r - および hr -アダプティブ BEM の 2 次元弾性問題への適用*北 栄輔^{*1}, 樋口 賢一^{*2}, 神谷 紀生^{*3}**Application of r - and hr -Adaptive BEM
to Two-Dimensional Elastic Problem**

Eisuke KITA, Kenichi HIGUCHI and Norio KAMIYA

This paper presents r - and hr -adaptive boundary element methods. The error analysis is done by the sample point error estimation scheme. Then, the extended and the global error indicators are defined by combining the computational errors and the fundamental solutions. Mesh refinement is carried out so that the error indicator distributes almost uniformly on whole boundary elements at the refined mesh. The present method is applied to the two-dimensional elastic problem in order to confirm its validity.

Key Words: Boundary Element Method, Adaptive Scheme, Sample Point Error Analysis, Two-Dimensional Elastic Problem

1 緒論

境界要素法に対する誤差評価法やアダプティブ法は、これまで多くの研究者により提案されている^{(1),(2)}。アダプティブ法は、境界要素法に先立って有限要素法で研究が進められたので、境界要素法の初期の研究では有限要素法で提案された方法を直接応用していた。しかし、研究が進むにつれて境界要素法のアダプティブ法には有限要素法にない困難さのあることが理解されてきた。その第1は、有限要素法がガラーキン法や変分法で定式化されるのに対して、境界要素法は選点法で定式化されることが多いことである。そのため、有限要素法に対して定式化された誤差評価法を、選点法で定式化された境界要素法に直接適用することは適切でない。第2は、境界要素法で定式化に用いる基本解が影響関数としての性質を持つため、ある要素に生じる誤差が他の要素の精度に影響を及ぼすことである。有限要素法では、内挿関数の性質より要素ごとの誤差の影響はその要素だけに限定されるのに対して、境界要素法では要素ごと

の誤差が要素相互に影響するので、メッシュ変更戦略は非常に複雑になる。

このような点を改善するために、川口ら⁽³⁾は代表点誤差評価法と名付けた誤差評価法と拡張誤差表示式と名付けた誤差指標を提案している。拡張誤差表示式は、選点法で定式化された境界要素法のために提案された誤差評価法である。また、拡張誤差表示式は要素ごとの誤差と基本解の積で定義されており、要素ごとの誤差だけでなく、要素間の影響の程度も評価できる指標である。彼らは、これを h 法によるメッシュ変更と組み合わせて2次元ポテンシャル問題⁽³⁾、2次元弾性問題⁽⁴⁾、板曲げ問題⁽⁵⁾、準調和方程式の問題⁽⁶⁾などへ適用している。ところで、メッシュ改善方法は、 h 法、 p 法、 r 法に大きく分類できる。 h 法ではもっとも単純なメッシュを初期メッシュとし、誤差の大きな要素を細分割しながらメッシュを改善していく。 p 法では要素分割や要素数は変更せずに、要素の内挿関数の次数を増加することで精度を改善する。 r 法では要素数や内挿関数の次数は変更しないで、要素の分割位置を変更する。また、 h 法と p 法を組み合わせた hp 法や h 法と r 法を組み合わせた hr 法なども提案されている。このうち、 h 法はアルゴリズムが単純なことから多くの研究者⁽⁷⁾⁻⁽¹¹⁾により利用されているが、 h 法では通常最終メッシュにたどり着くまでに多くの繰り返し計算を必要とする欠点がある。また、最適メッシュ構成の途中で生じた中間メッシュの分割位置は最終メッシュ

* 原稿受付 1998 年 8 月 3 日。

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科 (☎ 464-8603 名古屋市千種区不老町)。^{*2} アイシン精機 (株) (☎ 448-0032 刈谷市朝日町 2-1)。^{*3} 正員, 名古屋大学情報文化学部 (☎ 464 8601 名古屋市千種区不老町)。

E-mail: kita@mech.nagoya-u.ac.jp

まで保存されるので、もし途中で不適切な要素細分割が行われると、それは改善されずに最後まで保存されることになる。そこで、このような点を改善するために、本研究では r 法の適用を考える。r 法では要素の分割位置を自由に変更できるので、比較的細かく等分割された初期メッシュを採用することで、比較的少ない繰り返し計算によって高精度のメッシュを構成できる。しかし、r 法では h 法に比べて理論的な背景やアルゴリズムがはるかに複雑であり、誤差分布と要素長さや要素数についての関係式を導入して要素を再配置しなければならない。

本研究では次のような方法を提案する。まず、誤差解析法として川口ら⁽³⁾が提案した代表点誤差解析法を適用する。川口らは h 法に適用するために代表点誤差解析法で得られた計算誤差から拡張誤差表示式を定義して用いたが、これでは表示式と要素が 1 対 1 に対応していないので r 法に適用する場合困難が生じる。そこで、本研究では拡張誤差指標から全体誤差指標を定義する。この指標は要素と 1 対 1 に対応した指標である。そして要素誤差と要素長さについての関係式より、メッシュ改善後の各要素上での全体誤差指標値がほぼ一定となるようにメッシュを再配置する。このとき、総要素数一定の条件でメッシュを再配置する方法を r 法、目標精度を指定して要素数を自由に変更できるメッシュ再配置法を hr 法として示す。最後に、提案する方法を 2 次元弾性問題の境界要素解析におけるアダプティブメッシュ生成に適用し、提案する方法の有効性を検討する。

2 境界要素解析と誤差解析

2.1 境界要素解析

2 次元弾性体の静的応力解析を考える。支配方程式および境界条件は、解析対象領域 Ω , 境界 Γ において次のように表される。

$$\sigma_{kl,l} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$u_k = \bar{u}_k \quad (\text{on } \Gamma_{u_k}), \quad t_k = \bar{t}_k \quad (\text{on } \Gamma_{t_k}) \quad (2)$$

ここで $\sigma_{kl}, u_k, t_k (k, l = x, y)$ はそれぞれ応力成分、変位成分、表面力成分である。上式の上付きバーは指定境界条件値である。

平面ひずみ状態に対応する Kelvin の基本解 u_{kl}^*, t_{kl}^* を用いて、式(1)から積分方程式を導出すると次式を得る。

$$c_{kl}(p_i)u_l(p_i) = \oint_{\Gamma} \{u_{kl}^*(p_i, p_j)t_l(p_j) - t_{kl}^*(p_i, p_j)u_l(p_j)\} d\Gamma \quad (3)$$

ここで点 p_i はソース点を、 p_j は境界上の積分点を示す。また、 c_{kl} は p_i のおかれた境界形状に依存する定数である。

2.2 境界要素法の定式化

境界積分方程式(3)を適合線形要素によって離散定式化する。式(3)の境界積分を N 個の境界要素に分割し、次式を得る。

$$c_{kl}u_l(p_i) = \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} (u_{kl}^* t_l - t_{kl}^* u_l) d\Gamma \quad (4)$$

ここで u_l, t_l は、それぞれ要素上の $l (l = x, y)$ 方向変位と表面力を示す。

要素 n において、関数分布を適合線形要素の内挿関数によって近似する。

$$u_l = \phi_1 u_l^n + \phi_2 u_l^{n+1} \quad (5)$$

$$t_l = \phi_1 t_l^n + \phi_2 t_l^{n+1} \quad (6)$$

ここで ϕ_1, ϕ_2 は適合線形要素の内挿関数であり、要素上にとられた局所座標系 $\xi (-1 \leq \xi \leq 1)$ について次式で定義される。

$$\phi_1 = \frac{1-\xi}{2}, \quad \phi_2 = \frac{1+\xi}{2}$$

式(5),(6)を式(4)に代入し、各選点 ($i = 1, 2, \dots, N$) ごとに成り立たせると次の式を得る。

$$Hu = Gt \quad (7)$$

ここで u, t はそれぞれ全節点での変位、表面力を表すベクトルであり、 H, G はその係数マトリックスである。また、2 次元弾性問題では u, t は x, y 方向成分を持つことに注意しなければならない。従って、例えば $2m-1$ 行目と $2m$ 行目は、それぞれ節点 m の x, y 方向成分を示すことになる。式(7)に境界条件を与えて解くことにより、未知数を求めることができる。

2.3 誤差解析法と誤差指標

代表点誤差解析法 代表点誤差解析法では、誤差解析を行うために各要素上に代表点と呼ばれる特別な選点をとる。本研究では、適合線形要素を用いているので、代表点を各要素の中点にとることにする。

要素 Γ_i の中点に取られた代表点 p'_i において積分方程式を考え、これに式(7)から求めた解 $\hat{u}_i, \hat{t}_i$ を代入すれば、これは方程式を満たさないで残差が生じる。

$$r_k(p'_i) \equiv c_{kl}\hat{u}_l(p'_i) - \oint_{\Gamma} (u_{kl}^* \hat{t}_l - t_{kl}^* \hat{u}_l) d\Gamma \neq 0 \quad (8)$$

代表点において積分方程式を成立させるため、方程式(7)を解いて得られた近似解 $\hat{u}, \hat{q}$ に修正量 e_{ul}, e_{tl} を加える。

$$c_{kl}\{\hat{u}_l(p'_i) + e_{ul}(p'_i)\} - \oint_{\Gamma} \{u_{kl}^* (\hat{t}_l + e_{tl}) - t_{kl}^* (\hat{u}_l + e_{ul})\} d\Gamma = 0 \quad (9)$$

式(8),(9)から代表点 p'_i における不整合量と誤差量の関係式が得られる。

$$r_k = \oint_{\Gamma} (u_{kl}^* e_{ul} - t_{kl}^* e_{ul}) d\Gamma - c_{kl}e_{ul} \quad (10)$$

要素上の誤差分布は 2 次関数でモデル化する。つまり、

$$\begin{cases} e_{ul} = e_{ul}^n \Psi \\ e_{\ell u} = e_{\ell u}^n \Psi \end{cases} \quad (11)$$

ここで $e_{ul}^n, e_{\ell u}^n$ はそれぞれ要素 Γ_n 上にとられた代表点 p'_n での u, t に関する誤差を示す。そして、局所座標系 $-1 \leq \xi \leq 1$ に対して Ψ は次式で定義される。

$$\Psi = 1 - \xi^2 \quad (12)$$

全要素の midpoint に代表点を取り、式(11)を用いて式(10)を離散化すると次式となる。

$$\begin{aligned} r_k(p'_i) &= \sum_{j=1}^{N_{ul}} e_{ul}^j \int_{\Gamma_{ul}} u_{kl}^* \Psi d\Gamma - \sum_{j=1}^{N_{\ell u}} e_{\ell u}^j \int_{\Gamma_{\ell u}} t_{kl}^* \Psi d\Gamma \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N_{\ell u}} \delta_{ij} c_{kl} e_{\ell u}^j \end{aligned} \quad (13)$$

ここで $N_{ul}, N_{\ell u}$ はそれぞれ l 方向の変位、表面力指定要素の総数を表し、 $N = N_{ul} + N_{\ell u}$ である。

全ての代表点について x, y 方向に式(13)を考え、変位指定境界 Γ_{ul} では $e_{ul} = 0$ 、表面力指定境界 $\Gamma_{\ell u}$ では $e_{\ell u} = 0$ として連立方程式を構成すると次式を得る。

$$r = Be \quad (14)$$

この方程式を解けば誤差ベクトル e を得ることができる。

拡張誤差表示式 η_{hj} 式(14)を成分表示すると、代表点 p'_i での k 方向について次式を得る。

$$r_k^i = \sum_{j=1}^N \sum_{l=x,y} B_{kl}^{ij} e_l^j \quad (15)$$

ここで

$$B_{kl}^{ij} = \begin{cases} \int_{\Gamma_{ul}} u_{kl}^* \Psi d\Gamma & p'_j \text{ on } \Gamma_{ul} \\ - \int_{\Gamma_{\ell u}} t_{kl}^* \Psi d\Gamma - \delta_{ij} c_{kl} e_{\ell u}^j & p'_j \text{ on } \Gamma_{\ell u} \end{cases}$$

式(15)の右辺の各成分の絶対値ノルム $\|\eta_k^{ij}\|$ を定義する。つまり、

$$\begin{aligned} \|\eta_k^{ij}\| &\equiv \sum_{l=x,y} \|B_{kl}^{ij} e_l^j\| \\ &= \|B_{kx}^{ij} e_x^j\| + \|B_{ky}^{ij} e_y^j\| \end{aligned} \quad (16)$$

x, y 成分をまとめて評価するために要素 Γ_i と Γ_j を関連づける拡張誤差指標を次式で定義する。

$$\eta_{ij} = \sqrt{\|\eta_x^{ij}\|^2 + \|\eta_y^{ij}\|^2} \quad (17)$$

Fig. 1 Conforming linear element

全体系誤差指標 H_i 拡張誤差表示式の性質について考えると次のことに気づく。まず、拡張誤差表示式の第 i 行は、要素 i に生じる誤差が他の全ての要素の誤差に与える影響を示している。一方、拡張誤差表示式の第 i 列は、他の全ての要素の誤差が要素 i の誤差に与える影響を示している。したがって、要素 i の誤差が他の要素に与える影響と要素 i が他の要素の誤差から受ける影響を全て考慮する指標として、次式で定義される全体系誤差指標 H_i を定義する。

$$H_i = \frac{1}{2N} \left(\sum_{l=1}^N \eta_{il} + \sum_{l=1}^N \eta_{li} \right) \quad (18)$$

ここで、右辺括弧内の第 1 項は要素 Γ_i の他への影響を、第 2 項は他からの影響を示す。

3 アダプティブプロセス

3.1 誤差と要素長さの関係式

線形要素において数値解と誤差の関係は図 1 の様に表される。ここで節点 $i1$ において得られた解を u_1 、節点 $i2$ において得られた解を u_2 とする。ここでは、節点上での誤差は積分誤差などの数値誤差を除いて 0 と考える。

この境界要素上の任意点 j における関数値 u_j を点 $i1$ の周りでテーラー展開すると次式を得る。

$$u_j = u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\delta r_j \cdot \nabla)^k u_1 \quad (19)$$

$$\delta r_j \cdot \nabla = (x_j - x_{i1}) \frac{\partial}{\partial x} + (y_j - y_{i1}) \frac{\partial}{\partial y} \quad (20)$$

ここで δr_j は点 $i1$ から点 j までの間の距離ベクトルを示す。

ここでは 2 次元の問題を考え、要素に平行に x 軸をとるように座標変換を行うと、式(19)は次式となる。

$$u_j = u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_j - x_{i1})^k}{k!} \frac{d^k u_1}{dx^k} \quad (21)$$

要素中点で $\xi = 0$ 、両端で $\xi = \pm 1$ となる局所座標を導入すると、上式は次式となる。

$$u_j = u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k!} \left(\frac{h}{2} \right)^k (\xi_j - \xi_{i1})^k \frac{d^k u_1}{dx^k} \right\} \quad (22)$$

ここで、全体系座標系における x_j, x_{i1}, x_{i2} がそれぞれ局所座標系の $\xi_j, \xi_{i1}, \xi_{i2}$ に対応するものとする。また、 h は要素長さを示す。

一方、線形要素で離散化されているので、点 j における数値解の値 $\hat{u}_j$ は次式で近似される。

$$\hat{u}_j(\xi_j) = \frac{\xi_j - \xi_{i2}}{\xi_{i1} - \xi_{i2}} \cdot u_1 + \frac{\xi_j - \xi_{i1}}{\xi_{i2} - \xi_{i1}} \cdot u_2 \quad (23)$$

式(22),(23)から、境界要素上の点 j における誤差量 e_j は次のように得る。

$$\begin{aligned} e_j(\xi_j) &= u_j(\xi_j) - \hat{u}_j(\xi_j) \\ &= -\frac{\xi_j - \xi_{i1}}{\xi_{i2} - \xi_{i1}}(u_2 - u_1) + \left(\frac{h}{2} \right) (\xi_j - \xi_{i1}) \frac{du_1}{dx} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 (\xi_j - \xi_{i1})^2 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + o(h^3) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで $o(h^3)$ は h^3 以上の高次項を示す。

式(22)を点 $i2$ について考えた式は u_2 と等しいので次式を得る。

$$\begin{aligned} u_2 &= u_j(\xi_{i2}) = u_1 + \left(\frac{h}{2} \right) (\xi_{i2} - \xi_{i1}) \frac{du_1}{dx} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 (\xi_{i2} - \xi_{i1})^2 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + o(h^3) \\ u_2 - u_1 &= \left(\frac{h}{2} \right) (\xi_{i2} - \xi_{i1}) \frac{du_1}{dx} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 (\xi_{i2} - \xi_{i1})^2 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + o(h^3) \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)を式(24)の右辺第1項に代入して次式を得る。

$$e_j(\xi_j) = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 (\xi_j - \xi_{i1})(\xi_j - \xi_{i2}) \frac{d^2 u_1}{dx^2} + o(h^3) \quad (26)$$

よって、この要素における誤差量 $\|u - \hat{u}\|$ は次のように得られる。

$$\begin{aligned} \|u - \hat{u}\| &= \int_{\Gamma} |u - \hat{u}| d\Gamma = \int_{-1}^1 |e_j| d\xi_j \\ &= Kh^2 + o(h^3) \end{aligned} \quad (27)$$

3.2 誤差の漸近収束

アダプティブプロセスにおいて、 k 回目の繰り返しにおける誤差と要素長さの関係は、式(27)より次式となる。

$$\|u - \hat{u}_k\| = Kh_k^2 + o(h_k^3) \quad (28)$$

ここで、 $\hat{u}_k$ は k 回目の解析で得た数値解、 h_k は k 回目の解析での要素長さ、 $o(h_k^3)$ は k 回目の解析での誤差の高次項である。

同様に $k+1$ 回目の繰り返しにおいて次の式が成り立つ。

$$\|u - \hat{u}_{k+1}\| = Kh_{k+1}^2 + o(h_{k+1}^3) \quad (29)$$

Fig. 2 Object under consideration

式(28),(29)の左辺の誤差ノルムを、先ほど定義した全体系誤差指標に置き換える。つまり、

$$\|u - \hat{u}_k\| = H_i^k \quad (30)$$

上式を式(28),(29)に代入して誤差の高次項を省略すると次式を得る。

$$\frac{H_i^{k+1}}{H_i^k} = \left(\frac{h_{k+1}}{h_k} \right)^2 \quad (31)$$

この式に基づいて、全体系誤差指標の値から要素を再配置する。

3.3 要素再配置プロセス

解析対象の境界形状には、かど点などのように変更されてはいけなない分割位置がある。そこで、変更されてはいけなない分割位置ごとに境界を分け、部分境界をマクロエレメントとして扱う。そして、マクロエレメントごとの要素数を決定した後、再分割後の各要素での誤差指標がほぼ均一となるように要素を再配置する。アダプティブプロセスを以下に示す。

1. 解析対象のマクロエレメントについてのデータを与える。
2. 初期メッシュの要素数を与えて、全境界を等分割したメッシュを構成する。
3. 境界要素解析を行う。
4. 代表点誤差解析法により誤差評価を行う。
5. 各要素の全体系誤差指標 H_i と、その平均値 H_{aim} を計算する。
6. マクロエレメントごとに、そのマクロエレメントに属する境界要素の H_i を合計する。そして、それを

Fig. 3 Mesh partitions (r -method)

H_{aim} で割ることにより、改善メッシュでのマクロエレメントごとの要素数を計算する。

7. マクロエレメントごとの H_i 分布にしたがって、改善された要素分割では、各要素の各要素の誤差がおおよそ H_{aim} となるように要素を配置する。

マクロエレメントごとの要素数と全体系誤差指標の分布から、実際に分割位置を決定するためには式(31)を用いる。このとき、総要素数が一定であることを制約条件とする場合を r 法、そうでない場合を hr 法とする。ただし、 r 法では総要素数が一定であればマクロエレメントごとの要素数は変化することができる。

4 解析例

解析例として、図2に示す平板の静的応力解析問題を考える。平板の一端が固定されており、他端に垂直応力が作用している。なお、本研究のプログラムでは係数マトリックスの対角成分の計算では解析積分を行い、非対角成分の計算ではガウスの10点積分公式を用いた。ま

(1) Initial mesh

(2) 5.th mesh

Fig. 4 Function distributions (r -method)

た、すべての解析対象は平面ひずみ状態とみなし、横弾性率 $G = 1000(kgf/cm^2)$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。

4.1 r 法による解析

最初に r 法による結果を示す。初期メッシュとして、全境界を40要素で均等分割したものを用い、先に示した r 法によってメッシュ改善を行う。この場合、アダプティブ法を繰り返し適用することで、誤差が一様に収束していくことを示す。繰り返し5回目までのメッシュ分割の様子を図3に示す。この図から応力集中のおこる点A,Bにメッシュが集まり3-4回目のイテレーション後はメッシュの移動量が小さくなり収束していくことがわかる。初期と

Fig. 5 Convergence property of error indicator (r-method)

Fig. 7 Convergence property of error indicator (hr-method)

Fig. 6 Mesh partitions (hr-method)

5回目での関数値の分布を図4に示す。この図より、5回目のメッシュでは関数分布の変化の激しい点A,Bなどにメッシュが集まり、関数分布を良く表現していることが分かる。反復計算の回数に対する誤差指標の変化の様子を図5に示す。●は H_{aim} 、+は全体系誤差指標の最大値 H_{max} 、×は全体系誤差指標の最小値 H_{min} である。この

図より誤差の最大値と最小値の差が小さくなって誤差分布が平均化されると同時に、平均値が減少していく様子が分かる。

4.2 hr法による結果

初期メッシュとして、要素数がおおよそ30,40,50になるように全境界を等分割したものを作成する。そして、全境界を80要素で等分割したメッシュによって解析して得られた誤差平均値を目標誤差 H_{aim} として与え、hr法により1回のメッシュ改善を行う。

初期メッシュと改善メッシュの比較を図6に示す。ここで、case1からcase3はそれぞれ初期メッシュの要素数をおおよそ30,40,50とした場合の結果である。全ての場合について、得られた改善メッシュでは基準の要素数よりも少ない要素数のメッシュを得ている。

図7には、 η_{ave} の変化の様子を示す。ここで記号は要素数がおおよそ30,40,50の場合を示している。また、点線はメッシュ改善の目標とした80要素で等分割したメッシュでの全体誤差指標 H_{aim} を、一点鎖線は H_{aim} を求めた等分割メッシュの要素数 $N_{std}(=80)$ を示す。これらより、全ての場合について改善メッシュの要素数は基準メッシュの要素数よりも少ないにもかかわらず、目標誤差に非常に近い誤差平均値を得ている。

5 結論

本研究では、境界要素法に対するr法およびhr法アダプティブ法について述べた。提案した方法では、代表点誤差解析法による誤差解析結果から全体系誤差指標を定義し、誤差と要素長さの関係式に基づいて要素を再

配置することでメッシュを改善する。 r 法では要素数を一定としてメッシュ改善するのに対して、 hr 法では要素数を自由に変更できる。

解析対象として2次元弾性問題を考え、提案した方法を適用した。まず、 r 法を適用した場合、メッシュ改善が進むにつれて要素ごとの誤差が平均化されながら小さくなることが示された。次に、 hr 法を適用した場合、目標とした細かい等分割メッシュと同程度の精度をより少ない要素数で実現できることがわかった。これらのことより、提案したアダプティブ法の2次元弾性問題における有効性を確認できたと考えられる。そこで、今後は3次元弾性問題などへの拡張を検討している。

文献

- (1) Kamiya, N., *Adv. Engg. Soft.*, **15**(1992), 157–292, Elsevier Applied Science.
- (2) Kita, E., and Kamiya, N., *Adv. Engg. Soft.*, **19**(1994), 21–32.
- (3) 川口 健, 神谷紀生, 機論, **A56-529**(1990), 2032–2039.
- (4) 川口 健, 神谷紀生, 機論, **A56-532**(1990), 2501–2507.
- (5) 佐脇 豊, 多湖邦男, 神谷紀生, 境界要素法論文集, **10**(1993), 95–100.
- (6) 北 栄輔, 神谷紀生, 日本シミュレーション学会論文集, **13-4**(1994), 360–366.
- (7) Charafi, A., Neves, C., and Wrobel, L. C., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **38**(1995), 2185–2207.
- (8) Guiggiani, M., *Int. J. Numer. Meth. Engg.*, **29**(1990), 1247–1269.
- (9) Kawaguchi, K., and Kamiya, N., *Adv. Engg. Soft.*, **9**(1992), 255–262.
- (10) Rank, E., *Int. J. Numer. Meth. Engg.*, **28**(1989), 1335–1349.
- (11) Rencis, J. J., and Mullen, R. L., *Int. J. Numer. Meth. Engg.*, **23**(1986), 1509–1527.