅に緩和することができた。接合部端を最適形状にしたとき、 0° - 0° シングルラップジョイントを構成する材料1, 2の材料特性が近くなり、また、接合界面長さが長くなるに従い、シングルラップジョイントの強度を向上させることができる。

応力特異性が現れる場合については、接合角を一定に保って形状を変化させることにより、特異応力場の強さを変化させることが可能であり、 90° - 90° シングルラップジョイントの場合、最適形状では特異応力場の強さを20数%とかなり大きく緩和することができた。

文 献

- (1) Bogy, D. B., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **35**-3 (1968), 460-466.
- (2) Dundurs, J., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **36**-3 (1969), 650-652.
- (3) Bogy, D. B., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **38**-2 (1971), 377-386.
- (4) Erdogan, F., *Int. J. Fract. Mech.*, **7**-3 (1971), 317-330.
- (5) 久保司郎・大路清嗣, 機論, **57**-535, A (1991), 632-636.
- (6) Francavilla, A., Ramakrishnan, C. V. and Zienkiewicz, O. C., *J. Strain Analysis*, **10**-2 (1975), 63-70.
- (7) Xu, C. and Yu, M., *Comput. Struct.*, **36**-3 (1990), 491-497.
- (8) Murakawa, H. and Ueda, Y., *Trans. JWRI*, **18**-2 (1989), 133-140.
- (9) 古口日出男・菊地義光・日野利文・矢田敏夫, 機論, **59**-558, A (1993), 448-453.
- (10) Park, J. and Anderson, W. J., *Compos. Eng.*, **4**-9 (1994), 901-912.
- (11) 服部敏雄・坂田荘司・初田俊雄・村上元, 機論, **54**-499, A (1988), 597-603.
- (12) 小山田彬・藤井新, 溶接学会誌, **55**-8 (1986), 475-482.
- (13) Mortenson, M. E., *Geometric Modeling*, (1985), 113-124, John Wiley & Sons.