球かをもつ異種材料接着弾性体の引張り*

宮 川 剛 幸^{*1}, 長谷川 久 夫^{*2}

Tension of a Dissimilar Elastic Solid with a Spherical Cavity

Takeyuki MIYAKAWA and Hisao HASEGAWA

This paper deals with the stress concentration problem of a dissimilar elastic solid with a spherical cavity under tension. A method of solution is presented for the problem by applying Green's functions for axisymmetric problems of a dissimilar elastic solid. The Green's functions are defined as solutions to the elastic problem of a dissimilar solid subjected to axisymmetric body forces acting along a circle. The principle of the method of solution is to distribute body forces so as to satisfy boundary conditions for a spherical cavity. The problem is formulated by an integral equation with unknown body forces. Performing numerical calculations, influences of the elastic modulus of the dissimilar solid on the stress distributions on the interface and around the cavity are shown.

Key Words: Elasticity, Dissimilar Solid, Tension, Spherical Cavity, Stress Concentration, Interface

1. ま え が き

本研究は、接着界面近傍に球かをもつ異種材料接着弾性体(二層接着弾性体)が、界面から十分に離れたところで、界面に垂直な単純引張応力を受けるときの応力集中問題を三次元弾性理論により考察したものである。異種材料の接着接合は各種産業において広く利用されているが、接着層内に気泡や介在物が混入することが多く、接着強度に及ぼすそれらの影響が問題になっている⁽¹⁾。弾性体中の球かは、材料欠陥の簡単なモデルとして、材料強度などの研究においてしばしば用いられている。球かによる応力集中について、すでに多くの研究⁽²⁾がなされているが、そのほとんどのものは均質弾性体中に球かが存在する場合を取扱ったものである。前報⁽³⁾⁽⁴⁾で、接着層内に球かあるいはだ円体状介在物をもつ三層接着弾性体のねじり問題を考察した。本研究では、異種材料接着弾性体中に存在する球かによる応力集中を考察する。

上述の問題の考察のため、ここでは解法として物体

力分布法を採用する。そのため、軸対称物体力の働く異種材料接着弾性体問題のグリーン関数⁽⁵⁾⁽⁶⁾を応力する。このグリーン関数は、異種材料接着弾性体中の一円周上に軸対称物体力が働くときの解として定義される。このグリーン関数により、本問題は分布させた物体力の大きさを未知関数とする積分方程式により定式化されるから、ここではそれを連立一次方程式に帰着させて解く。数値計算を実行して、異材界面および球かまわりの応力分布に及ぼす弾性係数の影響を明らかにする。

2. 異種材料接着弾性体の引張り

球かをもつ異種材料接着弾性体の引張問題を考察する準備として、球かのない異種接着弾性体が、界面から十分に離れたところで、単純引張応力 $\sigma_z = p$ を受けるときの応力場について述べておく。異材界面を $z = 0$ とする円柱座標 (r, θ, z) をとり、領域 $(z > 0)$ を Ω_1 、領域 $(z < 0)$ を Ω_2 で表す。界面 $(z = 0)$ は完全に接着されていてすべりはしないものとすれば、この場合の境界条件は次のようになる。

$$(i) \quad z=0, 0 \leq r < \infty; u_1^1 = u_2^1, \sigma_z^1 = \sigma_z^2, \tau_{rz}^1 = \tau_{rz}^2$$

$$(ii) \quad z \rightarrow \pm \infty; \sigma_z = p, \sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = 0$$

..... (1)

* 原稿受付 1998 年 5 月 19 日。

*¹ 学生員, 明治大学大学院(〒214-8571 川崎市多摩区東三田 1-1-1)。

*² 正員, 明治大学理工学部。

E-mail: ae00008@isc.meiji.ac.jp

ここに u_i^m, σ_{ij}^m は領域 Ω_m ($m=1, 2$) の変位と応力を表す。 u_i ($i=1, 2, 3$) は、 $i=1$ のとき r 、 $i=2$ のとき θ 、 $i=3$ のとき z を意味する。境界条件式(1)をほぼ満足する解として、現在、次のものが知られている。

(i) 領域 Ω_1 ;

$$u_1^1 = -\frac{\nu_1 p r}{2\mu_1(1-\nu_1)}, \quad u_2^1 = 0, \quad u_3^1 = \frac{p z}{2\mu_1(1+\nu_1)}$$

$$\sigma_r^1 = \sigma_\theta^1 = \tau_{rz}^1 = 0, \quad \sigma_z^1 = p \quad \dots\dots\dots (2)$$

(ii) 領域 Ω_2 ;

$$u_1^2 = -\frac{\nu_1 p r}{2\mu_1(1+\nu_1)}, \quad u_2^2 = 0,$$

$$u_3^2 = \frac{p z}{2\mu_2(1-\nu_2^2)} \left\{ 1 - \nu_2 - \nu_2^2 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\nu_1 \nu_2 (1+\nu_2)}{1+\nu_1} \right\}$$

$$\sigma_r^2 = \sigma_\theta^2 = \frac{p}{1-\nu_2} \left\{ \nu_2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\nu_1 (1+\nu_2)}{1+\nu_1} \right\} = p'$$

$$\tau_{rz}^2 = 0, \quad \sigma_z^2 = p \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 μ_m, ν_m ($m=1, 2$) は領域 Ω_m の横弾性係数とポアソン比を表す。上述の式(1)をほぼ満足する解の“ほぼ”は次のことを意味する。式(2)、(3)の解は、領域 Ω_1 では $\sigma_z^1 = p$ のみ作用している単純引張りの応力状態になっているが、領域 Ω_2 では、 $\sigma_z^2 = p$ のほかに、二軸一様引張応力 $\sigma_r^2 = \sigma_\theta^2 = p'$ も作用する応力状態になっている⁽⁷⁾⁽⁸⁾。したがって、 $p'=0$ となるような材料の組合せの場合を除いて、境界条件式(1)の(ii)を完全には満たしていないが、本研究では式(2)、(3)を母材の応力状態として採用する。

Fig. 1 Dissimilar elastic solid with a spherical cavity

3. 境界条件

球かをもつ異種材料接着弾性体(二層接着弾性体)に円柱座標 (r, θ, z) と球座標 (R, θ, ϕ) を図1のようにとる。球か半径を c 、異材界面 $(z=0)$ から球か中心までの距離を s とする。また球か面は自由表面であり、そして異材界面 $(z=0)$ は完全に接着されていてすべりはしないものとする。したがって、球かをもつ異種材料接着弾性体が引張りを受けるときの境界条件は次のように表される。

- (i) $R=c, 0 \leq \phi \leq \pi; \sigma_R = \tau_{R\phi} = 0$
- (ii) $z \gg 0; \sigma_z^1 = p, \sigma_r^1 = \sigma_\theta^1 = \tau_{rz}^1 = 0$
- (iii) $z \ll 0; \sigma_z^2 = p, \sigma_r^2 = \sigma_\theta^2 = p', \tau_{rz}^2 = 0$
- (iv) $z=0, 0 \leq r < \infty; u_i^1 = u_i^2, \sigma_z^1 = \sigma_z^2, \tau_{rz}^1 = \tau_{rz}^2 \quad \dots\dots\dots (4)$

ここでは球かが領域 Ω_1 に存在するときの境界条件について述べた。領域 Ω_2 に球かが存在する場合の境界条件を示すことは省略する。また、本問題ではねじれ変位 u_2 は生じないから、ねじり応力 $\tau_{r\theta}$ と $\tau_{\theta z}$ は常に零である。

4. グリーン関数

本研究で採用する解法では、異種材料接着弾性体の軸対称物体力問題のグリーン関数を応用する。このグリーン関数は、球かをもたない異種材料接着弾性体の領域 Ω_t ($t=1, 2$) 内の一円周 $(r=a, z=h$ あるいは $z=-h)$ 上に等分布作用する r 方向と z 方向の軸対称物体力

$$F_k = \frac{1}{2\pi r} \delta(r-a) \delta(r \pm h), \quad (k=1, 3) \quad \dots\dots (5)$$

が存在するときの解として定義される。ここに $\delta(\quad)$ はデラックのデルタ関数であり、 F_1 は図2、 F_3 は図3に示すような物体力を表す。記号 $\pm$ は、 F_k が領域 Ω_1 に存在するとき $+$ 、領域 Ω_2 に存在するとき $-$ をとるものとする。このグリーン関数(変位と応力)を次式のように表す。

$$u_i^{mkt} = u_i^{mkt}(r, z, a, h), \quad \sigma_{ij}^{mkt} = \sigma_{ij}^{mkt}(r, z, a, h) \quad \dots\dots\dots (6)$$

この式は、物体力 F_k が領域 Ω_t 内の点 $(a, h$ あるいは $-h)$ に存在するとき、領域 Ω_m の点 (r, z) に生じる変位と応力を意味する。式(6)の具体的な式は文献⁽⁵⁾⁽⁶⁾にあり、ここでは省略する。

5. 解法

本問題に対し、物体力分布による解法を示す。ここでは、球かが領域 Ω_1 内に存在する場合を例にして説

明する。図4中の二点鎖線Lは、球かの存在しない異種材料接着弾性体の領域 Ω_1 内に想定した半径 c の球かの境界となる面、破線 Γ は物体力 F_k の分布面を表す。記号 ε ($\varepsilon \ll 1$)はLの面と Γ の面の間の距離、 ϕ は荷重点 (a, h) の角度である。分布させた物体力 F_k によって発生する異種材料接着体の領域 Ω_m 内の変位 u_i^m と応力 σ_{ij}^m ($m=1, 2$)は解の重ね合わせの原理により、式(6)のグリーン関数と式(2), (3)を用いて次式のように表される。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_i^m \\ \sigma_{ij}^m \end{Bmatrix} = \int_0^n \left[f_1(\phi) \begin{Bmatrix} u_i^{m11} \\ \sigma_{ij}^{m11} \end{Bmatrix} + f_3(\phi) \begin{Bmatrix} u_i^{m31} \\ \sigma_{ij}^{m31} \end{Bmatrix} \right] d\phi \\ + \begin{Bmatrix} u_i^{0m} \\ \sigma_{ij}^{0m} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに $f_k(\phi)$ ($k=1, 3$)は分布させた物体力の大きさを表す ϕ の任意関数である。また、 $u_i^{0m}, \sigma_{ij}^{0m}$ は球かのないときの母材の変位と応力で式(2), (3)を表す。式(7)は、分布させた物体力の大きさ $f_k(\phi)$ の値にかかわらず、境界条件式(4)の条件(ii), (iii), (iv)を常に満足している。したがって、式(7)が残る条件(i)を満足するように $f_k(\phi)$ の値を定めれば、本問題の解が得られる。

式(7)から球座標で表された応力式を求め、境界条件式(4)の条件(i)を適用すれば次式を得る。

Fig. 2 A radial force acting on a circle

Fig. 3 An axial force acting on a circle

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -p \cos^2 \phi \\ p \sin \phi \cos \phi \end{Bmatrix} = \int_0^n \left[f_1(\phi) \begin{Bmatrix} \sigma_{r\phi}^{111} \\ \tau_{r\phi}^{111} \end{Bmatrix} \right. \\ \left. + f_3(\phi) \begin{Bmatrix} \sigma_{r\phi}^{131} \\ \tau_{r\phi}^{131} \end{Bmatrix} \right] d\phi \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここに下添字 L は、観測点 (r, z) が球かの境界となる面L上にあることを意味する。式(8)は $f_k(\phi)$ を未知関数とする積分方程式である。これを連立一次方程式に帰着させて解くため、 $f_k(\phi)$ を次式のように表す。

$$f_k(\phi) = \sum_{n=1}^N f_k^n \delta(\phi - \phi_n) \dots\dots\dots (9)$$

式(9)は物体力を連続的ではなく、 N 個の離散的な点($\phi = \phi_n : n=1 \sim N$)に分布させることを意味する。また、 f_k^n ($n=1 \sim N$)は分布させた N 個の物体力の大きさを表す。式(9)を式(8)に適用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -p \cos^2 \phi \\ p \sin \phi \cos \phi \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^N \left[f_1^n \begin{Bmatrix} \sigma_{r\phi}^{111} \\ \tau_{r\phi}^{111} \end{Bmatrix} + f_3^n \begin{Bmatrix} \sigma_{r\phi}^{131} \\ \tau_{r\phi}^{131} \end{Bmatrix} \right]_{L, \phi=\phi_n} \\ \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

式(10)にはそれぞれ N 個の任意定数 f_k^n があるから、球かの境界となる面L上に N 個の観測点($R=C, \phi = \phi_n : n=1 \sim N$)を選べば、式(10)から $2N$ 元の連立一次方程式が構成される。それを解いて f_k^n の値を定めれば、球かをもつ異種接着材料の任意の点の変位と応力が次式から求められる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_i^m \\ \sigma_{ij}^m \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^N \left[f_1^n \begin{Bmatrix} u_i^{m11} \\ \sigma_{ij}^{m11} \end{Bmatrix} + f_3^n \begin{Bmatrix} u_i^{m31} \\ \sigma_{ij}^{m31} \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} u_i^{0m} \\ \sigma_{ij}^{0m} \end{Bmatrix} \\ \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

Fig. 4 A plane L of a spherical cavity and a plane Γ of distribution of body forces

Fig. 5 Distributions of the stress σ_z on the plane $z=s$ Fig. 8 Distributions of the stress σ_z on the plane $z=0$ Fig. 6 Distributions of the stress σ_z on the plane $z=s$ Fig. 9 Distributions of the stress τ_{rz} on the plane $z=s$ Fig. 7 Distributions of the stress σ_z on the plane $z=0$ Fig. 10 Distributions of the stress τ_{rz} on the plane $z=0$

Fig. 11 Distributions of the stress τ_{rz} on the plane $z=0$

6. 数値結果と考察

上で述べた解法に基づき、ポアソン比の値を $\nu_1=\nu_2=0.3$ 、球か中心の位置 s は $s/c=1.01$ とし、種々の弾性係数比 $\xi=\mu_2/\mu_1$ の値に対して数値計算を実行した。 N と ε の値は解の収束性を検討して $N=140$ 、 $\varepsilon/c=0.09$ を採用した。結果を図5から11に示す。図中の破線(長い線による破線)は単純引張りの応力状態にある領域 Ω_1 に球かが存在するときの結果でパラメータは ξ である。点線(短い線による破線)は、二軸引張応力 $\sigma_r=p'$ も働いている領域 Ω_2 に球か存在するときの結果で、パラメータは $\xi'=1/\xi$ であり、カッコ内の値が ξ' を表す。

弾性係数比 ξ が $\xi=1.0$ すなわち球かが均質弾性体中に存在するときには厳密解⁽⁹⁾があり、参考のため、このときの結果も図中に実線で示してある。また、当然のことながら、本解法において $\xi=1.0$ として得られた結果は、この厳密解と完全に一致した。これらの結果は、球か中心の位置 s が $s/c=1.01$ のときのものであり、図には示していないが、 s の値をこの近くで変化させても、応力分布の定性的な変化は小さかった。

図5と図6は、球か中心を通る断面($z=s$)上の応力 σ_z の分布を図示したもので、図5は $\xi \geq 1.0$ すなわち球かの存在する領域が柔らかい(μ が小さい)場合、図6は $\xi \leq 1.0$ すなわち球かの存在する領域が硬い(μ が大きい)場合を表す。球かの存在する領域が柔らかい場合、応力 σ_z の分布は均質体($\xi=1.0$)のときよりも常に小さい。また、球かの存在する領域が硬い場合、 σ_z の値の大きいところでは、均質体のときよりも常に大きく、そしてその大きさは、領域 Ω_2 に球かが存在するときのほうが大きい。最大応力は、いずれの場合

においても球か縁にあり、そして硬い領域に球かが存在するときのほうが大きい。

図7と図8は、異材界面($z=0$)上の応力 σ_z の分布を図示したもので、図7は球かの存在する領域が柔らかい場合、図8は球かの存在する領域が硬い場合である。界面上の応力 σ_z は $r/c=1.0 \sim 2.0$ においても若干の応力集中が見られるが、その大きさは、図5、6の球か縁の値に比べれば小さい。なお、 ξ の値によっては、球か底近傍において、圧縮応力が発生する。

図9～11は断面($z=s$)あるいは($z=0$)上のせん断応力 τ_{rz} の分布を図示したものである。図9は球か中心を通る断面($z=s$)上の分布で、 $\xi=1.0$ すなわち均質体のときには $\tau_{rz}=0$ である。 ξ の値が1.0から離れると、 τ_{rz} が発生するが、その大きさは σ_z に比べるとはるかに小さい。 $\xi > 1.0$ すなわち球かの存在する領域が柔らかいときのほうがその大きさは大きい。また、 ξ の値が1.0よりも大きいか小さいかによって τ_{rz} の働く向きは逆になる。

図10と図11は異材界面($z=0$)上の τ_{rz} の分布で、図10は $\xi > 1.0$ すなわち球かが柔らかいほうの領域に存在するとき、図11は $\xi < 1.0$ すなわち球かが硬いほうの領域に存在するときの結果である。応力 τ_{rz} の分布は、本質的には、均質体のときと同じような分布になるが、 ξ の値の影響は、球かの存在する領域が硬いときのほうが大きい。

7. む す び

球かをもつ異種材料接着弾性体が、界面から十分に離れたところで、界面に垂直に働く単純引張応力を受けるときの応力集中問題を三次元弾性理論により考察した。本問題に対し、物体力分布による解法を示した。また、数値計算により、異材界面および球か近傍の応力分布に及ぼす弾性係数の影響を明らかにした。

文 献

- (1) 澤俊行・虎谷寛, 機講論 (第74期通常総会), (II), No. 97-1 (1997-3), 384-385.
- (2) 土田, 機誌, **79**-693 (1976), 789-794.
- (3) 長谷川久夫・小林史明, 機論, **58**-545, A (1992), 93-98.
- (4) 長谷川久夫・小林史明・松村文行, 機論, **59**-51, A (1993), 1226-1231.
- (5) Hasegawa, H., ほか2名, *J. Appl. Mech.*, **59**-2 (1992), 312-320.
- (6) 長谷川久夫・酒井智康, 機論, **61**-586, A (1995), 1309-1315.
- (7) 笠野英秋・ほか2名, 機論, **55**-513, A (1989), 1041-1048.
- (8) 長谷川久夫・酒井智康, 第44回応用力学連合講演会予稿集, (1994-1), 351-352.
- (9) 例えば, 中原一郎, 応用弾性学, (1977), 149, 実教出版.