多数球形欠陥まわりの直流電位場解析*

多田直哉^{*1}, 中山英介^{*2}
北村隆行^{*1}, 大谷隆一^{*1}Analysis of Direct Current Potential Field
around Multiple Spherical DefectsNaoya TADA, Eisuke NAKAYAMA,
Takayuki KITAMURA and Ryuichi OHTANI

A method for evaluating the distribution of electrical potential around multiple spherical defects was proposed. As the method is based on the known solution for a single defect, the electric field can be efficiently analyzed in comparison with the other methods, such as the finite element method. The electric field in a conductive material with multiple spherical defects at random locations is estimated by the method. The analysis shows that the increase in the potential difference normalized by the potential difference without defects, $\Delta V/V_0$, is in proportion to the product of the volumetric density of defects and the mean of cubed defect radius, $n_v[r^3]_m$. The universal relationship is independent of the location of defects and the distribution of defect radius. Thus, the damage due to the multiple defects can be evaluated by the increase in potential difference.

Key Words: Numerical Analysis, Nondestructive Inspection, Electric Potential Difference, Multiple Spherical Defects, Direct Current, Defect-Current Modification Method

1. 緒 言

著者らはこれまで、多数の円形き裂(円板状き裂)群を含む導電性材料内の直流電位場を効率的に解析する手法を提案し、き裂分布と電位差増分の関係について検討してきた⁽¹⁾。その結果、き裂分布を特徴付ける無次元量とき裂群による直流電位差増分の間には一価関係が認められ、同関係がき裂の個数および半径分布にほとんど依存しないことが明らかになった⁽²⁾。また、その較正関係を用いて、耐熱鋼の高温クリープ疲労において試験片内部に発生した微小き裂分布の推定を行っている⁽³⁾。

本研究では、き裂群の直流電位場解析に用いた方法と同じ考え方に基づいて、導体内部に多数の球形欠陥が存在する場合について電位場解析手法を提案するとともに、本手法によって得られた結果を有限要素法による解析結果と比較し、その解析精度について検討

した。さらに、有限要素法等では実質的に解析が困難なランダムに分布する欠陥に関して電位場解析を行い、欠陥分布と直流電位差の関係を明らかにした。

2. 解 析 方 法

2・1 欠陥電流修正法 本研究では、欠陥電流修正法(Defect-Current Modification Method; DCMM)を用いて、多数球形欠陥まわりの電位場を解析する。本手法は、著者らが多数分布き裂の電位場解析に用いた手法⁽¹⁾と基本的に同じ概念を用いている。以下にその概要を示す。

(1) 無限の大きさを有する三次元導体中に一つの球形欠陥が存在し、無限遠方にて一様電流(電界 E_∞)が供給されている場合、欠陥まわりの電位 ϕ は次式の厳密解で表される⁽⁴⁾。

$$\phi = E_\infty Zr \left\{ 1 + \frac{1}{2(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} \right\} \cdots \cdots (1)$$

ここで、 (X, Y, Z) は欠陥の中心を原点とし、欠陥半径 r により無次元化した三次元直交座標であり、また、一様電流は z 軸の負の方向に供給されている。この電

* 原稿受付 1998 年 8 月 28 日。

^{*1} 正員, 京都大学大学院工学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)。^{*2} 学生員, 京都大学大学院。

E-mail: tada@kues.kyoto-u.ac.jp

位 ϕ を、一様電流による電位 ϕ_u と欠陥の存在により発生した仮想電流の電位 ϕ_d に分けると、両者はそれぞれ次式で与えられる。

$$\phi = \phi_u + \phi_d \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\phi_u = E_\infty Zr \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\phi_d = E_\infty \frac{Zr}{2(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

本研究では、 ϕ_d で表される流れを「欠陥電流 (defect-current)」と呼ぶ。一様電流中に単独で球形欠陥が存在する場合、 ϕ_d は上式からわかるように z 軸方向の二重吹出し (doublet) で与えられる。ここで、式 (4) 中の E_∞ に相当する電界を「欠陥電流の強さ」と呼ぶことにすると、結局、強さ E_∞ の一様電流中に存在する単一球形欠陥まわりの直流電位場は、一様電流および一様電流と同じ強さ E_∞ の二重吹出しの重ね合わせにより得られることになる。

(2) 多数欠陥まわりの電位場も一様電流と欠陥電流の重ね合わせで考えることができるが、式 (4) で表される強さ E_∞ の二重吹出しを単純に欠陥位置に配置しただけでは、二重吹出し間の相互作用により、各欠陥の表面を貫く電流が生じ、球面上の境界条件が満たされない。そこで、図 1 に模式的に示すように、各欠陥 (欠陥 i) の欠陥電流を、 z 軸方向の二重吹出しに加えて、 x 軸および y 軸方向の二重吹出しの三者で構成する。各二重吹出しは、欠陥の中心 O_i にあるものと

するが、その強さ E_{1i} , E_{2i} , E_{3i} は (3) で説明する境界条件を満たすように決定する。このとき、各欠陥の欠陥電流による電位 $[\phi_d]_i$ は次式で表される。

$$[\phi_d]_i = E_{1i} \frac{X_i r_i}{2(X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2)^{3/2}} + E_{2i} \frac{Y_i r_i}{2(X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2)^{3/2}} + E_{3i} \frac{Z_i r_i}{2(X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2)^{3/2}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

なお、一様電流および各欠陥の欠陥電流を重ね合わせて得られる電位場がラプラスの方程式を満たすことは自明である。

(3) 各欠陥の欠陥電流の強さ E_{1i} , E_{2i} , E_{3i} は、図 1 に示す球面上の 6 つの参照点において、以下に示す境界条件を満たすように決定する。

- 1) 参照点 $P_1(r_i, 0, 0)$ および参照点 $P_2(-r_i, 0, 0)$ における x 軸方向の電界 (電流) の和がゼロ。
- 2) 参照点 $P_3(0, r_i, 0)$ および参照点 $P_4(0, -r_i, 0)$ における y 軸方向の電界 (電流) の和がゼロ。
- 3) 参照点 $P_5(0, 0, r_i)$ および参照点 $P_6(0, 0, -r_i)$ における z 軸方向の電界 (電流) の和がゼロ。

これらは、球面上の任意の点において面に垂直な方向の電流成分がゼロであるという境界条件を、球面上の 3 対の参照点における平均電流を用いて近似的に表現したものである。このように境界条件を設定すると、

Fig.1 Six reference points on the surface of each defect and defect-current composed of three doublets in x , y and z -axis directions.

未知数の個数と境界条件式の数が一致し、問題を解くことが可能となる。本手法では、未知数の個数は欠陥数の3倍となり、これらは通常の連立一次方程式を解くことにより得られるため、他の多数の要素分割を必要とする数値解析手法(例えば、有限要素法)と比較して極めて効率的に解が得られる。

2.2 多数欠陥の分布条件および配置方法 本研究では、図2に示す、(a)同一半径の球形欠陥が三次元格子状に分布する場合、(b)同一半径の球形欠陥がランダムな位置に分布する場合、(c)半径に分布を有する球形欠陥がランダムな位置に分布する場合、の3種類の欠陥分布パターンに関して解析を行った。なお、解析条件(c)では、半径分布を対数正規分布⁽⁹⁾で与えた。(a)から(c)の解析条件をそれぞれ表1から表3に示す。表に示す欠陥分布条件では欠陥半径を1~2mmが中心になるように設定しているが、直流電位場には「ある一つの欠陥分布条件に対する無次元化電位差増分 $\Delta V/V_0$ (ΔV は欠陥による電位差の増加分、 V_0 は欠陥が存在しない場合の電位差)は、それを相似的に縮小あるいは拡大した欠陥分布に対する電位差増分と等しい」という相似則が成立するため、得られる解析結果はミクロンサイズの多数分布欠陥にも適用できる。

多数欠陥の配置方法を以下に示す。図3に示すように、幅 $2w$ 、奥行き $2b$ 、高さ $2h$ のユニットセル内に球形欠陥を配置し、このユニットセルと同一の欠陥配置を有するレプリカセルをユニットセルを取り囲むように配置した。ただし、電位場の対称性を考慮し、解析条件(a)~(c)に対して、図3左の(a)~(c)のユニットセルを用いた。また、各レプリカセルの方位は、セ

ル各面に対してその両側の欠陥配置が対称(鏡像)となるように決定した。このようなセル構造を用いることにより、中央にあるユニットセルの上下面は等電位面となり、かつ、多数の欠陥を迅速に作成することができる。本研究では、すべての解析において中央のユニットセルをレプリカセルで8重に取り囲み、総数3375個のセルを用いた。また、電位差検出用のプローブは中央のユニットセルの上面と下面に設置したと仮定し、欠陥材の抵抗値の増分に相当する無次元化電位差増分 $\Delta V/V_0$ を計算した。

Fig.2 Distribution of defects.

Fig.3 Unit cell and collocation of duplicate cells.

Table 1. Conditions for analysis (a).

Number of defects in unit cell N_v	Defect radius r (mm)	Size of unit cell			Symbol	
		$2w$ (mm)	$2b$ (mm)	$2h$ (mm)	in Fig.10	in Fig.13
1	1	4	4	4	○	○
1	1	6	6	6		
1	1	8	8	8		
1	1	10	10	10		
1	1	12	12	12		
1	1	14	14	14		
1	1	16	16	16		
1	1	18	18	18		
1	1	20	20	20		
1	1	4	4	20	△	
1	1	6	6	20		
1	1	8	8	20		
1	1	10	10	20		
1	1	20	4	4	□	
1	1	20	6	6		
1	1	20	8	8		
1	1	20	10	10		

Table 2. Conditions for analysis (b).

Number of defects in unit cell N_v	Defect radius r (mm)	Size of unit cell			Symbol		
		$2w$ (mm)	$2b$ (mm)	$2h$ (mm)	in Fig.11	in Fig.13	
1	1	50	50	50	○	△	
2	1	50	50	50			
5	1	50	50	50			
10	1	50	50	50			
20	1	50	50	50			
50	1	50	50	50			
1	2	50	50	50	△		△
2	2	50	50	50			
5	2	50	50	50			
10	2	50	50	50			
20	2	50	50	50			
50	2	50	50	50			

Table 3. Conditions for analysis (c).

Number of defects in unit cell N_v	Defect radius r (Lognormal distribution)		Size of unit cell			Symbol			
	Mean r_m (mm)	Variance r_s^2 (mm ²)	$2w$ (mm)	$2b$ (mm)	$2h$ (mm)	in Fig.12	in Fig.13		
20	1	0.002	100	100	100	○	□		
50	1	0.002	100	100	100				
100	1	0.002	100	100	100				
200	1	0.002	100	100	100				
20	1	0.07	100	100	100	△		□	
50	1	0.07	100	100	100				
100	1	0.07	100	100	100				
200	1	0.07	100	100	100				
20	1	0.2	100	100	100	□			□
50	1	0.2	100	100	100				
100	1	0.2	100	100	100				
200	1	0.2	100	100	100

Fig.4 Equipotential lines by DCMM.

Fig.5 Equipotential lines by FEM.

3. 解析結果および考察

3.1 解析精度に関する検討

3.1.1 格子状分布の場合 欠陥が格子状に分布する場合の電位場は、対称性より、上下面が等電位の立方体あるいは直方体の中心に欠陥が一つ存在する場合の電位場に等しい。したがって、有限要素法を用いて容易に解析することができる。格子状分布のうち、 $(w, b, h) = (2, 2, 10)$, $(10, 2, 2)$, $(2, 2, 2)$ の場合に関して本手法による電位分布解析結果を図4に、また、有限要素法(FEM)による解析結果を図5に示す。ただし、両図とも電位場の対称性を考慮して、 y および z の値が正となる $1/4$ 平面についてのみ結果を示している。また、 $(w, b, h) = (2, 2, 2)$ に関する結果は見やすいように2倍に拡大してある。なお、紙面の都合上、有限要素解析の詳細は省略するが、用いたソフトウェアは汎用の有限要素解析ソフト FEMAS((株)ホクト・システム製)である。図4からわかるように、セル上面が等電位である、等電位線が球面に垂直である(球面を貫く電流がゼロである)という境界条件がほぼ満たされている。

次に、式(6)に示す有限要素解析結果との相対差 E_r の分布を図6に示す。

$$E_r = \frac{|\phi_{\text{FEM}} - \phi|}{\phi_{\text{FEM}}} \times 100 (\%) \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 ϕ_{FEM} は有限要素法による解析結果、 ϕ は DCMM によって求めた結果である。いずれの条件においても E_r の値は2%以下程度と小さいことがわかる。これは、2.1 節の(3)で説明した境界条件の近似が結果に大きな影響を及ぼさないことを示している。

Fig.6 Relative error (%).

3.1.2 同一半径を有する3個の欠陥が周期的に分布する場合 図7に示すように、立方体のユニットセル内に3個の球形欠陥が存在し、そのセルが互いに鏡像関係を保ちながら周期的に分布する場合について考える。この場合の電位場は、上下面が等電位の立方体中に3個の欠陥が存在する場合の電位場に等しいため、この程度の欠陥個数であれば有限要素解析が可能である。本手法による電位分布の解析結果、有限要素法による解析結果、および式(6)に示す相対差 E_r の分布を図8および図9に示す。ここで、図8は $y=-1$ 面、図9は $z=0$ 面上の結果であり、いずれの場合も、電位の基準面はユニットセルの底面とした。図より、本条件においても、前節で述べたセル端面や球面上での境界条件が満たされており、また、 E_r の値も小さいことがわかる。

Fig. 7 A model used for verification of DCMM (dimensions in mm).

Fig. 8 Equipotential lines and relative error on $y = -1$.

3.2 欠陥分布と電位差の関係

3.2.1 格子状配置の場合 (条件(a)) 無次元化電位差増分 $\Delta V/V_0$ と、欠陥の体積密度 $n_v [\text{mm}^{-3}]$ と半径 $r [\text{mm}]$ の三乗の積で与えられる無次元量 $n_v r^3$ との関係を図 10 に示す。なお、図中には 3.1.1 節で用いた有限要素法による解析結果も併せて示している。

本図からわかるように、両者は w, b, h の組み合わせによらずほぼ比例関係にあり、その関係は次式で表される。

Fig. 9 Equipotential lines and relative error on $z = 0$.

Fig. 10 Relationship between normalized increase in potential difference, $\Delta V/V_0$, and non-dimensional defect distribution parameter, $n_v r^3$ in analysis (a).

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 6.3 n_v r^3 \dots \dots \dots (7)$$

3.2.2 半径が一定で配置がランダムである場合 (条件(b)) $\Delta V/V_0$ と $n_v r^3$ の関係を図 11 に示す。この場合も式(7)と同じ関係が成立する。したがって、欠陥の配置によらず式(7)が成立することがわかる。

3.2.3 半径が分布を有し配置がランダムである場合 (条件(c)) $\Delta V/V_0$ と $n_v [r^3]_m$ の関係を図 12 に示す。ただし、 $[r^3]_m$ は欠陥半径の三乗平均であり、 N を全欠

Fig.11 Relationship between normalized increase in potential difference, $\Delta V/V_0$, and non-dimensional defect distribution parameter, $n_v r^3$ in analysis (b).

Fig.12 Relationship between normalized increase in potential difference, $\Delta V/V_0$, and non-dimensional defect distribution parameter, $n_v [r^3]_m$ in analysis (c).

陥個数として、

$$[r^3]_m = \frac{\sum_{i=1}^N r_i^3}{N} \quad \dots\dots\dots (8)$$

より求められる。図より、この場合も式(7)と同様の次式の関係が成立することがわかる。

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 6.3 n_v [r^3]_m \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $\Delta V/V_0$ が平均半径の三乗ではなく半径の三乗平均で整理されるのは、導体の電位差増分が各欠陥の

Fig.13 Universal relationship between normalized increase in potential difference, $\Delta V/V_0$, and non-dimensional defect distribution parameter, $n_v [r^3]_m$.

存在によって欠陥周辺に出現する低電流密度域の体積に比例するためであると考えられる⁽²⁾。

3.3 多数欠陥の較正方程式 3.2.1 節から 3.2.3 節に示した欠陥分布と電位差の関係をまとめると、図 13 および次式となる。

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 6.3 n_v [r^3]_m \quad \dots\dots\dots (10)$$

上式が多数球形欠陥を含む材料に直流電位差法を適用した場合の較正方程式であり、測定した電位差の損傷としての意味を与える。

ここで、材料の抵抗値増分が欠陥の体積率に比例すると仮定して電位差増分を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V_0} &= \frac{\frac{4}{3} \pi m_v [r^3]_m}{1 - \frac{4}{3} \pi m_v [r^3]_m} \\ &\approx 4.2 n_v [r^3]_m \quad (1 \gg \frac{4}{3} \pi m_v [r^3]_m) \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。式(10)と式(11)を比較するとわかるように、実際の電位差増分は欠陥の体積率から求められる値より 5 割ほど大きな値を示す。これは、式(11)では、欠陥電流同士の電位場の相互作用を考慮していないためと考えられる。

また、同図中には、電流に垂直な方向に分布する多数円形き裂についての結果も示している。円形き裂群の場合、直流電位差と欠陥分布の関係は次式で与えられる⁽²⁾。

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 2 n_v [r^3]_m \dots\dots\dots (12)$$

式(10)と式(12)を比較するとわかるように、球形欠陥群による電位差増分は、同じ個数、同じ半径分布を有する円形き裂群に比べて3倍程度大きい電位差上昇を示す。

4. 結 言

金属などの導電性材料の内部に球状の鑄造欠陥やボイドあるいはキャビティが多数存在する場合の電位差を測定することによって、欠陥分布の状態を求めることができれば有意義である。本論文では、すでに提案した多数の円形き裂群の電位場解析手法を拡張・適用し、多数球形欠陥まわりの電位場を解析する手法として欠陥電流修正法(Defect-Current Modification Method; DCMM)を提案した。また、本手法を用いて欠陥分布と電位差の関係について検討した。得られた結果を以下に要約する。

(1) 本論文で提案した欠陥電流修正法は、電位分布に関する定式化された厳密解を有効に利用するため、多くの要素分割を必要とする他の一般的な数値解析手法に比べて効率的かつ短時間で電位場解析を行うことができる。周期境界条件が適用できない多数の欠陥がランダムな位置に存在する場合には、特に本手法が優位である。

(2) 少数の球形欠陥が周期的に分布する場合について

て、本手法による電位分布の解析結果を有限要素法による解析結果と比較したところ、解析領域全体に渡って誤差は極めて小さく、本解析手法は十分な精度を有することが確かめられた。

(3) 同一半径の球形欠陥が三次元格子状に分布する場合、同一半径の球形欠陥がランダムな位置に分布する場合、半径に分布を有する球形欠陥がランダムな位置に分布する場合、の3種類の欠陥分布パターンに関して電位場解析を行い、欠陥分布と電位差増分の関係について検討した。いずれの場合も、無次元化電位差増分 $\Delta V/V_0$ (ΔV : 欠陥による電位差の増加分, V_0 : 欠陥が存在しないときの電位差)は、欠陥の体積密度 n_v と欠陥半径の三乗平均 $[r^3]_m$ の積と一価関係を示した。

文 献

- (1) Tada, N., Hayashi, Y., Kitamura, T. and Ohtani, R., *Int. J. Fract.*, **85**(1997), 1-9.
- (2) 多田直哉・林義仁・北村隆行・大谷隆一, 機論, **63**-614, A(1997), 159-166.
- (3) 多田直哉・大谷隆一・北村隆行・中山英介, 日本非破壊検査協会平成10年度春季大会講演概要集, (1998), 225-228.
- (4) 藤本武助, 流体力学, (1980), 49, 養賢堂.
- (5) 例えば, 岡村弘之・板垣浩, 破壊力学と材料強度講座 6 強度の統計的取扱い, (1981), 35, 培風館.