柔軟フレーム構造の納まり形状シンセシス*

桑水流 理^{*1}, 吉川 暢 宏^{*2}, 中 桐 滋^{*2}

Structural Synthesis for Disposed Shape of Flexible Frame

Osamu KUWAZURU, Nobuhiro YOSHIKAWA and Shigeru NAKAGIRI

A method of structural synthesis is proposed to set disposed shape of a flexible frame within an allowable region. Members of the flexible frame, which are initially straight, are discretized into straight bar segments linked by virtual coil springs at nodes. Assuming total strain energy is independently separated into two contributions of bending deformation by the springs and rectilinear deformation by the segments, we find positions of the nodes in the disposed state by means of the Lagrange multiplier method that searches for a stationary point of the total strain energy under the constraints on geometrical boundary conditions. A new formulation of the sensitivity analysis is derived to approximate the change of the found nodal positions with respect to design variables in the first-order sense. A layout constraint to exclude all the nodes from convex prohibited regions in disposed state yields governing equation of design variables in the form of linear simultaneous equations with rectangular matrix of coefficients, which is dealt with by the Moore-Penrose generalized inverse. A numerical example concerning with Y-shaped frame whose disposed shape is constrained by three prohibited regions demonstrates the validity of the proposed formulation.

Key Words: Flexible Structure, Energy Method, Numerical Analysis, Sensitivity Analysis, Lagrange Multiplier Method, Moore-Penrose Generalized Inverse

1. 緒 言

本研究では、二次元柔軟フレーム構造の端点を平面内の所定位置に所定角度で固定し、固定点以外では外力が作用しない場合の曲げ形状を納まり形状と呼び、この納まり形状を所定の領域内に納める設計問題の一解法を示す。この設計問題は自動車のブレーキホースを他部品と干渉なく納める問題^{(1)~(3)}を想定したものであるが、他の機器においても小型化を目指した部品配置の高密度化に伴い同様の柔軟部品収納問題が顕在すると思われる。

柔軟構造の大変形解析は、非線形有限要素法により可能である⁽¹⁾⁽²⁾。非線形有限要素法によれば部材各点の応力とひずみ、ひいては力学的健全性まで評価可能であるが、計算コストが多岐となる。納まり形状に関してのみ設計の要件が設定されるのであれば、コイルばねと真直セグメントによる離散化モデルを用いた解析が有効であり^{(4)~(6)}、計算コストの面で実用性が高い。しかしながら、これまで設計問題の定式化までは

成されていない。

本研究では、柔軟フレームを曲げ変形と伸縮変形を独立に考慮したコイルばねと真直セグメントで離散化し、納まり形状を所定の領域内に納める設計問題の定式を示す。納まり形状の解析は幾何学的境界条件を等式制約条件として、ひずみエネルギーを停留させるラグランジュ乗数法により行う。その停留条件は非線形連立方程式になるので、逐次線形化解析法により解く⁽⁴⁾。設計の定式を可能とするため、解析で求められる解の設計変数に関する変化率解析の定式を新たに導出し、納まり形状の設計変数に関する変化を解の変化率を用いて一次近似する。複数の障害物により構造の納まり範囲が制限されたとき、一次近似の範囲内で障害物を回避する設計変更量決定方程式を連立一次方程式として導く。この方程式の係数マトリックスは一般に長方形マトリックスとなるので、ムーア・ペンローズ一般逆行列⁽⁷⁾を利用して設計変更量を決定する。

数値計算例として、3部材から成る Y 型の柔軟フレーム構造の納まり形状に対して、3個の障害物が与えられた場合に、障害物を回避してフレーム構造を納める構造シンセシスを行い、本定式の妥当性を示す。

* 原稿受付 1998 年 7 月 2 日。

^{*1} 准員、東京大学大学院 (☎ 106-8558 東京都港区六本木 7-22-1)。^{*2} 正員、東京大学生産技術研究所。

E-mail: kuwa@telu.iis.u-tokyo.ac.jp

2. 柔軟フレーム構造の納まり形状解析

本研究では、複数の柔軟棒部材から成る二次元フレーム構造の平面内納まり形状を対象とする。静的問題に限定し、自重の影響は無視できるとする。本章では、柔軟部材のモデル化と納まり形状解析の定式を示し、実験結果との比較により解析の妥当性を検証する。

2.1 柔軟部材の離散化モデル 本節では柔軟部材の離散化方法を示す。柔軟部材は無負荷状態にて長さ L の真直な線形弾性体とする。図1に破線で示す長さ Δs の微小線素の曲げ形状を、実線のように仮想コイルばねで連結された2本の等長な真直セグメントでモデル化する。これを一構成要素とし、柔軟部材を N 個の構成要素に離散化する。この離散化により柔軟部材は図2のように、白丸で示した N 個の仮想コイルばねと $N+1$ 個の真直セグメントでモデル化される。部材の一端を始点とし、節点番号は始点から順に0から $N+1$ まで付し、セグメント番号は始点側から順に1から $N+1$ まで付す。一部材のヤング率、断面積、断面二次モーメントは変形状態によらずに均一に保たれると仮定し、それぞれ E, A, I で表す。さらに曲げについてはベルヌーイ・オイラーの仮定が成り立つとする。つまり図1に $\Delta\theta$ で示す屈折角とモーメントの関係が線形であるとする。そのばね定数 k_B を全仮想コイルばねについて一様とするため、部材を構成要素長 $\Delta s = l_0 = L/N$ で等分割する。このときばね定数 k_B は式(1)となる。

$$k_B = \frac{EI}{l_0} \quad \text{.....(1)}$$

一方、セグメントの伸縮に関して、力と伸びの関係を表すばね定数 k_T はフックの法則より式(2)となる。

$$k_T = \frac{\beta_n EA}{l_0} \quad \text{.....(2)}$$

ここで、 β_n はセグメントの自由長の違いを表すパラメータで、両端で2、それ以外で1の定数である。変形後における第 n セグメントの x 軸からの傾斜角

および長さをそれぞれ θ_n と l_n で表し、第 n 節点の節点座標を (x_n, y_n) で表す。始点つまり第0節点以外の節点座標を x_0, y_0, θ_n および l_n で表し、納まり形状解析のための独立変数を x_0, y_0, θ_n および l_n とする。

2.2 ラグランジュ乗数法による解析 2.1節のモデルに関して、式(1)と式(2)のばね定数を用いて計算される弾性エネルギーをひずみエネルギーとみなし、曲げ変形および伸縮変形の全ひずみエネルギーに対する寄与は独立であると仮定する。このとき、1本の柔軟部材のひずみエネルギー S は次式で表すことができる。

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N k_B (\theta_{n+1} - \theta_n)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N+1} k_T \left(l_n - \frac{l_0}{\beta_n} \right)^2 \quad \text{.....(3)}$$

複数の部材から成るフレーム構造の場合には、各部材を2.1節で述べた手順によりモデル化し、全部材に関してひずみエネルギーの総和をとる。求められた系全体のひずみエネルギーを S_t で表す。

停留ポテンシャルエネルギーの原理に基づき定式化を行うが、納まり形状の解析では外力による仕事を考慮する必要がないので、停留ポテンシャルエネルギーの原理はひずみエネルギーを停留させることに対応する。固定境界条件および部材間の連続条件を制約条件として、ひずみエネルギーを停留させる x_0, y_0, θ_n および l_n をラグランジュ乗数法により求める。その汎関数 Π を次式で構成する。

$$\Pi = S_t - \sum_{i=1}^{N_b} \mu_i q_i \quad \text{.....(4)}$$

ここで、 μ_i はラグランジュ乗数、 q_i は幾何学的境界条件または部材の結合条件を表す等式制約条件、 N_b はそれら制約条件の総数を表す。停留条件を満たすラグランジュ乗数 μ_i はそれぞれの制約条件に対応する反力を意味する⁽⁸⁾。全部材のヤング率および断面形状がすべて均一である場合、式(4)の汎関数は $EA l_0$ で無

Fig. 1 Coil spring and straight segment model

Fig. 2 Discretized model of flexible member

次元化可能となる。そのとき納まり形状はヤング率に依らずに定まり、反力つまりラグランジュ乗数のみがヤング率の影響を受ける⁽⁴⁾。

独立な未知変数 x_0, y_0, θ_n, l_n および μ_i をまとめて u_j で表し、その総数を J とする。解析的に導かれた Π の u_j に関する停留条件を式(5)で略記する。

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial u_j} \right\} = \{F(u_j, \alpha_m)\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 α_m は後述の設計変更で用いる M 個の設計変数であり、納まり形状の解析においては定数とみなす。後に示す数値計算例では設計変数を部材端点の固定角度および部材の自由長とした。式(5)は非線形であるため、未知変数 u_j の初期推定値を適宜与え、ニュートン法にならない逐次線形化により解を得る。未知変数 u_j を現在の推定値 u_j^* とその修正量 Δu_j で表し、 $\{F(u_j, \alpha_m)\}$ を u_j^* 近傍で Δu_j に関して一次近似する。

$$u_j = u_j^* + \Delta u_j \quad \dots\dots\dots (6)$$

これにより得られた連立一次方程式を解いて修正量 Δu_j を定める。 $\{F(u_j, \alpha_m)\}$ の一次近似と推定値 u_j^* の更新を繰返し、 Δu_j が十分小さくなったところで解が確定されたとみなす。以下、確定された u_j を U_j で表す。

2.3 解析結果の検証 本解析法の妥当性を示すため、実験結果との比較を示す。自由長 280 mm、直径 0.3 mm のピアノ線を対象とし、左端を点 (-75.0, 0.0) に傾斜角 $\pi/2$ rad で、右端を (75.0, 80.0) に $-\pi/3$ rad で固定したときの納まり形状を求める。解析のための分割数は $N=28$ とする。このとき、固定条件を表す制約は次の 6 式となる。

$$q_1 = x_0 + 75.0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$q_2 = y_0 - 0.0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$q_3 = x_{29} - 75.0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$q_4 = y_{29} - 80.0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$q_5 = \theta_1 - \pi/2 \quad \dots\dots\dots (11)$$

Fig. 3 Comparison between calculation and experiment

$$q_6 = \theta_{29} + \pi/3 \quad \dots\dots\dots (12)$$

解確定の判定は Δu_j を成分とする修正量ベクトル $\{\Delta u\}$ と u_j^* を成分とする現在の推定値ベクトル $\{u^*\}$ のユークリッドノルムを用いて行う。本解析ではその比 $\|\Delta u\|/\|u^*\|$ が 1.0×10^{-8} 以下になることとする。

図3に破線で示す初期推定形状から始めて、5回の未知変数更新により解が確定できた。解確定のため算出したユークリッドノルムの比は1回目の未知変数更新では1.42であり、以下順次単調に減少した。確定した納まり形状を図3に実線で示す。解析に対応する実験を行い、ピアノ線上の27点の座標を測定した結果を図3に白丸で示す。両者は図中で差がないほど一致しており、提示した解析手法は実用上十分な精度を有していることがわかる。

3. 納まり形状のシンセシス

3.1 解の変化率解析 納まり形状の解析終了後、設計変数 α_m を試設計値 $\bar{\alpha}_m$ から $\Delta \alpha_m$ だけ変更したとき、未知変数の解 U_j が試設計値 $\bar{U}_j$ から ΔU_j だけ変化するとする。

$$\alpha_m = \bar{\alpha}_m + \Delta \alpha_m \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$U_j = \bar{U}_j + \Delta U_j \quad \dots\dots\dots (14)$$

このとき、式(5)の $\{F(U_j, \alpha_m)\}$ を $\bar{U}_j$ および $\bar{\alpha}_m$ 近傍で、 ΔU_j および $\Delta \alpha_m$ に関してテイラー級数展開し、二次以上の高次項を微小として打ち切ると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{F(\bar{U}_j, \bar{\alpha}_m)\} + \sum_{j=1}^J \frac{\partial}{\partial U_j} \{F(\bar{U}_j, \bar{\alpha}_m)\} \Delta U_j \\ & + \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \{F(\bar{U}_j, \bar{\alpha}_m)\} \Delta \alpha_m = \{0\} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$\bar{U}_j$ は設計変数が試設計値 $\bar{\alpha}_m$ であるときに汎関数の停留条件を満たすので、式(15)の左辺第1項は零ベクトルになる。よって、式(15)をマトリックス表示すると式(16)となる。

$$[G]\{\Delta U\} = -[A]\{\Delta \alpha\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $\{\Delta U\}$ と $\{\Delta \alpha\}$ はそれぞれ ΔU_j と $\Delta \alpha_m$ を成分とするベクトル、 $[G]$ と $[A]$ はそれぞれ $\{F(U_j, \alpha_m)\}$ の U_j と α_m に関する微分値を配列したマトリックスである。 $[G]$ は $J \times J$ の正方形マトリックス、 $[A]$ は $J \times M$ の長方形マトリックスとなる。式(16)は解の変化量 $\{\Delta U\}$ の設計変更量 $\{\Delta \alpha\}$ に関する一次近似式である。よって $[G]$ が正則のとき、係数マトリックス $-[G]^{-1}[A]$ の j 行 m 列成分は ΔU_j の $\Delta \alpha_m$ に関する一階感度に相当し、以下では解の変化率と呼ぶ。

3.2 障害物回避の設計変更 障害物を回避して柔軟フレーム構造を納める設計の定式化を行う。設計

変数の初期試設計値が適宜与えられ、納まり形状の解析および解の変化率解析は終了しているとする。障害物が V 個の凸制約領域 R_v で表されるとし、納まり形状の節点座標 (x_n, y_n) がその凸制約領域に含まれないという制約を設定する。また R_v は次式により P_v 個の線形不等式で表されるとする。

$$R_v = \bigcap_{p=1}^{P_v} \{(x, y) | a_p x + b_p y + c_p \leq 0\} \quad \dots\dots (17)$$

ここで、 a_p, b_p, c_p は定数である。

試設計の納まり形状解析後、 R_v に含まれる節点を全て検出する。検出された節点の中で、図4のように連続して R_v に含まれる節点列を1グループとし、グループ総数を K で表す。各グループの中で R_v の境界線からいちばん遠い節点をそのグループの代表節点とし、代表節点を R_v 境界線上に移動させる設計変更量を、解の変化率による一次近似の範囲内で算出する。設計変更量の解を得やすくするため、移動後の代表節点の座標値を規定するのではなく、境界線への最短距離方向への移動量のみを規定する。図5に示すように第 k グループの代表節点から制約領域の境界線までの最短距離方向の傾斜角を ϕ_k とし、 x - y 座標系を ϕ_k だけ回転させ、代表節点の移動量を表すための局所座標系 ξ_k - η_k をとる。この座標変換は線形変換なので、3.1 節で求めた解の変化率も線形変換され、設計変更による代表節点の局所座標での移動量を、設計変更量 Δa_m に関して一次近似できる。代表節点が

Fig. 4 Group of nodes included in prohibited region

Fig. 5 Local coordinates for design change

ら境界線までの距離を $\Delta \xi_k$ とすると、代表節点を R_v 境界上に移動させる設計変更量決定方程式は式(18)となる。

$$\sum_{m=1}^M \xi_{km}^l \Delta a_m = \Delta \xi_k \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 ξ_{km}^l は解の変化率を線形変換して求めた、代表節点の ξ_k 方向移動量の設計変更量 Δa_m に関する変化率である。また η_k 方向の移動量は不問とする。式(18)を K 個の代表節点すべてについて導き、その連立一次方程式をまとめて式(19)でマトリックス表示する。

$$[D]\{\Delta a\} = \{\Delta \xi\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $[D]$ は ξ_{km}^l を k 行 m 列に配置したマトリックス、 $\{\Delta a\}$ 、 $\{\Delta \xi\}$ はそれぞれ Δa_m 、 $\Delta \xi_k$ を成分とするベクトルである。この連立一次方程式の係数マトリックス $[D]$ は $K \times M$ の長方形マトリックスなので、ムーア・ペンローズ一般逆行列⁷⁾を用いて、次式により設計変更量を決定する。

$$\{\Delta a\} = [D]^+ \{\Delta \xi\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで、肩符⁺はムーア・ペンローズ一般逆行列を表す。上式により求められる設計変更量は、式(19)の解が存在するとき最小ノルム解もしくは唯一解、解が存在しないとき最小二乗近似解である⁷⁾。

式(20)で求められる設計変更量は式(18)の一次近似式に基づいているので、一次近似の誤差を補正するため、設計変更後に納まり形状の再解析を行い、全節点が制約領域 R_v の外に出るまで、一連の解析と設計変更を繰返す。この繰返し計算により所望の納まり形状が得られるか否かは、初期試設計と設計変数の設定の巧拙に大きく依存する。

4. 数値計算例

無負荷状態では真直な3本の柔軟部材を図6に示す

Fig. 6 Y-shaped frame

角度で結合した Y 型のフレームの例題により、提示した定式の有効性を検証する。3 部材のヤング率 E 、断面積 A 、断面二次モーメント I はすべて相等しく一様で、それぞれ $E=1.0 \text{ GPa}$ 、 $A=20.0 \text{ mm}^2$ 、 $I=30.0 \text{ mm}^4$ とする。また、図 6 の () 付番号は部材番号を表し、以下では () 付肩符 (i) で第 i 部材に関する値であることを表す。各部材の分割数はそれぞれ $N^{(1)}=N^{(2)}=40$ 、 $N^{(3)}=30$ とし、第 1 部材は自由端を始点、第 2、第 3 部材は結合点を始点とする。

4.1 納まり形状解析 第 1 部材の始点を点 $(0, 0)$ に傾斜角 $\pi/3 \text{ rad}$ で、第 2 部材の終点を $(250, 100)$ に $\pi/3 \text{ rad}$ で、第 3 部材の終点を $(50, 250)$ に $5\pi/6 \text{ rad}$ で固定するときの、Y 型フレームの納まり形状を求める。式 (4) の汎関数 Π の制約条件 q_i の数は、固定位置を表すものが 6、固定角を表すものが 3、結合点での節点座標の一致を表すものが 4、結合点での結合角度保持を表すものが 2 となり、制約条件の総数は $N_g=15$ となる。初期推定形状を図 7 の破線で与え解

Fig. 7 Disposed shape for initial trial design

Fig. 8 First-order approximation of nodal position change of joint

析したところ、7 回の未知変数更新で納まり形状を確定できた。解確定の判定は 2.3 節同様にユークリッドノルムにて $\| \Delta u \| / \| u^* \| < 1.0 \times 10^{-8}$ で与えた。またその未知変数の更新による減少も単調であった。求められた納まり形状を図 7 に実線で示す。

4.2 納まり形状シンセシス 4.1 節で解析した初期試設計の納まり形状に対して、次の三つの凸制約領域を与える。

$$R_1 = \{(x, y) | y \leq 240\} \cap \{(x, y) | x \leq 110\} \cap \{(x, y) | y \geq 150\} \dots\dots\dots (21)$$

$$R_2 = \{(x, y) | x \geq 20\} \cap \{(x, y) | y \leq 100\} \cap \{(x, y) | x \leq 100\} \dots\dots\dots (22)$$

$$R_3 = \{(x, y) | x \geq 140\} \cap \{(x, y) | y \geq 60\} \cap \{(x, y) | x \leq 230\} \dots\dots\dots (23)$$

設計変数は各部材の自由長 $L^{(i)}$ および固定角 $\gamma^{(i)}$ の計 6 個とする。

まず解の変化率解析の妥当性を確認する。3 部材の結合点の y 座標の第 1 部材の固定角 $\gamma^{(1)}$ に関する変化を図 8 に示す。図 8 の縦軸と横軸はともに試設計値で無次元化してある。図中、白丸は設計変数を変化させて得た解析値で、実線は試設計における解の変化率

Fig. 9 Disposed shape after design change

Fig. 10 Variation of lengths of members

Fig. 11 Variation of clamp angles

解析から得られた一次近似結果を表す。図8より、 $\gamma^{(1)}$ の変化が10%程度であれば、一次近似が妥当であることがわかる。

提示した手法により障害物を回避する設計変更を行ったところ、11回の設計変更で全節点を制約領域の外に移動させることができた。設計変更後の納まり形状を図9に実線で示す。図中、破線は初期試設計における納まり形状である。設計変更後の設計変数はそれぞれ、 $L^{(1)}=228$ mm, $L^{(2)}=249$ mm, $L^{(3)}=161$ mm, $\gamma^{(1)}=1.45$ rad, $\gamma^{(2)}=1.06$ rad, $\gamma^{(3)}=3.08$ radであった。設計変更による各部材の自由長 $L^{(i)}$ の変化を図10に、固定角 $\gamma^{(i)}$ の変化を図11に示す。また制約領域に含まれる節点のグループ数 K の変化を図12に示す。

図10と図11に示した設計変数および図12に示した K いずれについても収束は単調ではない。これは代表節点以外の節点が設計変更後、制約領域外にあることを保証していないため、設計変更ごとに代表節点が異なるからである。

Fig. 12 Variatin of number of groups K

5. 結 言

柔軟フレーム構造の納まり形状シンセシスに関し、ばね・セグメントモデルの適用可能性を検討した。納まり形状の解析で求められる解の、設計変数に関する変化率解析の定式を新たに導出した。複数の凸制約領域で表される障害物が与えられた場合に、提示した解の変化率解析に基づき、障害物を回避して柔軟フレームを納める設計手法を提示した。3個の障害物が与えられた Y 型の柔軟フレームに関する数値計算例により、提示した手法の妥当性を示した。

文 献

- (1) 津田政明・ほか5名, 自動車技術会学術講演会前刷集, 891(1989-5), 151-154.
- (2) 赤崎文彦・ほか3名, 自動車技術会学術講演会前刷集, 911(1991-5), 123-126.
- (3) 杉山滋・ほか2名, 自動車技術, 46-4(1992), 73-77.
- (4) Nakagiri, S., *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 7-1 (1990), 46-49
- (5) 吉田和司・河内政隆, 機論, 58-552, A(1992), 1474-1480.
- (6) 山本和夫, パソコンで学ぶ非線形機械力学シミュレーション, (1996), 77-83, 日刊工業新聞社.
- (7) 半谷裕彦・川口健一, 形態解析, (1991), 21-42, 培風館.
- (8) 鷲津久一郎, 弾性学の変分原理概論, (1972), 7-13, 培風館.