DRM を用いた非定常連成熱弾性問題の境界要素解析*

田中正隆^{*1}, 松本敏郎^{*1}
小口智^{*2}, 王文青^{*3}Boundary Element Analysis of Unsteady Coupled Thermoelastic Problems
Using DRMMasataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO,
Satoshi OGUCHI and Wenqing WANG

The dual reciprocity method has been successfully applied to boundary element analysis of the field problems to which the fundamental solutions are not available or difficult to implement. This paper is concerned with application of the dual reciprocity method to boundary element analysis of quasi-static coupled thermoelasticity. Time derivatives are approximated by a finite difference scheme, and the volume integrals in the boundary integral formulation are evaluated by means of the dual reciprocity method as the boundary-integral form with or without integral points in the domain. A new computer code is developed and applied to a couple of sample problems, whereby the usefulness and the computational aspects of the proposed solution procedure are demonstrated. Although emphasis is placed on the 2-D problems in this study, the present BEM method can be easily extended to 3-D problems.

Key Words: Computational Mechanics, Boundary Element Method, Thermal Stress, Numerical Analysis, Boundary Integral Equation, Dual Reciprocity Method, Coupled Thermoelasticity

1. 緒 言

構造要素に熱負荷が加わるときの挙動を正確に把握し、熱変形や熱応力を効率良く計算できる解析手法を確立することは、高温の作業条件下での構造物の特性を理解するうえで極めて重要である。このため変位場と温度場が連成する非定常連成熱弾性問題に対し、有限要素法や境界要素法などさまざまな数値解析法が提案されている^{(1)~(5)}。しかしながら、変位場と温度場とが連成する連成熱弾性問題に対する境界要素法による有効な数値解析法はまだ発展途上にあり、連成項の処理を正確に効率良く行う解析法の開発がこの分野での重要な研究課題の一つとなっている。

既存の境界要素解析法のほとんどにおいて、変位場と温度場の支配微分方程式の連成項を除いた部分の基本解を用いて積分方程式の定式化を行っている。そのため境界積分方程式に連成項に由来する領域積分が現

れ^{(6),(7)}、この取り扱いで困難に直面する。領域積分項には未知関数が含まれるために、境界領域要素法⁽⁸⁾と呼ばれる数値解法を適用すれば、境界表面だけでなく領域内部も離散化する必要が生じる。このことによって境界要素法本来の特徴が失われ、計算時間が大幅に増大してしまう。この領域積分を効率良く評価するために、多重相反法⁽⁹⁾や二重相反法⁽¹⁰⁾などのような手法が提案されてきたが、連成熱弾性問題への適用は著者の知る限りまだ無い。

そこで本研究ではこの領域積分を効率良く取り扱うために、時間の1階微分しか現れない準静的な連成熱弾性問題への二重相反法 (Dual Reciprocity Method=DRM) の適用について考察する。二重相反法は時間依存で非線形な問題において良い結果の得られることが知られている^{(11)~(14)}。DRMでは非連成の基本解を用いて定式化した後、ある関数を導入して近似的に領域積分項を境界積分項に変換する。これにより、積分方程式のすべての項が境界積分のみで取り扱うことが可能となる。ここでは、温度場の支配方程式の非定常項については時間微分を前進差分近似する解析法を用いる。DRMに基づく境界積分方程式の詳細を2次元問題について示

* 原稿受付 1998年6月10日。

^{*1} 正員、信州大学工学部(☎380-8553 長野市若里500)。^{*2} 学生員、信州大学大学院。^{*3} 中国同济大学。

E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp

し、それに基づく新しい解析コードを開発する。そして、これを用いて解析解がわかっている例題解析を行い、高精度な結果を得るための要素分割、DRMを用いるときの領域内部での評価点の配置の解精度への影響等について考察する。

2. DRMを用いた非定常連成熱弾性問題の定式化

2.1 支配微分方程式 物体力と内部発熱を無視し、温度変化が基準状態の絶対温度に比し小さいと仮定したとき、準静的な非定常連成熱弾性問題は次式の微分方程式で支配される⁽¹⁵⁾。

$$\mu u_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu) u_{j,ij}(\mathbf{x}, t) - \kappa \theta_{,i}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1)$$

$$\theta_{,ii}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{k_c} \dot{\theta}(\mathbf{x}, t) - \eta \dot{u}_{i,i}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2)$$

ただし、

$$\kappa = (3\lambda + 2\mu) \alpha_\epsilon, \quad k_c = \frac{k}{\rho c_\epsilon}, \quad \eta = \frac{\kappa}{k} \theta_0 \quad (3)$$

また、 $u_i(\mathbf{x}, t)$ は領域 Ω 内の時刻 t における物体中のある点 $\mathbf{x}$ での i 方向の変位を表し、 $\theta(\mathbf{x}, t)$ は温度を表す。上付きドット $(\cdot)$ は時間微分を表し、コンマ $(,)$ に続く添え字は空間微分を表す。 ρ は密度、 α_ϵ は線形熱膨張率、 θ_0 は基準温度、 c_ϵ は比熱、 k は熱伝導率を表す。また λ, μ は Lamé の定数であり、 σ_{ij} を Cauchy の応力テンソル、 ϵ_{ij} をひずみテンソルとしたとき、次式を仮定している。

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - \kappa (\theta - \theta_0) \quad (4)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5)$$

2.2 非連成の基本解を用いた定式化 変位場については、式(1)で第1項、第2項を考慮した基本解を考える⁽⁷⁾。すなわち Navier の式に対応する微分作用素の基本解(静弾性問題の基本解)である。同様に、温度場については式(2)で第1項を考慮した基本解、すなわち Laplace 方程式に対応する微分作用素の基本解(ポテンシャル問題の基本解)を考える。2次元問題について、それぞれを式で示すと次のようになる。

$$u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \delta_{ij} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (6)$$

$$\theta^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (7)$$

支配微分方程式(1),(2)の両辺にそれぞれ基本解(6),(7)をかけ、領域 Ω について積分して得られる恒等式に対して部分積分及び Dirac のデルタ関数を用いた式変形をし、ソース点 $\mathbf{y}$ の境界上への極限操作を行うことで

次に示す積分方程式を得る。

$$c_{ij}(\mathbf{y}) u_i(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{x}) d\Gamma = \kappa \int_{\Omega} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) n_i d\Omega - \kappa \int_{\Omega} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta_{,i}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (8)$$

$$c(\mathbf{y}) \theta(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \theta^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Omega} \theta^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left[\frac{\dot{\theta}(\mathbf{x}, t)}{k_c} + \eta \dot{u}_{j,j}(\mathbf{x}, t) \right] d\Omega \quad (9)$$

ただし、 q は熱流束、 t_i は表面力、 n_i は単位法線ベクトルである。

2.3 DRMの適用 支配微分方程式の厳密基本解を定式化に用いなかったため、境界積分方程式に未知量を含む領域積分が存在する。これを境界積分に変換する手法の一つが DRM である。境界積分方程式(8),(9)の領域積分項に DRM を適用する。

境界積分方程式(8),(9)の領域積分項に対して次の級数近似を考える。

$$\kappa \theta_{,i} = \sum_{j=1}^{N+L} f^j \omega_i^j \quad (10)$$

$$\frac{\dot{\theta}}{k_c} + \eta \dot{u}_{j,j} = \sum_{j=1}^{N+L} f^j \alpha^j \quad (11)$$

ただし、 N は境界上の節点総数、 L は内点総数を表し、 ω_i と α は時間依存の未知係数を表す。また f はソース点 $\mathbf{y}$ と観測点 $\mathbf{x}$ との距離 r 、代表長さ a により次式のように表される関数である⁽¹²⁾。

$$f = c_1 + c_2 \frac{r}{a} + c_3 \frac{r^2}{a^2} + c_4 \frac{r^3}{a^3} + \cdots \quad (12)$$

級数近似式(10),(11)を支配方程式(1),(2)に代入することにより、任意の j においてそれぞれ次式のような特性方程式が成り立つ。

$$\mu \hat{u}_{mk,il}^j + (\lambda + \mu) \hat{u}_{lk,im}^j = \delta_{mk} f^j \quad (13)$$

$$\nabla^2 \hat{\theta}^j = f^j \quad (14)$$

DRM では、式(13),(14)を満たす $\hat{u}_{mk}$ 、 $\hat{\theta}$ を用いて領域積分を境界積分に変換する。特解 $\hat{u}_{mk}$ 、 $\hat{\theta}$ は次式のようになる。

$$\hat{u}_{mk} = c_1 \frac{1-2\nu}{(5-4\nu)G} r_{,m} r_{,k} r^2 + c_2 \frac{\left[\left(3 - \frac{10\nu}{3}\right) \delta_{mk} - r_{,m} r_{,k} \right] r^3}{30(1-\nu)G} \frac{1}{a} + \cdots \quad (15)$$

$$\hat{\theta} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} \frac{r}{a} + \cdots \quad (16)$$

級数近似式(10)と特性方程式(13)を積分方程式(8)の右辺第2項に代入し、それと同様に式(11)と式(14)を式(9)の右辺に代入することによってそれぞれ次のようになる。

$$c_{ij} u_i + \int_{\Gamma} t_{ij}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^* t_i d\Gamma - \kappa \int_{\Gamma} u_{ij}^* \theta n_i d\Gamma = - \sum_{j=1}^{N+L} \int_{\Omega} \left\{ \mu \hat{u}_{mk,il}^j + (\lambda + \mu) \hat{u}_{lk,im}^j \right\} \omega_i^j u_{ij}^* d\Omega \quad (17)$$

$$c\theta + \int_{\Gamma} q^* \theta d\Gamma - \int_{\Gamma} \theta^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \int_{\Omega} \{\nabla^2 \hat{\theta}^j\} \alpha^j \theta^* d\Omega \quad (18)$$

式(17),(18)の右辺に対して部分積分を2回繰り返し、デルタ関数の特性を考慮し、ソース点 y を境界上へ移行(境界への極限操作)すると、積分方程式が境界積分だけで表示できて次式となる。

$$\begin{aligned} & c_{ij} u_i + \int_{\Gamma} t_{ij}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^* t_i d\Gamma - \kappa \int_{\Gamma} u_{ij}^* \theta n_i d\Gamma \\ &= - \sum_{j=1}^{N+L} \left[c^j \hat{u}_{mj}^j + \int_{\Gamma} t_{ij}^* \hat{u}_{mj}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^* \hat{t}_{mj}^j d\Gamma \right] \omega_i^j \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & c\theta + \int_{\Gamma} q^* \theta d\Gamma - \int_{\Gamma} \theta^* q d\Gamma \\ &= \sum_{j=1}^{N+L} \left[c\hat{\theta}^j + \int_{\Gamma} q^* \hat{\theta}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} \theta^* \hat{q}^j d\Gamma \right] \alpha^j \end{aligned} \quad (20)$$

さらに ω_i^j と α^j を級数近似式を用いて変形すると、式(19)と(20)はそれぞれ次式のようになる。

$$\begin{aligned} & c_{ij} u_i + \int_{\Gamma} t_{ij}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^* t_i d\Gamma - \kappa \int_{\Gamma} u_{ij}^* \theta n_i d\Gamma \\ &= - \sum_{j=1}^{N+L} \left[c^j \hat{u}_{mj}^j + \int_{\Gamma} t_{ij}^* \hat{u}_{mj}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^* \hat{t}_{mj}^j d\Gamma \right] \theta_{,i}^j f^{-1} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & c\theta + \int_{\Gamma} q^* \theta d\Gamma - \int_{\Gamma} \theta^* q d\Gamma \\ &= \sum_{j=1}^{N+L} \left[c\hat{\theta}^j + \int_{\Gamma} q^* \hat{\theta}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} \theta^* \hat{q}^j d\Gamma \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} + \eta \hat{u}_{j,j}^j \right) f^{-1} \end{aligned} \quad (22)$$

2.4 時間ステップ解法 式(22)の右辺に存在する $\dot{\theta}$, $\dot{u}_{j,j}$ の2つの時間微分項に対し、次の差分近似を考える⁽⁵⁾。

$$\dot{\theta}^{m+1} = \frac{\theta^{m+1} - \theta^m}{\Delta t} \quad (23)$$

$$\dot{u}_{j,j}^{m+1} = \frac{u_{j,j}^{m+1} - u_{j,j}^m}{\Delta t} \quad (24)$$

ここで m は時間ステップレベルを表し、 Δt は時間ステップ幅である。 $m=0$ の諸量は初期条件で与えられる。式(23),(24)を式(22)に代入することにより、時刻 $m+1$ に関する積分方程式が得られる。

2.5 連成項の評価 積分方程式(21),(22)を離散化して連立一次方程式を解く際、未知数と式の数との関係から連成項の評価が必要となる。

領域内部での評価は、 $\theta_{,i}$ については内点の温度に関する積分方程式を、 $u_{j,j}$ については内点の変位に関する積分方程式をそれぞれ1回微分した次式を用いる。

$$\begin{aligned} \theta_{,i} &= \int_{\Gamma} \theta_{,i}^* q d\Gamma - \int_{\Gamma} q_{,i}^* \theta d\Gamma \\ &+ \sum_{j=1}^{N+L} \alpha^j \left(\hat{\theta}_{,i}^j + \int_{\Gamma} q_{,i}^* \hat{\theta}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} \theta_{,i}^* \hat{q}^j d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} u_{i,i} &= \int_{\Gamma} u_{ik,i}^* (t_k + \kappa \theta n_k) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ik,i}^* u_k d\Gamma \\ &+ \sum_{j=1}^{N+L} \left(\hat{u}_{mi,i}^j + \int_{\Gamma} t_{ik,i}^* \hat{u}_{mk}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ik,i}^* \hat{t}_{mk}^j d\Gamma \right) \omega_m^j \end{aligned} \quad (26)$$

境界上での $\theta_{,i}$ と $u_{j,j}$ の評価は次式を用いる。

$$\theta_{,i} = -\frac{q}{k} n_i + \frac{\partial \theta}{\partial s} s_i \quad (27)$$

$$u_{i,i} = \frac{(1-2\nu) t_i n_i}{2G(1-\nu)} + \frac{\alpha_\epsilon (1+\nu) \theta}{1-\nu} + \frac{\partial u_i}{\partial s} s_i \quad (28)$$

ただし、 s_i は境界に沿う座標である。

3. 数値計算プログラム

以上の理論に基づいて開発したプログラムの流れ図を図1に示す。ここでは、式(21)と(22)を離散化した式を反復手法を用いて計算している。括弧内の n は反

Fig. 1 Flowchart

復数を表し、各時刻での $\dot{u}_{j,j}^{(n)}$ の初期値は前のタイムステップで求めた値を用いる。

4. 数値計算例と考察

以上で述べてきた解析手法の有効性と精度を調べるために、例題⁽¹⁶⁾を解析して比較、検討する。

4.1 例題 図2に示すような平面の x_1 方向の両端に熱負荷が加わる問題について解析を行う。このとき x_2 方向の変位は拘束されており、例題の対称性を考慮

すれば有限領域の1次元問題にモデル化できる。各物

Fig. 2 Analysis model

性値は次のように与える。

$$G = 8.4 \times 10^5 \text{ [kg/m}^2\text{]} \quad (29)$$

$$k = 949.6 \text{ [J/msK]} \quad (30)$$

$$\nu = 0.28 \quad (31)$$

$$\rho = 7.86 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]} \quad (32)$$

$$\alpha_\epsilon = 1.23 \times 10^{-5} \text{ [1/K]} \quad (33)$$

$$c_\epsilon = 0.452 \times 10^3 \text{ [J/kgK]} \quad (34)$$

ただし、 G は縦弾性係数、 ν はポアソン比である。また、すべての例題で初期条件を次のように与え、 $\Delta t = 5.0$ [s]とする。

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (35)$$

$$u_{i,i}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (36)$$

$$\dot{u}_{i,i}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (37)$$

$$\theta(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (38)$$

4.2 例題1 問題の対称性を考慮して、図3に示す一辺の長さ l の正方形領域モデル及びそこから 45° 回転させた正方形領域を切り取った対角線長さ l の図4に示す有限領域モデルについて解析し、その精度を検討する。解析を行う際には2次要素を用い、境界を20要素に等分割する。内点は0とする。境界条件は図のように与える。図4に示すモデルでは、境界条件は場所ごとに求めた解析解を各時刻において与える。代表長さを $a=l$ とし、近似関数は $f=1+(r/l)$ とする。

図5は、変位の解析結果を示し、図6は、温度の解析結果を示す。この結果より、図3の正方形領域モデルよりも図4のモデルの方が精度が良い。これは1次元問題と仮定していることから与える境界条件が前者に対しては0と与えるのが多いのに比べ後者に対しては解析解より求めた大きさのある数値を与えるためであると考えられる。

Fig. 3 Model 1 (No internal points)

Fig. 4 Model 2 (No internal points)

Fig. 5 Displacement ($x_1=l$)

4.3 例題2 図3, 図4に示す有限領域モデルについて近似関数を次に示す2つの場合にわけて用いて解析を行う。

$$f = 1 + \frac{r}{l} \quad (39)$$

$$f = 1 + \frac{r}{l} + \frac{r^2}{l^2} \quad (40)$$

境界条件は図に示す通りに与え、20の境界要素を用いる。

Fig. 6 Temperature ($x_1=0.5l$) Fig. 7 Displacement of model 1 ($x_1=l$) Fig. 8 Displacement of model 2 ($x_1=l$)

図7は、図3のモデルにおける変位の解析結果を示し、図8は、図4のモデルにおける変位の解析結果を示す。どちらの場合においても近似関数による精度の違いはない。所要計算時間が式(39)の方が式(40)よりも短いことから考えて前者の方が適当であると考えられる。

4.4 例題3 例題1で行った図3に示す正方形領域モデルについて内点を増やし、領域内部の情報も考え

ることで精度の向上が見られるかを検討する。また、その増やす位置と数に関連性があるかも検討する。

Fig. 9 Model 3 (2 internal points)

Fig. 10 Model 4 (2 internal points)

Fig. 11 Model 5 (4 internal points)

図14は図9、図10に対する変位の解析結果の比較を示す。図10のモデルに対する解析結果の方が良い精度で得られているがこれはこの例題が x_1 軸方向の1次元問題であるために x_1 軸方向に内点を増やしたほうがより精度の高い解が得られることを示している。つぎに図15は図11、図12に対する変位の解析結果の比較を示す。ここでは単純に内点の数の違いによる解析結果

Fig. 12 Model 6 (9 internal points)

Fig. 13 Model 7 (81 internal points)

Fig. 14 Displacement ($x_1=l$)

の比較をしているがこれにより内点の数を増やした方がより精度のよい解が得られることがわかる。

5. 結 言

DRM を用いた非定常連成熱弾性問題の定式化を行い、それにともない積分方程式に存在する非定常項および連成項の評価を行った。この定式化に基づいて開発した計算プログラムを用いて例題解析を行い、数値解と厳密解とを比較して本解析法の有効性を比較、検討した。

Fig. 15 Displacement ($x_1=l$)

文 献

- (1) J. T. Oden: Finite Element Analysis of Nonlinear Problems in the Dynamic Theory of Coupled Thermoelasticity, *Nuclear Engineering and Design*, v10, pp. 465-475 1969.
- (2) J. H. Prevost & D. Tao: Finite Element Analysis of Dynamic Coupled Thermoelasticity Problems with Relaxation Times, *Journal of Applied Mechanics*, v50, pp. 817-822 1983.
- (3) M. Tanaka & K. Tanaka: A Boundary Element Approach to Dynamic Problems of Coupled Thermoelasticity, *Solid Mechanics Archives*, v6, pp. 467-491 1981.
- (4) V. Sladek & J. Sladek: Boundary Integral Equation Method in Thermoelasticity Part I: General Analysis, *Applied Mathematical Modelling*, v7, pp. 241-253 1983.
- (5) 石黒周司, 田中正隆, 時間ステップ境界要素法による二次元非定常熱弾性解析(連成項を考慮した場合), 日本機械学会論文集(A編), 59巻567号, pp. 2593-2598, 1993.
- (6) C. A. Brebbia・ほか2名著, 田中正隆 訳: 境界要素解析理論と応用, 丸善, 1984
- (7) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, 培風館, 1991.
- (8) 田中正隆, 田中喜久昭: 境界要素法-基礎と応用, 丸善, 1982, 161-165.
- (9) A. J. Nowak & A. C. Neves: The Multiple Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications, 1994.
- (10) P. W. Partridge, C. A. Brebbia & L. C. Wrobel: The Dual Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications, 1992.
- (11) S. Zhu & Y. Zhang: Solving General Field Equations in Infinite Domains with Dual Reciprocity Boundary Element Method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v12 n4, 1993.
- (12) S. Zhu & Y. Zhang: On the Choice of Interpolation Functions Used in the Dual Reciprocity Boundary Element Method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v10 n2, 1992.
- (13) S. Grilli, A. H. D. Cheng & O. Lafe: Dual Reciprocity BEM Based on Global Interpolation Functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v13 n4, 1994.
- (14) S. R. Karur & P. A. Ramachandran: Radial Basis Function Approximation in the Dual Reciprocity Method, *Mathematical and Computer Modelling*, v20 n7, 1994.
- (15) Y. C. Fung 著, 大橋義夫, 村上澄男, 神谷紀生 共訳: 固体の力学/理論, 培風館, 1970.
- (16) 竹内洋一郎, 古川俊雄: 平板の熱衝撃, 日本機械学会論文集(A編), 59巻559号, pp. 116-122, 1973.