均質化法を用いたマクロき裂とマイクロき裂群間の
弾性相互干渉効果の検討*中 谷 彰 宏^{*1}, 北 川 浩^{*1}, 西 山 英 俊^{*2}Estimation of Elastic Interaction Effects
between Macrocrack-Microcrack Array by
Homogenization Method

Akihiro NAKATANI, Hiroshi KITAGAWA and Hidetoshi NISHIYAMA

Two-dimensional macrocrack-microcrack array elastic interactions are studied by using homogenization method. The overall elastic moduli of the cracked material are estimated by solving the microscopic problem on the unit cell and they are used in the macroscopic problem. Macrocrack is regarded as a crack in infinite elastic solid, and microcrack array is regarded as locally periodic micro-structure with crack, and the periodic and parallel crack array is configured in the macrocrack tip region. It is found that the effects of interaction by changing of the microcrack parameters that are crack length, position, orientation and loading mode, significantly alter stress and stress intensity factor, then effects of amplification and shielding are observed. Especially by microcrack array rotation, effect of shielding that is toughening by microcracking is caused at an angle, under mode I, mode II or combined mode.

Key Words: Computational Mechanics, Micromechanics, Finite Element Method, Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, Homogenization Method, Overall Elastic Modulus, Shielding and Amplification Effect

1. はじめに

セラミックスをはじめとするぜい性材料における破壊の様式の一つに材料内部に存在する微小き裂と深く関わって起こるものがある。そのような場合の破壊の条件は、マクロき裂とその先端近傍に分布するマイクロき裂群との間の相互干渉によって大きく影響を受けていると考えられる。従来の研究の多くは、方法論的に、マイクロき裂を離散的に取り扱う方法⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾と、マイクロき裂群の存在を損傷や構成関係の変化として捉える方法⁽⁵⁾⁽⁶⁾とに大別される。前者は厳密な解を得られる反面、扱えるマイクロき裂の数に限界があり、後者はき裂先端場の詳細については知ることが難しいという問題を有している。本研究では均質化法⁽⁷⁾を用いることによって、両者の中間的な評価方法の可能性を探る。

均質化法は材料内の局所的マイクロ構造が周期的に存在すると仮定した連続体モデルについて全体構造を解析する手法である。複合材料に代表されるマイクロ構造を有する材料の力学特性評価などに広く用いられており⁽⁸⁾、最近では、非線形問題に対しても定式化がなされ⁽⁹⁾、応用が期待されている。本研究では、き裂を有するユニットセルを用いた均質化弾性定数の評価、および、これまで行われているき裂干渉解析との比較により、均質化法の適用に対する有効性を検討した後、無

限体中における半無限き裂としてモデル化されたマクロき裂と、周期的に無数に並ぶマイクロき裂群との干渉効果、特にマクロき裂先端の遮蔽効果、増幅効果について検討する。

2. 解析手法

2.1 均質化法⁽⁷⁾ 図1に示すように構造物の任意点近傍で局所的に周期性を持つマイクロ構造が存在していると仮定し、マイクロ構造の実際の大きさを表わすパラメータ η とマイクロ構造の座標 y を導入する。構造物全体を表現する座標 x とマイクロ座標 y の間には次の関係が成り立つ。

$$y = \frac{x}{\eta} \dots\dots\dots (1)$$

Fig.1 Material with locally periodic microstructure

ここでマイクロ構造に依存する変位 $u^\eta(x)$ が、次式のようにな近展開できると仮定する。

$$u_i^\eta(x) = u_i^{(0)}(x, y) + \eta u_i^{(1)}(x, y) + \dots\dots\dots (2)$$

図1に示されるような物体内で物体力 f と境界 Γ_t で表面力 t を受け、マイクロ構造内の空孔内部では荷重

* 原稿受付 1998 年 4 月 8 日。

*¹ 正員、大阪大学大学院工学研究科 (☎ 565-0871 吹田市山田丘 2-1)。*² ソニー(株) (☎ 985-0842 多賀城市桜木 3-4-1)。

が作用しない変形問題を仮想仕事の原理を用いて表わすと次のように書くことができる。

$$\int_{\Omega^n} E_{ijkl}^n \epsilon_{kl}(\mathbf{u}^n) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega^n} f_i^n v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma \quad \cdots (3)$$

ここで E^n は弾性定数テンソル、 $\mathbf{v}$ は仮想変位、 ϵ は次のような微小ひずみテンソルである。

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

式 (3) に、式 (1) の漸近展開式を代入し、 $\eta \rightarrow 0$ の極限を考えると $u_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は $\mathbf{x}$ のみに依存し、 $u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、式 (6) のように表わされる。

$$u_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_i^{(0)}(\mathbf{x}) \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

$$u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\chi_i^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \epsilon_{kl}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x})) \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

ここで χ^{kl} は、次に示された方程式の解であり、特性変位とよばれる規格化されたミクロ構造の変位を表わす。

$$\int_Y E_{ijpq} e_{pq}(\chi^{kl}) e_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{y})) dY = \int_Y E_{ijkl} e_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{y})) dY \quad \cdots \cdots (7)$$

この式で e は次に示すミクロ座標 $\mathbf{y}$ に関するひずみテンソルである。

$$e_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

これらを式 (3) の仮想仕事の原理式に代入すると

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} E_{ijkl}^H(\mathbf{x}) \epsilon_{kl}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x})) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} b_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\Gamma \quad \cdots \cdots (9) \end{aligned}$$

となる。 $E_{ijkl}^H(\mathbf{x})$ は、均質化された弾性定数テンソル、 $b_i(\mathbf{x})$ は、均質化された物体力で、それぞれ次のように表される。

$$E_{ijkl}^H(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y (E_{ijkl} - E_{ijpq} e_{pq}(\chi^{kl})) dY \quad (10)$$

$$b_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

ミクロ構造ユニットセル内の応力分布は、特性変位 χ^{kl} を用いて次式で与えられる。

$$\sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (E_{ijkl} - E_{ijpq} e_{pq}(\chi^{kl})) \epsilon_{kl}(\mathbf{u}^{(0)}) \quad (12)$$

2.2 直交異方弾性体中のき裂先端応力分布

き裂を有するミクロ構造ユニットセルに対して、式 (10) から得られる均質化弾性定数は直交異方性を示す。一般には、式 (9) を満たすマクロ場の解 $\mathbf{u}^{(0)}$ を得るためのマクロ場の問題は数値的に解かれるが、本研究では、

マクロ場は均質であると仮定し、解析解を用いることにする。

直交異方弾性体中のモード I、モード II 変形様式に対する応力分布を与える解析解は、各モードにおける応力拡大係数を K_I^0, K_{II}^0 とし、き裂先端を原点とする極座標系を (r, θ) とすると、次のように表される⁽¹⁰⁾。

・モード I 変形様式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{K_I^0}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (\mu_2 f(\mu_2) - \mu_1 f(\mu_1)) \right] \\ \sigma_{22} &= \frac{K_I^0}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} (\mu_1 f(\mu_2) - \mu_2 f(\mu_1)) \right] \\ \sigma_{12} &= \frac{K_I^0}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (f(\mu_1) - f(\mu_2)) \right] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

・モード II 変形様式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{K_{II}^0}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} (\mu_2^2 f(\mu_2) - \mu_1^2 f(\mu_1)) \right] \\ \sigma_{22} &= \frac{K_{II}^0}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} (f(\mu_2) - f(\mu_1)) \right] \\ \sigma_{12} &= \frac{K_{II}^0}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} (\mu_1 f(\mu_1) - \mu_2 f(\mu_2)) \right] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここで $f(\mu_i)$ は、次式で定義される。

$$f(\mu_i) = \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_i \sin \theta}} \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

μ_i は、次に示すコンプライアンステンソル C_{ijkl} を係数に持つ特性方程式の共役でない解である。

$$\begin{aligned} & C_{1111} \mu^4 - 2C_{1112} \mu^3 + (2C_{1122} + C_{1212}) \mu^2 \\ & - 2C_{2212} \mu + C_{2222} = 0 \quad \cdots (16) \end{aligned}$$

具体的な解析は以下の手順で行う。まず、ミクロき裂を持つミクロ構造についてユニットセル上の問題、すなわち、式 (7) を有限要素法を用いて数値的に解き、式 (10) から得られた均質化弾性定数を用いて、マクロ問題である直交異方弾性体中のき裂先端応力分布を式 (13)、(14) を用いて解析的に評価し、応力ひずみ関係を用いてひずみを求めた後、式 (12) からミクロ構造も考慮した応力分布を得る。このようにして得られたき裂先端近傍の応力分布から応力 (外挿) 法⁽¹¹⁾により応力拡大係数を評価する。

3. 解析モデル

材料定数として縦弾性係数 $E = 206 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ の等方弾性体を考え、平面ひずみ状態を仮定することにより 2 次元問題として扱う。まず、均質化弾性定数の評価値と他の平均化手法による結果との比較検討するため、図 2 に示すように、ミクロ構造を代表するユニットセル内に円孔を有する場合についての解析を行なう。次に、き裂の干渉モデルについて、マクロ問題においては半無限き裂先端場を考え、ミクロ

問題としては図3に示すユニットセル内に直線き裂を持つ場合を考える。一方、マクロ問題では、まず、図4に示すように引張り応力 σ を負荷したマイクロき裂群のき裂先端の応力拡大係数を求める問題を考え、次に、半無限き裂先端場を考え、図5(a)のように、マイクロき裂がマクロき裂と同一方向を持つ場合について検討した後、図5(b)に示すように、マイクロき裂長さ、方向、負荷モードなどを様々に変化させて解析を行なう。

(a) Model (b) Mesh
Fig.2 Unit cell with circle void

(a) Model (b) Mesh
Fig.3 Unit cell with microcrack

Fig.4 Crack array

(a) Parallel (b) Rotated
Fig.5 Model of macrocrack and microcrack array interaction

(a) Young's modulus

(b) Poisson's ratio

(c) Shear modulus

Fig.6 Relation between homogenized elastic properties and void fraction

4. 解析結果

4.1 均質化弾性定数の評価 まず、式(10)により計算される均質化弾性定数について、従来の様々な平均化弾性定数を求める方法による結果と比較するために、図2に示すユニットセル内に円孔を持つ場合に対して、円孔のボイド率(πr^2)を変化させて解析を行なう。得られた均質化された弾性特性について、self-consistent法および dilute distribution(macrostress, macrostrain prescribed)法⁽⁵⁾による全体平均弾性特性の解と比較を行なった結果を図6(a), (b), (c)に示す。均質化法による結果は、ボイド率が小さいときは、dilute distribution法の macrostress, macrostrain prescribed, self-consistent法の解とよく一致するが、ボイド率が大きい場合、均質化法による結果と他の方法による結果の差は増大する。また、dilute distribution法により得られる全体平均弾性係数は上下限解を示すとされるが、図6(a), (c)から、均質化弾性定数はその dilute distribution法の macrostress prescribed と macrostrain prescribed のほぼ中間に位置していることがわかる。

次に、図3に示すユニットセル内のマイクロき裂の長さ $2a$ の変化に対して得られた解析結果を図7示す。

Fig.7 Relation between homogenized modulus and crack length

図7は、均質化弾性定数から得られるマイクロき裂に平行方向、垂直方向に対する縦弾性係数 $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ 、ポアソン比 $\bar{\nu}_{12}, \bar{\nu}_{21}$ 、横弾性係数 $\bar{\mu}$ を、それぞれき裂のない場合の E, ν, μ で無次元化して表した結果である。これらの結果から、マイクロき裂の場合は、 $\bar{E}_1/E$ と $\bar{\nu}_{12}/\nu$ の値は等しく、それぞれき裂長さに無関係であり、また、 $\bar{E}_2/E$ と $\bar{\nu}_{21}/\nu$ の値も等しく、これらと $\bar{\mu}/\mu$ は、それぞれマイクロき裂長さの増加とともに減少し、0に近づく。

傾向があることがわかる。また、き裂長さに関係なく $\bar{E}_2/E = \nu_{21}/\nu$ が得られるのは、2次元直交異方弾性定数マトリックスの対称性から得られる $\nu_{21}/E_2 = \nu_{12}/E_1$ が満たされているためである。

4.2 ミクロき裂群の干渉効果 図4に示すように x_2 方向に引張り応力 σ を負荷したマイクロき裂群について得られたマイクロき裂先端の応力拡大係数を図8に示す。ここで、無限体中で引張りを受ける長さ $2a$ (a は η を1として無次元化した値) の単体のき裂に対して得られる応力拡大係数 $K_I^0 = \sigma\sqrt{\pi a}$ を用いて無次元化して示している。

Fig.8 Stress intensity factor by microcrack array interaction

図8では、比較のために、選点法⁽¹¹⁾による結果を破線で示している。均質化法に基づく結果は、選点法による解よりもやや高めに評価されているものの、よい一致を示している。このような二重周期配列のき裂群に対する応力拡大係数評価に対しては、精度では解析的方法⁽¹²⁾が優れていると考えられるが、均質化法を用いることによっても簡便にある程度で評価が可能であることがわかる。

4.3 マクロき裂とマイクロき裂群との干渉効果
4.3.1 同一の方向の場合 図5(a)に示すように、長さ $2a$ のマイクロき裂がマクロき裂と同一方向を持ち、そのうちの一行が同一線上に並ぶ場合の干渉効果について解析する。図5(a)において、マクロき裂先端と最も近いユニットセルの位置関係を表すパラメータ h と δ は、 η を1として無次元化している。 $h = 0.0, 0.1, 0.2$ について、マクロき裂先端(原点)および、マイクロき裂先端(A点, B点)近傍の応力場から評価される応力拡大係数 $K_I(O)$, $K_I(A)$, $K_I(B)$ を式(13)における K_I^0 により無次元化してそれぞれ図9(a), (b), (c)に示している。ここで、 α, β は、それぞれ、A点, B点の x_1 座標

(a) At macrocrack tip (O)

(b) At microcrack tip (A)

(c) At microcrack tip (B)

Fig.9 Stress intensity factor at cracktip ($h = 0.0$)

(a) At macrocrack tip (O)

(b) At microcrack tip (A)

(c) At microcrack tip (B)

Fig.10 Stress intensity factor vs α/β ($\delta = 0.0$)

(a) At macrocrack tip (O)

(b) At microcrack tip (A)

(c) At microcrack tip (B)

Fig.11 Stress intensity factor vs h ($\delta = 0.0$)

を意味する。これらの結果から、一般に、 $K_I(O) > K_I(A) > K_I(B)$ の関係があることがわかる。また、図 5(a) において $h = 0.0$ のとき、 $x_1 = \alpha, \beta$ 部に先端をおく単一のマイクロき裂が存在する場合の解析解⁽¹⁾⁽²⁾を図中に破線で示している。これらの結果の比較からある程度 α/β が 1 に近い、または、 δ が大きい場合には、本解析で得られた結果は、マクロき裂とき裂先端近傍の単一のマイクロき裂との相互作用に対する解に近づくことがわかる。一方、 α/β が小さくなると、特に $K_I(O)$, $K_I(A)$ については、本解析結果により得られた応力拡大係数の値は単一のマイクロき裂との相互作用に対する解に比べて顕著に大きくなり、また、同じ α/β の値に

においても、 δ が小さいほど、応力拡大係数が増加することがわかる。 δ が小さいとマイクロき裂間の間隔が狭くなり、マイクロき裂どうしの相互作用が大きくなる。つまり、マイクロき裂どうしの相互作用が大きい程、マイクロき裂群とマクロき裂との相互作用も大きいことがわかる。 $K_I(B)$ に対しても同様な傾向が見られる。図 10(a), (b), (c) および、図 11(a), (b), (c) は、図 5(a) に示すマクロき裂線上に平行なマイクロき裂群について $\delta = 0.0$ として、 h を変化させた場合に得られた $K_I(O)$, $K_I(A)$ の解析結果を示す。この結果から、 $K_I(O)$, $K_I(A)$ は、 $0 < h < 0.1$ の位置で最大値を示し、 $h > 0.09$ における $K_I(O)$ は、 $\alpha/\beta \simeq 0.1$ で最大値を示すという結果が得

Fig.12 $k_1 = 1$ contour under mode I Fig.13 $k_2 = 1$ contour under mode II

Fig.14 Contour under combinational mode

られた。また、 $K_I(B)$ については、 h の値に対する依存性は見られないが、 α/β が、小さくなると、 $K_I(B)$ 大きくなる。このことから、B点の応力拡大係数については、マクロき裂との相互干渉の影響は小さく、むしろマイクロき裂どうしの相互干渉による影響が大きく現われていると考えられる。

4.3.2 回転した方向の場合 図5(b)のように、マクロき裂とマイクロき裂群が角度 ϕ をなす場合に対して、マイクロき裂長さ、マイクロき裂群の方向、負荷モードを変化させることによる影響を解析する。

図12(a), 13(a)は、それぞれモードI、モードIIの単独モードのもとでマクロき裂先端の遮蔽-増幅の遷移境界を示す $k_1 = K_I/K_I^0 = 1, k_2 = K_{II}/K_{II}^0 = 1$ をマイクロき裂長さ a/d ($d = 0.5$ で一定)を変化させて得られた結果を示している。また、図14(a), (b)は、混合モード($K_{II}^0/K_I^0 = 1.0$)のもとでの $k_1 = K_I/K_I^0 = 1, k_2 = K_{II}/K_{II}^0 = 1$ をマイクロき裂長さを変化させて得られた結果である。

図12(b), 13(b)は、 $a/d = 0.5$ の場合について、モードI、モードIIの単独モード変形のもとでのマクロき裂先端に単一のマイクロき裂が存在する場合における $k_1 = 1, k_2 = 1$ の解⁽³⁾⁽⁴⁾と、均質化法を用いた本解析から得られた結果を比較して示している。

これらの結果より、マクロき裂先端において遮蔽および増幅効果を示す領域が存在することが確認できる。 $k = 1$ の境界線はマイクロき裂長さ a/d には、ほとんど影響を受けず、また、 $\phi = \theta$ の直線の近傍では、増幅効果が現れていることがわかる。また、図12(b), 13(b)で、単一のマイクロき裂が存在する場合と比較すると両者は $\theta < 90(\text{deg})$ において、類似した傾向が見られる。しかしながら、 $\theta > 90(\text{deg})$ では、両者は全く異なった傾向を示していることがわかる。これは、 θ の増加に伴って、注目して回転させているマイクロき裂によるマクロき裂への影響が小さくなり、マイクロ構造の周期性より、注目しているユニットセルに隣接するユニットセルのマイクロき裂がマクロき裂に近づき、影響を与えるために起こる現象であると考えられる。このような現象は、マイクロき裂の群としての効果だけでなく、均質化法によるモデル化の際の仮定に起因する近似誤差などの効果も含まれている可能性があり、今後、この方法の適用範囲についてより詳細な検討が必要であると考えられる。

5. おわりに

本論文では、均質化法における均質化弾性定数の解析と、マイクロき裂間の相互作用、および、マクロき裂とマイクロき裂群との干渉効果について検討を行った結果以下の結論を得た。

- (1) ミクロ構造として円孔を考えた場合の均質化弾性定数の評価では、干渉効果が大きい場合に他の解析的な平均化手法では、方法間で結果の差が大きくなり精度よい解を得ることが困難な場合に対しても、均質化法を用いることにより、簡便で適切な解を得ることができる可能性を示した。
- (2) ミクロき裂群どうしの干渉解析では、選点法による解との比較から局所的な応力拡大係数が均質化法を用いることによって簡便、かつ、精度良く評価できることを示した。
- (3) マクロき裂とマイクロき裂群との干渉解析では、マイクロき裂どうしの相互作用が小さい場合に、均質化法により得られた結果は、マクロき裂と単一のマイクロき裂との相互作用に対する従来の解と良く一致することが確認できた。
- (4) ミクロき裂どうしの相互作用が大きい場合には、マイクロき裂群とマクロき裂との相互作用が単一のマイクロき裂の場合に比べて一般に大きくなり、マイクロき裂の集まりとしての効果が、単一のものとは異なっていることが確認できた。

結論の(4)に関連して、マイクロき裂の集まりとマクロき裂との干渉効果以外に、均質化法によるモデル化の際に導入される仮定に起因する誤差も含んでいる可能性が無視できないと考えられる。ここでは検討できなかったが、他の手法による結果との詳細な比較検討を通じて、適用範囲などを明らかにすることが今後の課題である。さらに、今後、ここで示した方法の発展によってマイクロき裂の合体などを考慮したき裂進展問題などへの応用が期待できると考えられる。

文 献

- (1) Rubinstein, A., *Int. J. Frac.*, **27**(1985), 113.
- (2) Rose, L.R.F., *J. Am. Ceram. Soc.*, **69**(1986), 212.
- (3) Wang, X.-M., Gao, S., & Chen, Y.-H., *Int. J. Solids. Structures*, **33**(1996), 4051.
- (4) Gong, S.X. & Meguid, S.A., *Int. J. Mech. Sci.*, **34**(1992), 993.
- (5) Nemat-Nasser, S. & Hori, M., *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*, (1993), 95-105, North-Holland.
- (6) Hutchinson, J.W., *Acta Metall.*, **35**(1987), 1605.
- (7) Guedes, J. & Kikuchi, N., *Com. Meth. Appl. Mech. Engg.*, **83**(1990), 143.
- (8) たとえば、高野・座古・大西, 材料, **45**(1996), 163, 野口・清水, 第41回材研連前刷集(1997), 34など.
- (9) 寺田・弓削・菊池, 機論A, **61**-590(1995), 2199-2205.
- (10) Sih, G.C., Paris, G.P.C., & Irwin, G.R., *Int. J. Frac. Mech.*, **3**(1965), 189-203.
- (11) 石田 誠, き裂の弾性解析と応力拡大係数, (1976), 116-131, 199-200, 培風館.
- (12) たとえば、井川秀信・石田 誠, 機構論, 96-10B(1996), 25-26.