粒子強化型複合材の平面ひずみ下における 応答のモデル化とシミュレーション*

藤 本 岳 洋*¹, 富 田 佳 宏*²

Modeling and Simulation of Response of Particulate-Reinforced Composite Materials under a Plane Strain Condition

Takehiro FUJIMOTO and Yoshihiro TOMITA

In order to determine the characteristic feature in the deformation behavior of particulate-reinforced composite material, a constitutive equation that takes into account the characteristic length scale has been developed using the strain gradient theory. By means of the plane-strain finite element method with the proposed constitutive equation, a series of simulations of inhomogeneous deformation behavior of composite materials with different volume fractions of reinforcement, particle size and distribution pattern of reinforcement have been performed. As a result, it has been determined that the resistance of composite material to deformation is substantially increased with the refinement of the particle size under constant volume fraction of reinforcement. Furthermore, the regularization of the distribution pattern which increases the value of the maximum strain gradient in the matrix contributes toward improving the resistance to deformation.

Key Words: Composite Material, Finite Element Method, Size Effect, Characteristic Length, Strain Gradient Dependence, Particle Reinforcement

1. 緒 言

材料を構成する微視的な組織の特徴長さと同程度の領域に変形が集中すると特徴長さに依存した応答が顕在化し、その変形挙動並びに機械的性質が通常の材料のそれとは異なることが実験⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾により明らかにされている。このような材料の特徴長さに依存した変形挙動を検討するために、結晶塑性理論⁽⁵⁾を用いて直接モデル化した多結晶体の変形挙動のシミュレーション⁽⁶⁾⁻⁽⁸⁾、微視組織の特徴長さの影響を微分形⁽⁹⁾あるいは積分形⁽¹⁰⁾で導入した構成式を用いた変形の局所化挙動等のシミュレーション⁽¹¹⁾⁻⁽¹⁵⁾による研究があり、前者では、結晶粒の大きさ並びにすべり方位、硬化特性等、個々の結晶粒固有の特性の変形の局所化挙動に及ぼす影響、後者では、特徴長さの変形の局所化領域の大きさ、その発生パターン及び構造等に及ぼす影響が明らかにされている。

ところで、材料の機械的性質を改善するために開発され多用されている粒子強化型複合材をみると、変形の大部分が母材で吸収され、その変形は強化材の粒子径並びに配置によって変化する⁽¹⁶⁾。この粒子強化型複合材についても、通常の構成式を用いた変形挙動のシミュレーションでは、このような母材の変形の特徴を再現出来ないで、強化材含有率一定の下での強化材の粒子径や配置の変化が複合材の変形挙動並びに変形抵抗に及ぼす影響を検討することが出来ない。

本研究では、弾粘塑性体の構成式にひずみ勾配項を

導入することにより、構成式を間接的に特徴長さを考慮できる形式に一般化し、提案した構成式を導入した有限要素法による複合材の基本単位領域のシミュレーションに必要なひずみ勾配項の適切な評価法を検討する。ついで、異なる粒子径、粒子配置を有する粒子強化型複合材の基本単位領域を対象としたシミュレーションを通じて、複合材中の強化材の粒子径、体積含有率及び分布形態が複合材の変形挙動並びに変形抵抗に及ぼす影響を明らかにする。

2. 構 成 式

本研究は、粒子強化型複合材の変形挙動並びに変形抵抗をシミュレーションによって評価することを目的とする。粒子強化型複合材の変形挙動をみると、変形の大部分が母材において吸収され、強化粒子の存在によって、母材に大きなひずみ勾配が発生し、ひずみ速度も大きく変化することが予想される。このような変形状態における材料の応答を表現するための局所形の構成式として、弾粘塑性体の構成式⁽¹⁷⁾を用いる。このとき、接線係数法⁽¹⁸⁾を用いて構成式を Kirchhoff の応力速度 $\dot{S}_{ij}$ と変形速度テンソル $\dot{d}_{kl}$ の関係式として表すと次のようになる。

$$\dot{S}_{ij} = (L_{ijkl}^{mn} - F_{ijkl}) \dot{d}_{kl} - \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_i^{vp}}{1 + \xi} P_{ij} \quad (1)$$

ここで

$$L_{ijkl}^{mn} = \frac{H_s}{H_s + 3G} \left[D_{ijkl}^* + \frac{3G}{H_s} \left\{ \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu} + \frac{3G}{\sigma^2} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \right\} \right] - \frac{1}{h} \frac{\xi}{1 + \xi} P_{ij} P_{kl}$$

* 原稿受付 1998 年 4 月 20 日。

*¹ 正員、理化学研究所(〒351-0198 和光市広沢 2-1)。

*² 正員、神戸大学大学院自然科学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町)。

$$\begin{aligned}\xi &= \Delta t \frac{\partial \bar{\epsilon}^{vp}}{\partial \bar{\sigma}} \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{p}_u \mathbf{P}_u - \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}^{vp}}{\partial \bar{\sigma}} \right) \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}^{vp}}{\partial \bar{\sigma}} \right)^{-1} \\ F_{ijk} &= \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \delta_{ki} + \sigma_{ij} \delta_{ki} + \sigma_{ki} \delta_{ij} + \sigma_{ki} \delta_{ij}) \\ p_{ij} &= \frac{3\sigma_{ij}}{2\bar{\sigma}}, \quad P_{ij} = D_{ijk}^e p_{ij} = \frac{3G}{\bar{\sigma}} \sigma_{ij}, \quad H_s = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}_t^{vp}} \\ D_{ijk}^e &= 2G \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} \quad (2)\end{aligned}$$

上式中、 σ_{ij} 、 σ_{ij}^* は Cauchy の応力とその偏差成分、 $\bar{\sigma}$ は相当応力、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号、 D_{ijk}^e は弾性剛性テンソル、 ν はポアソン比、 G は横弾性係数、 $\bar{\epsilon}^{vp}$ 、 $\bar{\epsilon}_t^{vp}$ は Mises 形の相当粘塑性ひずみとその速度である。また、 $\bar{\epsilon}_t^{vp}$ 、 $\bar{\epsilon}_t^{vp}$ は時刻 t における相当粘塑性ひずみとその速度であり、 Δt は時間増分である。

構成式(1)は、任意の一点の応力をその点におけるひずみ及びひずみ速度によって表すことが出来るとする、局所形式となっている。このような構成式にひずみ勾配依存性項を導入することによって構成式を間接的に特徴長さを考慮できる形式に一般化し、強化材粒子間の微視的な領域に変形が局在化することにより顕在化した母材の変形挙動の特徴長さ依存性を現象論的に表現する。材料の応答のひずみ勾配依存性の導入については、これまでに幾つかの文献⁽⁹⁾⁽¹¹⁾⁽¹³⁾において詳しく述べられているので詳細は再記しないこととする。ここでは、下記に示すように、母材の流れ応力に対して相当粘塑性ひずみにラブラシアンを施した項を付加することにより、取り扱いが容易な形式でひずみ勾配項を導入する。

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \left(1 + \frac{\bar{\epsilon}^{vp}}{\epsilon_0} \right)^n \left(1 + \frac{\bar{\epsilon}^{vp}}{\epsilon_0} \right)^m - C \nabla^2 \bar{\epsilon}^{vp} \quad (3)$$

上式で、右辺第二項がひずみ勾配依存性を示す項で、係数 C は材料のひずみ勾配依存性の程度を示す定数であり、材料の特徴長さと関連してその大きさが決定される⁽⁹⁾。しかしながら、直接その値を実験により求める手法が確立されていないので、せん断帯の解析等においては、シミュレーションによって得られたせん断帯の幅が、実験的に観察されたせん断帯の幅に一致するように決められることもある⁽¹⁾⁽²⁾。本研究では、特定の材料を想定することなく、粒子強化型複合材の変形挙動に及ぼす強化材粒子の体積含有率、粒子径及び配置の影響について検討を加えることを目的としているので、パラメトリックにその値を与えることとする。一方、式(3)右辺第一項は、従来の局所形構成式に相当し、 σ_0 、 ϵ_0 、 $\bar{\epsilon}_0$ 、 n 、及び m は材料定数である。式(3)を式(2)に導入することによってひずみ勾配依存形式に一般化された弾粘塑性構成式が得られる。

3. 解析モデル

3.1 有限要素モデルによるひずみ勾配項の評価

複合材の変形挙動の数値シミュレーションを行うために、構成式(2)、(3)を仮想仕事の原理式⁽¹⁹⁾に導入し、弾粘塑性有限要素法を定式化する。構成式にはひずみ勾配項が含まれるため、要素間で高次の変位速度勾配の連続性が要請される。これに対し、筆者ら⁽¹⁴⁾は、変位速度と相当粘塑性ひずみ速度を独立変数とした混合形の変分原理を用い、要素間で要請される変位速度勾配の連続性の次数を減じた混合形有限要素法を提案した。この混合形有限要素法と変位形有限要素法を用いて、ひずみ勾配依存性構成式に従う材料の変形の局所化挙動のシミュレーションを行い、両結果を比較したところ、変位速度勾配の連続性に特別な注意を払っていない変位形有限要素法を用いても混合形有限要素法を用いて得た結果とほぼ同様の結果が得られることが確認できた。そのため、本研究では変位形有限要素法を用いてシミュレーションを行う。

次に本解析におけるひずみ勾配項の評価法について説明する。ここでは図1に示す Crossed triangle 要素分割を用い、(a)母材部並びに(b)強化材近傍の母材部におけるひずみ勾配項の評価法について説明する。(a)においては、任意の要素 e の節点 1, 2, 3 における相当粘塑性ひずみ $\bar{\epsilon}_1^{vp}$ 、 $\bar{\epsilon}_2^{vp}$ 、 $\bar{\epsilon}_3^{vp}$ の値を、その節点を含む要素の相当粘塑性ひずみの面積平均として求める。節点 N において求めた相当粘塑性ひずみの値 $\bar{\epsilon}_N^{vp}$ と三角形要素の形状関数 ϕ_N を用いて、要素 e の相当粘塑性ひずみの一次勾配 $\frac{\partial \bar{\epsilon}^{vp}}{\partial x_i}$ を次式により求める。

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}^{vp}}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi_3}{\partial x_i} \right\} \left\{ \begin{matrix} \bar{\epsilon}_1^{vp} \\ \bar{\epsilon}_2^{vp} \\ \bar{\epsilon}_3^{vp} \end{matrix} \right\} \quad (4)$$

$\bar{\epsilon}^{vp}$ の節点値と同様に $\frac{\partial \bar{\epsilon}^{vp}}{\partial x_i}$ の節点値も、その節点を含む全要素の相当粘塑性ひずみ勾配の面積平均として計算する。次に式(4)の節点値 $\bar{\epsilon}_N^{vp}$ を $\left(\frac{\partial \bar{\epsilon}^{vp}}{\partial x_i} \right)_N$ に置き換えることにより $\bar{\epsilon}^{vp}$ の二次勾配 $\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}^{vp}}{\partial x_i^2}$ を求め、 $\sum_i \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}^{vp}}{\partial x_i^2}$ によって各要素に対する $\nabla^2 \bar{\epsilon}^{vp}$ を得る。

次に図1(b)に示す異種材料界面近傍における相当粘塑性ひずみの勾配項の計算法について説明する。図中のハッチングされた部分は強化材領域を表しており、強化材の変形抵抗は母材に比べて十分大きく、塑性変形はほとんど生じない。そのため、図中の異種材界面上のひずみの節点値を、この節点を含む全要素の面積

平均の値とすることは適当ではない。そこで本研究では界面上の節点の相当粘塑性ひずみ及びその一次勾配の値 $\bar{\epsilon}_N^p$, $\left(\frac{\partial \bar{\epsilon}^p}{\partial x_i}\right)_N$ を、その節点の近傍にある母材領域の節点値から外挿した。例えば、図 1(b)の例では、 a_1 , a_2 と b_1 , b_2 及び c_1 , c_2 から点 A に対する値を外挿し、その平均値を A の節点値 $\bar{\epsilon}_A^p$, $\left(\frac{\partial \bar{\epsilon}^p}{\partial x_i}\right)_A$ とした後、式(4)に従い各要素の勾配項の計算を行った。これにより、限られた自由度で強化材近傍におけるひずみ勾配の評価が可能となる。なお、ここでは、規則的な要素分割に基づいたひずみ勾配項の評価法について説明したが、不規則な要素分割を用いた場合、若干の修正を必要とする。

Fig. 1 Estimation of strain gradient term in Eq.(3)

3.2 数値シミュレーションモデル

本研究では、図 2 に示すように強化材粒子の配置に周期性を仮定し、母材、強化材から成る基本単位領域を解析対象とする。母材の変形応答はひずみ勾配依存性構成式もしくは局所形構成式($C=0$)で表し、強化材の体積含有率、粒子径及び配置をパラメトリックに変化させ、複合材の変形挙動に及ぼすそれらの影響をシミュレーションによって検討する。変形の対称性を考慮して基本単位領域の 1/4 領域を四つの Crossed Triangle 要素からなる四角形要素で分割する。規則的な要素分割を用いて基本単位領域を表すため、無変形時の粒子形状は正方形であると仮定し、以下に述べる粒子径 d はその一辺の長さを表す。同じ基本単位領域が x , y 軸方向に連続して並んでいることを考慮し、領域側面の x 方向変位を一定とし、 x 方向の節点力の総和が零となる拘束条件を与え解析を行った。上端面の境界条件は Shear Free とし、平均ひずみ速度 $\dot{u}/L$ が $2.0 \times 10^{-3}/s$ となるように端面変位速度を与えた。異種材料界面において、強化材と母材の間に相対的なすべりは無いものと仮定した。本研究は特定の材料を対象としたものではないが、シミュレーションには母材、強化材について各々

Al 及び SiC とほぼ同じ材料定数を用い、その値を表 1 に示した。

Table 1 Material parameters

		Matrix	Reinforcement
E	Elasticity modulus [GPa]	69.0	450
ν	Poisson's ratio	0.333	0.170
σ_0	Yield stress [MPa]	275	-
n	Strain hardening exponent	0.250	-
m	Strain rate sensitivity exponent	0.024	-
ϵ_0	Reference strain	0.002	-
$\dot{\epsilon}_0$	Reference strain rate [/sec]	0.002	-

Fig. 2 Computational model of particle reinforced composite material

4. 数値シミュレーション結果及び考察

4.1 ひずみ勾配項の有限要素法による評価

3.1 節の有限要素を用いたひずみ勾配の評価は要素寸法に依存するため、本研究で対象とする複合材の変形挙動のシミュレーションにおいて、適切なひずみ勾配の評価ができるように要素寸法を決定する必要がある。一般的な粒子強化型複合材の粒子径が数 μm から数十 μm であることから、基本単位領域の寸法及び強化材粒子径を各々、 $2L=24\mu m$ 及び $d=12\mu m$ とした。本節ではひずみ勾配項の流れ応力に及ぼす影響を表す式(3)の C の値を、基準の要素分割 16×16 としたときの四角形要素の幅 ($l=L/16$) に相当する 1 と初期降伏応力 σ_y を用いて $C=360\sigma_y l^2$ ($C=0.05N$) とした。

このようにして定めた C を用いて、ひずみ勾配項の評価の精度を検討する。図 3 に、3 種類の要素分割、

Fig. 3 Representative strain distribution (left) and area with positive strain gradient term ($-\nabla^2 \bar{\epsilon}^p \geq 0.2 \sigma_{ys} / C$) (right, dark area) for different mesh division, $u/L=0.05$

16×16, 24×24及び32×32を用いたモデルに対して求めた相当粘塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^{vp}$ 及びひずみ勾配 $\nabla^2\bar{\epsilon}^{vp}$ の分布を示す。図4には、同図左の走査線 ξ に沿ったひずみ及びひずみ勾配を示す。 $u/L=0.05$ に対応した変形段階までは、いずれのモデルの計算結果もほぼ同様となっており、ひずみ勾配項 $\nabla^2\bar{\epsilon}^{vp}$ が要素の大きさに依存することなく評価できたことが確認できる。従って以降の計算では、特にことわりのない場合、要素寸法を $L/16$ として、平均ひずみが $u/L=0.05$ となるまでの変形過程をシミュレーションによって検討する。

Fig. 4 Comparison of the estimation of representative strain and strain gradient with different mesh division

4.2 強化材の体積含有率の影響

本節では強化粒子の体積含有率が異なる複合材の変形挙動のシミュレーションを行い、母材の流れ応力のひずみ勾配依存性が複合材の変形挙動に与える影響を検討する。強化材の粒子径を $12.0\mu\text{m}$ と固定し、強化材の体積含有率が6.25, 11.1, 25.0%の複合材を対象として解析を行った。それぞれの解析において、一つの四角形要素の形状、寸法が等しくなるように要素分割数を 32×32 , 24×24 , 16×16 とした。

図5に、体積含有率11.1及び25.0%の複合材の相当粘塑性ひずみ分布の推移を、図6に各体積含有率の複合材の無次元化平均応力 $\bar{\sigma}/\sigma_{ys}$ と平均ひずみ u/L の関係を示す。ここでは図2に示す基本単位領域の上端面上の節点力から計算した。図7には、母材がひずみ勾配依存性を示す複合材とそれを示さない複合材の平均応力(各々図中では $\sigma_{\text{dependent}}$ 及び $\sigma_{\text{independent}}$ とする)の差と平均ひずみの関係を示した。母材と強化材の剛性の差が著しいため、変形のほとんどが母材領域で吸収される。そのため、図5にみられるように、強化材の体積

Fig. 6 Average stress-strain relation for composite with different volume fraction of reinforcement particle V_f

Fig. 5 Representative strain distribution (left) and area with positive strain gradient term ($-\nabla^2\bar{\epsilon}^{vp} \geq 0.2\sigma_{ys}/C$) (right, dark area) for different volume fraction of reinforcement particle V_f

含有率が増加すると、母材が占める面積が減少し変形集中が著しくなる。これにより、図 7 にみられるように、母材の流れ応力のひずみ勾配依存性による変形抵抗の上昇は、体積含有率の増加に伴い顕著になる。

Fig. 7 Difference of average stress of composite model with strain gradient dependent and independent constitutive equation for each volume fraction of reinforcement particle V_f

4.3 強化材の粒子径の影響

本節では体積含有率一定の下で粒子径の異なる複合材の変形挙動のシミュレーションを行い、強化材粒子径が変形挙動に及ぼす影響を検討する。強化材の体積含有率を 25.0% と固定し、粒子径 d が 12.0, 14.0, 16.0, 18.0 及び 20.0 μm の複合材を対象とした。全てのモデルの要素分割を 16×16 としており、モデル毎に要素寸法が異なるが、このような要素寸法の差がひずみ勾配項の評価において問題とならないことを 4.1 節と同様に確認している。

図 8 は異なる粒子径の複合材の平均応力ひずみ関係を示しており、図 9 は、 $u/L=0.05$ における相当粘塑性ひずみ分布である。また、母材の流れ応力がひずみ勾

配依存性を有する複合材については、各要素の $\nabla^2 \bar{\epsilon}^{vp}$ の値を評価し、その最大値 $|\nabla^2 \bar{\epsilon}^{vp}|$ の推移を図 10 に示した。

母材の流れ応力がひずみ勾配依存性を示さない複合材の変形では、相当粘塑性ひずみの分布は相似となり、粒子径の違いが複合材の応力ひずみ曲線に影響しない。一方、母材の流れ応力がひずみ勾配依存性を示す複合材では、粒子径 d が小さいものほど変形抵抗が増大している。図 9 のひずみ勾配項の分布において、母材のひずみ勾配依存性により流れ応力が降伏応力の 20% 以上増加した領域、 $-\nabla^2 \bar{\epsilon}^{vp} \geq 0.2 \sigma_{ys} / C$ を示す黒色メッシュの部分の面積は、強化材の粒子径の減少に伴って増大している。また、図 10 は、粒子径が小さい複合材ほど、ひずみ勾配項 $|\nabla^2 \bar{\epsilon}^{vp}|$ の最大値が大きくなることを示

Fig. 8 Average stress-strain relation for composite with different reinforcement particle size

Fig. 9 Representative strain distribution (left) and area with positive strain gradient term ($-\nabla^2 \bar{\epsilon}^{vp} \geq 0.2 \sigma_{ys} / C$) (right, dark area) for different particle size, $u/L=0.05$

Fig. 10 Maximum strain gradient versus average strain in composite materials with different reinforcement particle size

している。このように粒子径の小さい複合材では、勾配項の値の増加とそれによる流れ応力が大きく増加している領域の面積の増大がみられ、それらが変形抵抗を著しく増大させていることが確認された。これまでに、強化材の体積含有率が一定の複合材の場合、強化材の平均粒子径が小さい複合材の方が変形抵抗が大きくなることが引張実験により示されている⁽¹⁶⁾。母材にひずみ勾配依存性を有するモデルは、このような複合材の変形特性の粒子径依存性を再現し得るものとなっている。

4.4 強化材の配置の影響

粒子強化型複合材の強化粒子の配置を変化させた場合、それが複合材の変形特性に及ぼす影響を検討する。配置には多くの自由度があるが、ここでは、図 11 に示すように強化材粒子が格子状に配置されている場合(a)と、(a)より配置の規則性を緩めた千鳥状に配置されている場合(b)の二つの配置パターンについてシミュレーションを行う。それぞれの要素分割は、 16×16 及び 32×16 であり、要素の寸法、形状は等しい。(b)のシミュレーションの対象となる領域の面積は(a)の面積の2倍であり、いずれも強化材の体積含有率は25.0%、強化材粒子径は $12.0 \mu\text{m}$ である。

Fig. 11 Different pattern of reinforcement particles location in composite material

図 12 に2つの強化材配置パターンの複合材の平均応力ひずみ関係を、図 13 に相当粘塑性ひずみ分布を示す。単位領域内部の変形進行をみると、高ひずみ域は異種材界面近傍から生じ、ついでこのひずみ域が結合した帯状の変形域が形成される。この変形挙動は強化粒子の配置に強く依存し、(b)の高ひずみ域の幅は、(a)より大きくなっている。(a)では、より狭い領域にひずみが集中するため、ひずみ勾配依存性により流れ応力が降伏応力の20%以上増加した領域の全体の面積に占める割合が高く、ひずみ勾配依存性による変形抵抗の増大は、(b)より大きくなっている。

Fig. 12 Average stress-strain relation for different pattern of reinforcement particle

Fig. 13 Representative strain distribution (left) and area with positive strain gradient term ($-\nabla^2 \epsilon^{\nu p} \geq 0.2 \sigma_{ys} / C$) (right, dark area) for different pattern of reinforcement particle, $u/L=0.05$

5. 結 言

本研究では、母材の塑性変形挙動の特徴長さ依存性を流れ応力のひずみ勾配依存性により表し、粒子強化材の含有率、粒子径及び配置が粒子強化型複合材の変形抵抗及び変形挙動に及ぼす影響を検討し、以下の結論を得た。

複合材内部の強化粒子間隔の減少により母材には大

きなひずみ勾配が生じ、その結果、強化材の体積含有率が等しい場合、強化材粒子径を小さくすると複合材の変形抵抗が増大することを数値シミュレーションにより再現できた。また、強化材粒子の配置が母材に発生するひずみ勾配項の大きさに影響を与え、その結果、複合材としての変形抵抗が変化することも示すことができた。従って、粒子寸法を小さくし、母材に発生するひずみ勾配項が大きくなるように粒子を配置することにより、複合材の変形抵抗を増大させることができる。

以上、特定の複合材を対象としたシミュレーション結果ではないが、実験によって確認されている粒子強化複合材の力学的な特徴を数値シミュレーションにて再現し、その結果に対して力学的な説明を加えることができた。したがって、本研究で得られた結果は、今後の粒子強化複合材の設計に生かせるものと考えている。

本研究の遂行にあたり協力頂いた神戸大学大学院生、八杉哲男氏（現 三菱重工）に謝意を表する。

本研究の一部は科学研究費の援助によるものであることを付記し感謝する。

文献

- (1) A.E.Bayoumi, R.B.Joshi and H.M.Zbib, Trans. ASME, J. Appl. Mech, 44, (1991), 20-26.
- (2) G.L.Panger, J.L.Ding, H.M.Zbib and E.C.Aifantis, Script. Metall. Mater. 25, (1991), 2103-2108.
- (3) A.Marchand and J.Duffy, J. Mech. Phys. Solids 36, (1988), 251-283.
- (4) N.A.Fleck, G.M.Muller, M.F.Ashby and J.W.Hutchinson, Acta Metall. Mater., Vol.42, No.2, (1994), 475-487.
- (5) R.J.Asaro, Trans. ASME, J. Appl. Mech, 59, (1983), 921-934.
- (6) H.Kitagawa and H.Matsushita, Int. J. Solids Structures 23, (1987), 351-368.
- (7) S.V.Harren and R.J.Asaro, J. Mech. Phys. Solids 37, (1989), 191-232.
- (8) Y.Tomita, K.Mimura and T.Sasayama, MECAMAT'91, Large plastic deformation, Balkema, Rotterdam, (1993), 177-183.
- (9) E.C.Aifantis, Int.J.Plasticity, 3, (1987), 211-247.
- (10) Z.P.Bazant, Int.J.Num.Methods Eng. 26, (1998) 1805-1823.
- (11) H.M.Zbib, AMD-Vol.183/MD-Vol.50, Theory and Applications, ASME, No.19, (1994), 19-33.
- (12) H.T.Zhu, H.M.Zbib and E.C.Aifantis, AMD-Vol.202/MD-Vol.61, Micro. and Constitutive Modelling of Composite Mat., ASME, No.11, (1995), 103-115.
- (13) 富田, 中尾, 機論, 58, 549, A, (1992), 137-142.
- (14) Y.Tomita and T.Fujimoto, Material Science Research International, 1, No.4, (1995), 254-259.
- (15) Z.P.Bazant, J. Appl. Mech, Trans. ASME, 55, (1988), 287-293.
- (16) 牛込・山本・福田, 鉄と鋼, Vol.75, (1989), 1549-1554.
- (17) 富田・進藤・朝田・後藤, 機論, 54, 504, A, (1988), 1124-1130.
- (18) D.Peirce, C.F.Shih and A.Needleman., Comput. Struct., 18, (1984), 875-887.
- (19) 富田, 数値弾塑性力学, (1990), 160-201, 養賢堂