分散形複合材料の強化材損傷の理論とその応用*

東 郷 敬 一 郎^{*1}, 曹 永 太^{*2}

Theory of Reinforcement Damage in Discontinuously-Reinforced Composites and Its Application

Keiichiro TOHGO and Young-Tae CHO

In particle or short-fiber reinforced composites, cracking or debonding of the reinforcements is a significant damage mode because the damaged reinforcements lose load carrying capacity. This paper deals with a theory of the reinforcement damage in discontinuously-reinforced composites and its application. The composite with progressive cracking damage contains intact and cracked reinforcements in a matrix. To describe the load carrying capacity of the cracked reinforcement, the average stress of a broken ellipsoidal inhomogeneity in an infinite body which was proposed in the previous paper is introduced. An incremental constitutive relation of the composites with progressive cracking damage of the reinforcements has been developed based on the Eshelby's equivalent inclusion method and Mori and Tanaka's mean field concept. This damage theory can describe not only cracking damage but also debonding damage of the reinforcements by modifying the load carrying capacity of damaged reinforcements. Influence of the reinforcement damage on the stress-strain response and elastic stiffness of the composites is discussed. It is noted that the full-debonding damage gives the lower limit of the stress-strain relation of the composite with progressive reinforcement damage.

Key Words: Discontinuously-Reinforced Composite, Incremental Damage Theory, Reinforcement Cracking, Interfacial Debonding, Broken Ellipsoidal Inhomogeneity, Micromechanics

1. 緒 言

延性マトリックス中に粒子あるいは短繊維を分散させた分散形複合材料は、機械的特性を向上させるとともに、成形性、加工性が良いことから、ポリマ基、金属基複合材料に応用されている。これらの材料では、単調負荷あるいは繰返し負荷のもとで、変形中に、強化材の割れ、マトリックスと強化材との離れあるいはマトリックスの微小割れ等の損傷が進行し、複合材料の機械的特性に大きな影響を及ぼすことが知られている^{(1)~(8)}。生ずる損傷形態は、素材の機械的性質の組合せ、マトリックスと強化材の界面強度、強化材の形状、体積率等による異なるが、分散形複合材料では、強化材の割れおよび離れ損傷が主な損傷形態として知られている。これらの損傷により、強化材の载荷能力は低下し、複合材料の引張強度や疲労強度も低下するが、逆に、き裂先端周りでの損傷はエネルギー散逸による高靱化機構として働くこともある⁽⁸⁾⁽⁹⁾。損傷を伴う複

合材料の変形・強度特性を解明し、新しい材料の開発、更なる応用を進めるためには、強化材による強化機構と損傷の効果を考慮した複合材料のマイクロメカニクスを確立することが必要である。

損傷の進行を伴う複合材料の応力-ひずみ関係を説明するために、これまでに多くの解析的研究が行われている。マトリックス中に1個の強化材を含むユニット・セルの有限要素法解析は強化材の割れ損傷、はく離損傷に対して広く行われている^{(10)~(13)}。一方、分散形複合材料の多くの理論は、無限体中のだ円体不均質物に対する Eshelby の解⁽¹⁴⁾に基づいて開発されている^{(15)~(19)}。Tohgo ら⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾は、粒子分散複合材料のはく離損傷に対して、Eshelby の等価介在物法⁽¹⁴⁾と Mori-Tanaka の平均場理論⁽²⁰⁾に基づいて増分形損傷理論を提案し、複合材料の応力-ひずみ関係に及ぼすはく離損傷の影響は極めて大きいことを示している。同様な方法で強化材の割れ損傷を伴う複合材料の理論を構築するためには、無限体中の割れただ円体不均質物に対する解が必要である。

そこで、前報⁽²¹⁾⁽²²⁾では、無限体中の割れていないだ円体不均質物と割れただ円体不均質物の载荷能力について議論を行い、割れただ円体不均質物の载荷能力は割れていないだ円体不均質物の平均応力と平均応力

* 1997 年 11 月 21 日 材料の強度と破壊に関するモデリング/シミュレーション/マルチメディアシンポジウムにおいて講演、原稿受付 1998 年 6 月 22 日。

^{*1} 正員、静岡大学工学部 (〒432-8561 浜松市城北 3-5-1)。

^{*2} 正員、静岡大学大学院 (現：大韓民国全州大学)。

E-mail: k-tohgo@eng.shizuoka.ac.jp

の低下を表す係数マトリックスにより表されることを示した。さらに、無限体中の割れただ円体不均質物の有限要素法解析の結果より、係数マトリックスの成分を不均質物の形状(アスペクト比)と不均質物と無限体(マトリックス)の弾性係数の比の関数として求めた。

本研究では、分散形複合材料の強化材割れ損傷を考慮した増分理論を、前報⁽²¹⁾⁽²²⁾で提案した割れただ円体不均質物の载荷能力の概念を導入し、Eshelby の等価介在物法⁽¹⁴⁾と Mori-Tanaka の平均場理論⁽²⁰⁾に基づいて開発した。本理論は損傷した強化材の载荷能力を変えることにより、強化材の割れ損傷だけでなく離れ損傷も記述できるものである。本理論の応用例として、強化材の割れ損傷、はく離損傷を伴う複合材料の応力-ひずみ関係および損傷の進行に伴う弾性係数の変化について解析を行い、分散形複合材料の変形挙動に及ぼす強化材損傷の影響について考察した。

2. 割れただ円体不均質物の载荷能力

外力を受けている無限体中のだ円体不均質物の载荷能力は不均質物の平均応力で表すことができる。作用応力に比べて不均質物の平均応力が高い場合は载荷能力が高いということであり、一方、はく離あるいは割れ損傷により応力が解放され平均応力が低下したときは、不均質物の载荷能力が低下したことを意味している。前報⁽²¹⁾⁽²²⁾では、無限体中の割れただ円体不均質物の载荷能力すなわち平均応力について議論を行った。以下に、その結果を簡単に述べる。

図1(a)は、無限遠方で作用応力 σ を受ける無限体中のだ円体不均質物を示したものである。無限体(マトリックス)および不均質物の弾性係数テンソルを L_0 , L_1 とすると、だ円体不均質物の応力 σ^p は一様となり、Eshelby の等価介在物法⁽¹⁴⁾により次式で与え

Fig. 1 Intact and broken ellipsoidal inhomogeneities in an infinite body subjected to applied stress

られる。

$$\sigma^p = L_0(S - I)\{(L_1 - L_0)S + L_0\}^{-1} \times L_1(S - I)^{-1}L_0^{-1}\sigma \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 S は Eshelby のテンソルで、だ円体不均質物の形状およびマトリックスのポアソン比の関数として表される。また、 I は単位テンソルである。

次に、図1(b)に示すような中央部断面(xy 面)で割れただ円体不均質物について考える。割れた不均質物の応力分布は極めて複雑であるが、平均応力 σ^{cp} は次式に示すように簡単な形で記述できる。

$$\sigma^{cp} = k\sigma^p \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 σ^p は式(1)によって与えられる割れていないだ円体不均質物の応力であり、 k は割れた不均質物と割れていない不均質物の平均応力の比を表す係数マトリックスである。平均応力の成分を

$$\sigma^p = [\sigma_x^p, \sigma_y^p, \sigma_z^p, \tau_{yz}^p, \tau_{zx}^p, \tau_{xy}^p] \dots \dots \dots (3)$$

$$\sigma^{cp} = [\bar{\sigma}_x^{cp}, \bar{\sigma}_y^{cp}, \bar{\sigma}_z^{cp}, \bar{\tau}_{yz}^{cp}, \bar{\tau}_{zx}^{cp}, \bar{\tau}_{xy}^{cp}] \dots \dots \dots (4)$$

のようにベクトル表示すると、軸対称だ円体不均質物に対する係数 k は以下のように表示される。

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+h_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+h_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (5)$$

結局、係数 k の三つの成分 h_{33} , h_{13} , h_{44} が決定されれば、割れただ円体不均質物の载荷能力は式(1)、式(2)により評価できる。前報⁽²¹⁾⁽²²⁾では、 h_{33} , h_{13} , h_{44} を不均質物とマトリックスの弾性係数の比および不均質物のアスペクト比の関数として求めた。その結果を図2(a), (b), (c)に示す。

3. 構成材料の変形特性

本研究で対象とする複合材料において、強化材は弾性、マトリックスは J2 流れ理論により記述される弾塑性であるとする。強化材の増分形応力-ひずみ関係は等方弾性の式により与えられる。

$$d\sigma = L_1(E_1, \nu_1)d\epsilon \dots \dots \dots (6)$$

ここで、 $L_1(E_1, \nu_1)$ は強化材のヤング率 E_1 とポアソン比 ν_1 により記述される弾性係数テンソルである。マトリックスの弾性挙動は弾性係数テンソル $L_0(E_0, \nu_0)$ を用いて同様な式で表される。マトリックスの弾塑性挙動を記述する J2 流れ理論(Prandtl-Reuss の式)は等方弾性の式と同様な形で近似できる⁽¹⁸⁾。

$$d\sigma = L_0(E_0', \nu_0')d\epsilon \dots \dots \dots (7)$$

ここで、 $L_0(E'_0, \nu'_0)$ は、 $L_0(E_0, \nu_0)$ において、 E_0 と ν_0 を E'_0 と ν'_0 で置き換えた接線係数テンソルである。 E'_0 と ν'_0 は弾塑性変形中のヤング率とポアソン比に対応する係数であり、次式で与えられる。

$$E'_0 = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{H'}}, \quad \nu'_0 = \frac{\nu_0 + \frac{E_0}{2H'}}{1 + \frac{E_0}{H'}} \quad (8)$$

ここで、 H' はマトリックスの加工硬化率である。

$$H' = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e^p} \quad (9)$$

(a) h_{33}

(b) h_{13}

(c) h_{44}

Fig. 2 Components of k -matrix as a function of an aspect ratio of inhomogeneity

σ_e と $d\varepsilon_e^p$ は、それぞれ Mises の相当応力と相当塑性ひずみ増分である。式(7)は単調比例負荷の場合は厳密に Prandtl-Reuss の式に一致する。

以後、複合材料において、損傷していない完全な強化材、損傷した強化材およびマトリックスの微視的平均応力・ひずみは上付添字 p , d , および 0 を付けた記号で表し、複合材料の巨視的応力・ひずみは添字のない記号で表す。

4. 強化材割れ損傷の増分理論

図3(a)は、割れ損傷を含む粒子あるいは一方向に配列した短繊維強化複合材料の微視的様相を模式的に示したものである。複合材料は外力に対応する巨視的応力・ひずみに加えて、材料の不均質性から強化材とマトリックスに微視的応力・ひずみが生じる。さらに、強化材に割れ損傷が生じると、損傷前の応力が解放され強化材の载荷能力が低下する。4章では、割れた円体不均質物の载荷能力の概念を導入し、Eshelby の等価介在物法⁽¹⁴⁾ と Mori-Tanaka の平均場理論⁽²⁰⁾ に基づいて、強化材割れ損傷の進行を記述できる増分形損傷理論を以下の仮定のもとで定式化する。

(1) 強化材の割れ損傷は、強化材内の応力と強化材強度の統計的特性により支配される。

(2) 割れの過程で、割れる前の強化材の応力は解放され、割れた後の強化材の载荷能力はその平均応力により記述される。

(3) 複合材料の損傷の進行は、損傷のない完全な強化材の体積率の減少および割れた強化材の体積率の増加により表される。

4・1 定式化

図3は、損傷過程にある複合材料の増分変形前後の状態を示している。図3(a)は、増

(a) Before incremental deformation (b) After incremental deformation

Fig. 3 The states of composite undergoing damage process before and after incremental deformation. df_p is a volume fraction of the reinforcements damaged in the incremental deformation

分変形前の状態で、完全な強化材の体積率 f_p 、損傷した強化材の体積率 f_d で表される。また、次の増分変形の間に割れる強化材の体積率を df_p とすると、図 3(b) に示す変形後の複合材料は、完全な強化材の体積率 $f_p - df_p$ 、損傷した強化材の体積率 $f_d + df_p$ で表される。したがって、この増分変形区間において、複合材料はマトリックス中に完全な強化材、割れた強化材および割れ過程にある強化材を含むことになる。

増分変形における複合材料中の完全な強化材の応力増分 $d\sigma^p$ は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} d\sigma^p &= d\sigma + d\bar{\sigma} + d\sigma_i^{pt} \\ &= L_1(d\epsilon_0 + d\bar{\epsilon} + d\epsilon_i^{pt}) \\ &= L_0(d\epsilon_0 + d\bar{\epsilon} + d\epsilon_i^{pt} - d\epsilon_i^*) \cdots \cdots (10) \end{aligned}$$

割れた強化材に対しては、その平均応力は式(2)により記述されるので、次式が得られる。

$$\begin{aligned} kd\sigma^p &= d\sigma + d\bar{\sigma} + d\sigma_i^{pt} \\ &= kL_1(d\epsilon_0 + d\bar{\epsilon} + d\epsilon_i^{pt}) \\ &= L_0(d\epsilon_0 + d\bar{\epsilon} + d\epsilon_i^{pt} - d\epsilon_i^*) \cdots \cdots (11) \end{aligned}$$

さらに、割れ過程にある強化材に対しては、増分変形の間に強化材の応力は σ^p から $k\sigma^p$ まで解放されるので、次式が得られる。

$$\begin{aligned} -(I - k)\sigma^p &= d\sigma + d\bar{\sigma} + \sigma_i^{pt} \\ &= L_0(d\epsilon_0 + d\bar{\epsilon} + \epsilon_i^{pt} - \epsilon_i^*) \cdots \cdots (12) \end{aligned}$$

上式において、高次の微小項を無視すると、

$$-(I - k)\sigma^p = \sigma_i^{pt} = L_0(\epsilon_i^{pt} - \epsilon_i^*) \cdots \cdots (13)$$

となる。これらの式において、 $d\sigma$ は作用応力増分で、 $d\bar{\sigma}$ は Mori-Tanaka の平均場の概念に基づく平均場応力増分であり、それぞれ $d\epsilon_0$ 、 $d\bar{\epsilon}$ と次式で関係づけられる。

$$d\sigma = L_0 d\epsilon_0, \quad d\bar{\sigma} = L_0 d\bar{\epsilon} \cdots \cdots (14)$$

$d\sigma_i^{pt}$ 、 $d\sigma_i^{pt}$ 、 σ_i^{pt} および $d\epsilon_i^{pt}$ 、 $d\epsilon_i^{pt}$ 、 ϵ_i^{pt} はそれぞれ完全な強化材、割れた強化材および割れ過程にある強化材の応力とひずみの変動分である。 $d\epsilon_i^*$ 、 $d\epsilon_i^*$ 、 ϵ_i^* は Eshelby の等価変換ひずみであり、 $d\epsilon_i^{pt}$ 、 $d\epsilon_i^{pt}$ 、 ϵ_i^{pt} は Eshelby のテンソル S を用いて次式により表される。

$$d\epsilon_i^{pt} = S d\epsilon_i^*, \quad d\epsilon_i^{pt} = S d\epsilon_i^*, \quad \epsilon_i^{pt} = S \epsilon_i^* \cdots \cdots (15)$$

したがって、 $d\sigma_i^{pt}$ 、 $d\sigma_i^{pt}$ 、 σ_i^{pt} は

$$\begin{aligned} d\sigma_i^{pt} &= L_0(S - I)d\epsilon_i^* \\ d\sigma_i^{pt} &= L_0(S - I)d\epsilon_i^* \cdots \cdots (16) \\ \sigma_i^{pt} &= L_0(S - I)\epsilon_i^* \end{aligned}$$

となる。作用(巨視的)応力増分 $d\sigma$ は複合材料の平均応力増分により

$$\begin{aligned} d\sigma &= (f_p - df_p)d\sigma^p + f_d kd\sigma^p - df_p(I - k)\sigma^p \\ &\quad + (1 - f_p - f_d)(d\sigma + d\bar{\sigma}) \cdots \cdots (17) \end{aligned}$$

で表されるので、 $d\bar{\sigma}$ は、高次の微小項を無視して

$$d\bar{\sigma} = -f_p d\sigma_i^{pt} - f_d d\sigma_i^{pt} - df_p \sigma_i^{pt} \cdots \cdots (18)$$

となる。また、式(14)、(16)を上式に代入することより、 $d\bar{\epsilon}$ は次式で得られる。

$$d\bar{\epsilon} = -(S - I)(f_p d\epsilon_i^* + f_d d\epsilon_i^* + df_p \epsilon_i^*) \cdots \cdots (19)$$

複合材料の巨視的ひずみ増分 $d\epsilon$ は

$$\begin{aligned} d\epsilon &= (f_p - df_p)(d\epsilon_0 + d\bar{\epsilon} + d\epsilon_i^{pt}) \\ &\quad + f_d(d\epsilon_0 + d\bar{\epsilon} + d\epsilon_i^{pt}) + df_p(d\epsilon_0 + d\bar{\epsilon} + \epsilon_i^{pt}) \\ &\quad + (1 - f_p - f_d)(d\epsilon_0 + d\bar{\epsilon}) \cdots \cdots (20) \end{aligned}$$

で表され、高次の微小項を無視し、式(15)、(19)を考慮すると、上式は次式となる。

$$d\epsilon = d\epsilon_0 + f_p d\epsilon_i^* + f_d d\epsilon_i^* + df_p \epsilon_i^* \cdots \cdots (21)$$

以上の式を解くことにより、Eshelby の等価変換ひずみ $d\epsilon_i^*$ 、 $d\epsilon_i^*$ 、 ϵ_i^* が作用応力増分 $d\sigma$ および増分変形の間に割れる強化材の体積率 df_p の関数として記述できる。最終的に複合材料のひずみ増分 $d\epsilon$ も応力増分 $d\sigma$ の関係が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} d\epsilon &= (I + f_p A_1^{-1} B_1 + f_d A_2^{-1} B_2) L_0^{-1} d\sigma \\ &\quad + \{(I - S)^{-1} + f_p A_1^{-1} B_1 + f_d A_2^{-1} B_2\} L_0^{-1} \\ &\quad \times (I - k) \sigma^p df_p \\ &= d\epsilon^t + d\epsilon^d \cdots \cdots (22) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_1 &= (L_1 - L_0)^{-1} \{L_0 + (L_1 - L_0)S \\ &\quad + (L_1 - L_0)(I - S)f_p\} \\ &\quad - f_d \{L_0 + (kL_1 - L_0)f_d\}^{-1} \\ &\quad \times \{kL_1 S + (kL_1 - L_0)(I - S)f_p\} \cdots \cdots (23) \end{aligned}$$

$$B_1 = f_d \{L_0 + (kL_1 - L_0)f_d\}^{-1} (kL_1 - L_0) - I \cdots \cdots (24)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \{L_0 + (L_1 - L_0)S + (L_1 - L_0)(I - S)f_p\}^{-1} \\ &\quad \times (L_1 - L_0)(I - S)f_d \\ &\quad - \{kL_1 S + (kL_1 - L_0)(I - S)f_p\}^{-1} \\ &\quad \times \{L_0 + (kL_1 - L_0)f_d\}(I - S) \cdots \cdots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \{kL_1 S + (kL_1 - L_0)(I - S)f_p\}^{-1} (kL_1 - L_0) \\ &\quad - \{L_0 + (L_1 - L_0)S + (L_1 - L_0)(I - S)f_p\}^{-1} \\ &\quad \times (L_1 - L_0) \cdots \cdots (26) \end{aligned}$$

式(22)において、第1項は応力増分によるひずみ増分 $d\epsilon^t$ で、第2項は割れ損傷によるひずみ増分 $d\epsilon^d$ であり、複合材料のひずみ増分はそれらの和として与えられることがわかる。マトリックスと完全な強化材および割れた強化材における平均応力の増分 $d\sigma^0$ 、 $d\sigma^p$ 、 $d\sigma^d$ は、それぞれ次式で求められる。

$$\begin{aligned} d\sigma^0 &= L_0(I - S)\{(I - S)^{-1} \\ &\quad + f_p A_1^{-1} B_1 + f_d A_2^{-1} B_2\} L_0^{-1} \\ &\quad \times \{d\sigma + (I - k)\sigma^p df_p\} \cdots \cdots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\sigma^p &= L_0(I - S)\{(I - S)^{-1} \\ &\quad - (1 - f_p)A_1^{-1} B_1 + f_d A_2^{-1} B_2\} L_0^{-1} \\ &\quad \times \{d\sigma + (I - k)\sigma^p df_p\} \cdots \cdots (28) \end{aligned}$$

$$d\sigma^d = kd\sigma^p \cdots \cdots (29)$$

また、マトリックス、完全な強化材および割れた強化材の平均ひずみ増分も次式で与えられる。

$$d\epsilon^0 = (I - S)\{(I - S)^{-1} + f_p A_1^{-1} B_1 + f_d A_2^{-1} B_2\} L_0^{-1} \times \{d\sigma + (I - k)\sigma^p df_p\} \dots\dots\dots (30)$$

$$d\epsilon^p = L_1^{-1} L_0 (I - S)\{(I - S)^{-1} - (1 - f_p) A_1^{-1} B_1 + f_d A_2^{-1} B_2\} L_0^{-1} \times \{d\sigma + (I - k)\sigma^p df_p\} \dots\dots\dots (31)$$

$$d\epsilon^d = [(I - S)\{(I - S)^{-1} + f_p A_1^{-1} B_1 + f_p A_2^{-1} B_2\} + S A_2^{-1} B_2] L_0^{-1} \times \{d\sigma + (I - k)\sigma^p df_p\} \dots\dots\dots (32)$$

4.2 強化材の割れ損傷特性 簡単のため、強化材の破壊強度特性は強化材内の最大応力に関する Weibull 分布に従うものと仮定すると、複合材料内の全強化材の体積に対する割れた強化材の体積割合は次式で表される。

$$P_v(\sigma_{\max}^p) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\sigma_{\max}^p}{S_0}\right)^m\right\} \dots\dots\dots (33)$$

ここで、 $\sigma_{\max}^p$ は強化材の最大引張応力、 S_0 、 m はそれぞれ尺度係数と形状係数であり、強化材の平均強度 $\bar{\sigma}_{\max}^p$ は、次式で与えられる。

$$\bar{\sigma}_{\max}^p = S_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \dots\dots\dots (34)$$

$\Gamma(\cdot)$ は Gamma 関数である。強化材の体積率が f_{p0} で与えられるならば、損傷した強化材の累積体積率は $f_{p0} P_v$ になる。したがって、増分変形の間に割れる強化材の体積率 df_p は次式で与えられる。

$$df_p = f_{p0} \frac{dP_v}{d\sigma_{\max}^p} d\sigma_{\max}^p \dots\dots\dots (35)$$

4.3 複合材料におけるマトリックスの相当応力

複合材料のマトリックスの塑性変形を考慮した解析を行うためには、複合材料中のマトリックスの相当応力を評価する必要がある。複合材料中のだ円体状強化材内の応力はほぼ一定であるが、割れた強化材およびマトリックスは不均一に変形しており、複雑な応力分布となる。本理論では、完全な強化材、割れた強化材、およびマトリックスの平均的な応力・ひずみを得ることができる。したがって、複合材料中の不均一な応力分布を考慮したマトリックスの相当応力を評価することは容易ではない。近似的な方法としては、微視的な応力分布を無視し、マトリックスの平均応力の偏差成分を用いて次式により評価することができる。

$$\sigma_e^0 = \left(\frac{3}{2} \sigma_v^0 \sigma_v^0\right)^{1/2} \dots\dots\dots (36)$$

一方、Tohgo-Weng⁽¹⁹⁾ は、マトリックスの微視的な応力分布を考慮した相当応力を評価するために、エネルギーバランスに基づく評価法を提案し、多孔質材料に対しては Gurson の降伏条件⁽²³⁾ による予測とよ

く一致することを報告している。この方法は、容易に、強化材割れ損傷を伴う複合材料にも応用できる。以下に得られた相当応力の評価式を示す。

塑性変形および損傷が生ずる前の弾性状態にある複合材料におけるマトリックスの相当応力は次式で与えられる。

$$(\sigma_e^0)^2 = \frac{3E_0}{2(1-f_{p0})(1+\nu_0)} (2U - f_{p0} \sigma^p \epsilon^p) - \frac{9(1-2\nu_0)}{2(1+\nu_0)} (\sigma_m^0)^2 \dots\dots\dots (37)$$

ここで、 σ_m^0 はマトリックスの平均静水圧応力で、 σ^p と ϵ^p は強化材の応力とひずみである。また U は複合材料に与えられる単位体積当たりのエネルギー

$$U = \frac{1}{2} \sigma \epsilon \dots\dots\dots (38)$$

である。

塑性変形あるいは損傷の進行状態にある複合材料のマトリックスの相当応力は、図3に示す増分変形に対応して以下のように求めることができる。マトリックスの増分変形前の相当応力を σ_e^0 、変形による増分を $d\sigma_e^0$ とすると、増分変形後の相当応力は $\sigma_e^0 + d\sigma_e^0$ となる。増分解析においては、 σ_e^0 は既知であるので $d\sigma_e^0$ を求めればよい。 $d\sigma_e^0$ は次式により与えられる。

$$d\sigma_e^0 = \frac{3E_0}{2(1-f_p-f_d)(1+\nu_0)\sigma_e^0} \times \left\{ dU - dR - f_p \sigma^p d\epsilon^p - f_d \sigma^d d\epsilon^d + \frac{1}{2} df_p (\sigma^p \epsilon^p - \sigma^d \epsilon^d) \right\} - \frac{9(1-2\nu_0)}{2(1+\nu_0)\sigma_e^0} \sigma_m^0 d\sigma_m^0 \dots\dots\dots (39)$$

dU は複合材料に与えられる単位体積当たりのエネルギー増分で、 dR は強化材の割れ損傷により解放されるエネルギーであり、それぞれ、

$$dU = \sigma d\epsilon \dots\dots\dots (40)$$

$$dR = \frac{1}{2} \sigma d\epsilon^d \dots\dots\dots (41)$$

と表される。

5. 解析結果と考察

本損傷理論の応用例として、強化材損傷の進行を考慮した分散形複合材料の単軸引張下での応力-ひずみ関係および損傷に伴う弾性係数の低下について解析を行った。解析に用いたヤング率とポアソン比は、強化材に対して、

$$E_1 = 2500\sigma_0, \quad \nu_1 = 0.17 \dots\dots\dots (42)$$

マトリックスに対して、

$$E_0 = 500\sigma_0, \quad \nu_0 = 0.3 \dots\dots\dots (43)$$

である。マトリックスの相当応力-相当塑性ひずみ関係は

$$\sigma_e^0 = \sigma_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_e^{0p}}{\varepsilon_0} \right)^{0.1}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_0} \quad (44)$$

である。ここで、 σ_0 はマトリックスの降伏応力あるいは参照応力である。また、強化材の割れ損傷特性は、Weibull 分布式(33)に従うものとし、形状係数を $m=5.0$ 、平均強度を $\bar{\sigma}_{max}=3.0\sigma_0$ とした。強化材の体積率は、応力-ひずみ関係の解析では 20% とし、弾性係数の低下に関する解析では 0% から 50% まで変化させた。

5.1 増分形損傷理論による弾性解析

図 4 および図 5 は、強化材、マトリックスともに弾性とした弾性複合材料の応力-ひずみ関係に及ぼす強化材損傷の影響を示したものである。図 4、5 には応力-ひずみ関係および損傷した強化材の体積率の変化を示している。これらの図に示すように、損傷を伴う複合材料の応力-ひずみ関係は、損傷が発生する前は損傷のない完全な複合材料に対応する線形の関係であり、強化材の割れ損傷が進行するとともに、その線形関係から低

Fig. 4 Influence of an aspect ratio of reinforcements on the stress-strain relations of the elastic composites with progressive cracking damage

Fig. 5 Influence of k -matrix on the stress-strain relations of the elastic composites

応力側にずれている。そして、すべての強化材が割れ損傷を起こすと再び線形の応力-ひずみ関係になることがわかる。図 4 は、損傷を伴う複合材料の応力-ひずみ関係に及ぼす強化材のアスペクト比の影響を示したものである。強化材のアスペクト比が小さいほど、割れ損傷は起こりにくいものの、割れ損傷による载荷能力の低下は大きいため(図 2 参照)、応力-ひずみ関係に及ぼす損傷の影響は大きくなる。

構築した増分形損傷理論は、係数マトリックス k を変えることにより、強化材の割れ損傷だけでなく離損傷を伴う複合材料の変形挙動も記述することが可能である。図 5 は、強化材のアスペクト比が 1.0 の場合すなわち粒子分散複合材料の応力-ひずみ関係に及ぼす k マトリックスの影響を示したものである。 k を単位マトリックスに等しく置くと、载荷能力の損失が全くないので完全な複合材料を記述していることになる。一方、 k が 0 マトリックスの場合は、強化材が载荷能力を完全に失うことを意味するので、強化材-マトリックス界面の完全な離損傷を記述する理論となり、アスペクト比が 1.0 の場合は Thogo ら⁽¹⁸⁾ により提案された離損傷を考慮した粒子分散複合材料の増分形損傷理論と一致することになる。図 5 より、分散形複合材料の強化材損傷の中で、離損傷が最も低い応力-ひずみ関係を与えることがわかる。

5.2 増分形損傷理論による弾塑性解析

図 6 は損傷の生じない完全な複合材料、割れ損傷を伴う複合材料および離損傷を伴う複合材料の単軸引張下での弾塑性応力-ひずみ関係の解析結果で、強化材のアスペクト比の影響を示したものである。図 6 において

Fig. 6 Influence of an aspect ratio of reinforcements on the elastic-plastic stress-strain relations of the perfect composites and the composites with progressive cracking or debonding damage

同一のアスペクト比の応力-ひずみ関係を比較すると、複合材料の弾塑性応力-ひずみ関係は、完全な複合材料で最も高く、強化材損傷により低応力側にずれ、はく離損傷を伴う場合が最も低くなることからわかる。強化材のアスペクト比の影響は完全な複合材料と損傷を伴う複合材料で異なり複雑である。完全な複合材料では、アスペクト比が大きいほど、強化材はより高い応

Fig. 7 Young's modulus as a function of particle volume fraction of the perfect composites with $b/a = 0.5, 1.0, 3.0$ and 10.0

Fig. 8 Young's modulus as a function of damage evolution for the composites with $f_{p0} = 5\%, 10\%, 20\%$ and 30%

力を負担するので、高い応力-ひずみ関係となる。一方、損傷を伴う複合材料の応力-ひずみ関係に及ぼすアスペクト比の影響は、損傷の進行と損傷後の強化材の载荷能力を介して現れる。すなわち、損傷の進行は、図中の損傷した強化材の体積率 f_d で示すように、アスペクト比が大きいほど速く、一方、損傷後の強化材は、割れ損傷ではアスペクト比が大きいほど高い载荷能力を維持し、はく離損傷ではアスペクト比にかかわらず载荷能力を完全に失う。その結果として、はく離損傷を伴う複合材料の応力-ひずみ関係は、アスペクト比の影響を強く受け、アスペクト比が大きいほど低い応力-ひずみ関係となる。一方、割れ損傷を伴う複合材料では、アスペクト比の影響がさほど顕著に現れていない。

弾性解析結果と弾塑性解析結果との比較より、マトリックスの塑性変形は強化材内の応力の緩和を介して損傷の進行を抑制し、強化材の強度特性とマトリックスの弾塑性変形特性の兼ね合いによっては、かなりの塑性変形を生じて損傷が進行しない場合があることがわかる。

5.3 損傷に伴うヤング率の変化 材料のヤング率は損傷とともに低下し、負荷中の弾性除荷により容易

Fig. 9 Young's modulus as a function of damage evolution for the composites with $b/a = 0.5, 1.0, 3.0$ and 10.0

に求められることから、ヤング率の変化量により損傷の程度を表現することが多い。本理論で得られた構成式(22)において、第1項のみを考慮し、強化材、マトリックスともに弾性とする、次式で示す弾性のひずみ-応力関係が得られる。

$$\varepsilon = C\sigma, \quad C = (I + f_p A_1^{-1} B_1 + f_d A_2^{-1} B_2) L_0^{-1} \} \dots\dots\dots (45)$$

上式は、完全な強化材と損傷した強化材をそれぞれ体積率で f_p と f_d を含む複合材料に対する関係式であり、 C はコンプライアンス・テンソルである。 $f_p + f_d = f_{p0}$ の条件のもとに、 f_p と f_d を変化させて C を計算することにより、損傷の進行に伴う弾性係数の変化を求めることができる。図7は、損傷のない完全な複合材料について、 z 軸方向のヤング率 E_z をマトリックスのヤング率 E_0 で無次元化した値を強化材のアスペクト比と体積率で整理した結果である。本解析では $E_1/E_0=5$ と強化材のヤング率がマトリックスのヤング率より高いので、強化材のアスペクト比が高く体積率が高いほど複合材料のヤング率は高くなっている。図8, 9は、割れ損傷あるいははく離損傷が起こる場合に対して、複合材料の損傷前後のヤング率の比 E_z^{damage}/E_z と損傷量 f_d/f_{p0} の関係を示したものであり、それぞれ、強化材の体積率とアスペクト比の影響を見たものである。図8に示すように、ヤング率の低下率は割れ損傷、はく離損傷ともに強化材体積率が増加するほど顕著になっている。また、図9に示すように、アスペクト比の影響は割れ損傷とはく離損傷で異なり、割れ損傷に伴うヤング率の低下率はアスペクト比が小さいほど顕著であるが、はく離損傷に伴うヤング率の低下率はアスペクト比の影響をさほど受けにくいようである。両図において、割れ損傷およびはく離損傷に伴うヤング率の低下を比較したとき、割れ損傷による低下よりもはく離損傷による低下が顕著である。以上の結果は、損傷によるヤング率の低下に関する実験結果を考察する場合に有効である。

6. 結 言

強化材の割れ損傷を考慮した分散形複合材料の増分形損傷理論を Eshelby の等価介在物法, Mori-Tanaka の平均場理論および割れた円体不均質物の載荷能力の概念に基づいて構築した。さらに、複合材料内の不均一に変形したマトリックスの相当応力を評価するために、エネルギー・バランスに基づく式を示した。構築された理論は、割れ損傷に対してばかりでなく、係数マトリックスを $k=0$ と置くことにより、強化材-マトリックス界面のはく離損傷も記述できるも

のである。単軸引張下での複合材料の応力-ひずみ関係の解析結果より、応力-ひずみ関係に及ぼす強化材損傷の影響は顕著であり、強化材のアスペクト比に依存すること、強化材損傷の中ではく離損傷が最も応力-ひずみ関係を低下させることを明らかにした。さらに、損傷の進行に伴う弾性係数の変化について解析を行い、損傷に伴うヤング率の低下に及ぼす損傷形態、強化材体積率、アスペクト比の影響を明らかにした。

本理論は、分散形複合材料の割れ損傷およびはく離損傷を考慮して弾性から弾塑性にわたる変形を記述できるとともに、だ円体空洞を有する材料、空洞と強化材を有するハイブリッド複合材料等種々の材料に応用できるものである。さらに有限要素法にも容易に導入できることから、複合材料構造物の変形、強度評価、設計等、様々な応用が可能であると思われる。

本研究は、平成9年度文部省科学研究費補助金〔基盤研究(C)(2)〕、課題番号 09650095〕の助成により行われたものである。ここに記して深く感謝する。

文 献

- (1) Bayha, T. D., Kilmer, R. J. and Wawner, F. E., *Met. Trans.*, A, **23** (1992), 1653-1662.
- (2) Sugimura, Y. and Suresh, S., *Met. Trans.*, A, **23** (1992), 2231-2242.
- (3) Llorca, J., Martin, A., Ruiz, J. and Elices, M., *Met. Trans.*, A, **24** (1993), 1575-1588.
- (4) Whitehouse, A. F. and Clyne, T. W., *Acta Met. Mater.*, **41** (1993), 1701-1711.
- (5) Caceres, C. H. and Griffiths, J. H., *Acta Mater.*, **44** (1996), 25-33.
- (6) Kiser, M. T., Zok, F. W. and Wilkinson, D. S., *Acta Mater.*, **44** (1996), 3465-3476.
- (7) Tohgo, K., Mochizuki, K. and Ishii, H., *Int. J. Mech. Sci.*, **40** (1998), 199-213.
- (8) Tohgo, K., Fukuhara, D., Hadano, A. and Ishii, H., *Proc. ASME-JSME Joint PVP Conf., ASME Int.*, PVP-Vol. 374(1998), 331-338, San Diego.
- (9) Tohgo, K., Suzuki, N. and Ishii, H., *Int. J. Damage Mech.*, **5** (1996), 150-170.
- (10) Needleman, A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **54** (1987), 525-531.
- (11) Bao, G., *Acta Met. Mater.*, **40** (1992), 2547-2555.
- (12) Finot, M., Shen, Y. -L., Needleman, A. and Suresh, S., *Met. Trans.*, A, **25** (1994), 2403-2420.
- (13) Brockenbrough, J. R. and Zok, F. W., *Acta Met. Mater.*, **43** (1995), 11-20.
- (14) Eshelby, J. D., *Proc. R. Soc., A*, **241** (1957), 376-396, London.
- (15) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, (1982), Martinus Nijhoff, The Hague.
- (16) Arsenault, R. J. and Taya, M., *Acta Met.*, **35** (1987), 651-659.
- (17) Tandon, G. P. and Weng, G. J., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **55** (1988), 126-135.
- (18) 東郷敬一郎・Chou, T. -W., *機論*, **61**-582, A (1995), 382-388.

- (19) Tohgo, K. and Weng, G. J., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, **116** (1994), 414-420.
 - (20) Mori, T. and Tanaka, K., *Acta Met.*, **21** (1973), 571-574.
 - (21) 曹永太・東郷敬一郎・石井仁, 機論, **62**-600, A (1996), 1903-1909.
 - (22) Cho, Y. -T., Tohgo, K. and Ishii, H., *Acta Mater.*, **45** (1997), 4787-4795.
 - (23) Gurson, A. L., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, **99** (1977), 1-15.
-